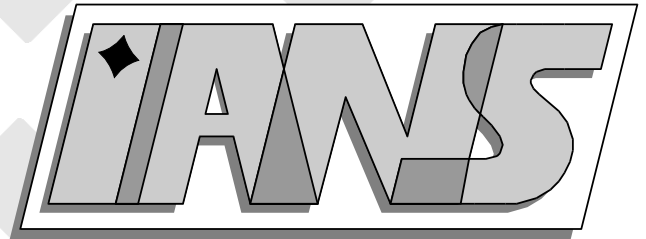


**Universität
Stuttgart**



Distributionentheorie mit Anwendungen
auf partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2002/2003

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Universität Stuttgart

Distributionentheorie mit Anwendungen
auf partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2002/2003

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische
Simulation**

Vorlesungsskript 2003/014

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de
WWW: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
IANS-Logo: Andreas Klimke. \LaTeX -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Einführung in die Distributionentheorie	9
1.1 Schwache Ableitungen	9
1.2 Der Raum der Testfunktionen \mathcal{D}	16
1.3 Der Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$	20
1.4 Fouriertransformation und temperierte Distributionen	38
2 Rand- und Anfangswertprobleme	49
2.1 Berechnung von Fundamentallösungen	49
2.2 Fundamentallösung des Laplace-Operators	51
2.3 Fundamentallösung für die Wärmeleitungsgleichung	64
2.4 Fundamentallösung für die Wellengleichung	69
3 Schwache Lösungen von linearen elliptischen Randwertproblemen	85
3.1 Sobolevräume	87
3.1.1 Der Raum $L^p(\Omega)$	87
3.1.2 Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und $\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$	89
3.1.3 Äquivalente Normen in $W^{k,p}(\Omega)$	92
3.1.4 Der Raum $\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$	93
3.1.5 Einbettungssätze	95
3.1.6 Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit reellem $s \geq 0$ (Sobolev-Slobodeskij-Raum)	96
3.1.7 Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit $s < 0$	98
3.1.8 Spurräume	100
3.1.9 Fortsetzung vom Rand ins Gebiet	101
3.2 Schwache Formulierung von Randwertproblemen	103

3.3	Elliptische Randwertprobleme	109
3.3.1	Das Dirichletproblem für die Poissongleichung	109
3.3.2	Das Neumannproblem für die Poissongleichung	111
3.3.3	Das Robinproblem (3. Randwertproblem) für die Poissongleichung	113
3.3.4	Das gemischte Randwertproblem für die Poissongleichung	115
3.3.5	Ein Transmissionsproblem für die Poissongleichung	117
3.3.6	Allgemeine elliptische Gleichungen	122
	Musterlösungen zu den Übungsaufgaben	125
	Literaturverzeichnis	184

Einleitung

Während das 19. Jahrhundert von dem italienischen Mathematiker V. Volterra das Jahrhundert der Theorie der Funktionen genannt wurde, bezeichnete F. E. Browder das 20. Jahrhundert als das Jahrhundert der Funktionalanalysis.

Die Theorie der Distributionen, auch Theorie der verallgemeinerten Funktionen genannt, ist eine gewisse funktionalanalytische Verallgemeinerung der klassischen Analysis. Im Mittelpunkt steht die Definition eines verallgemeinerten Ableitungsbegriffes. Damit ist es möglich auch klassisch nicht differenzierbare Funktionen, wie stetige, stückweise lineare Funktionen oder auch Sprungfunktionen im Distributionssinn zu differenzieren.

Auf der Grundlage der partiellen Integration führte O. Heaviside um 1900 einen „Calculus“ ein, der es gestattete, Ableitungen von klassisch nicht differenzierbaren Funktionen zu bilden. Dieser Calculus wurde von Physikern und Ingenieuren benutzt. Weil allerdings eine strenge mathematische Begründung fehlte, war nicht eindeutig klar, warum eigentlich „richtig“ gerechnet wurde.

1927 führte der englische Physiker und Mathematiker P. A. M. Dirac (geb. 1902, tätig in Cambridge und Oxford) eine neuartige Funktion ein, die heute *Diracsche Delta-Funktion*, kurz mit δ bezeichnet, genannt wird. Sie sollte die Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

beschreiben. Die Delta-Funktion, oder besser δ -Distribution, war folgendermaßen definiert worden:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1.$$

Sie kann keine klassisch integrierbare Funktion sein. Um jedoch eine mathematisch fundierte Theorie aufzubauen, reicht eine solche Definition nicht aus.

In den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts untersuchte S. L. Sobolev [24] Anfangswertprobleme für hyperbolische partielle Differentialgleichungen. Er führte einen Raum von Grundfunktionen und darüber einen Raum von stetigen linearen Funktionalen (reell- oder komplexwertige Abbildungen) ein, der später *Distributionenraum* genannt wurde. Sobolev formulierte ebenfalls wesentliche Definitionen, z.B. wie man die linearen stetigen Funktionalen differenziert und was man unter konvergenten Folgen und Reihen im Distributionenraum versteht.

In den vierziger Jahren baute Laurent Schwartz [21, 22, 23] die Theorie der Distributionen systematisch aus. Insbesondere führte er eine Fouriertransformation für Distributionen ein; hinzuweisen ist auch auf die Bücher von I. M. Gelfand und G. E. Šilov [8].

Heute stellt die Distributionentheorie ein wesentliches Mittel bei der Analysis von Differentialgleichungen dar.

Die Vorlesung beginnt mit einer Einführung in die Distributionentheorie, in der Grundbegriffe definiert und Rechenregeln bewiesen werden. Zu den Grundbegriffen gehören neben der Ableitung auch das direkte Produkt, die Faltung und die Fouriertransformation von Distributionen. Danach wird die Distributionentheorie zur Lösung von linearen klassischen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik verwandt. Dem folgend werden Fundamentallösungen für den Laplace-, Wärmeleitungs- und Wellenoperator berechnet und das Cauchysche Anfangswert- sowie Randwertproblem untersucht. Weiter werden so genannte schwache Ableitungen und entsprechende Sobolevräume eingeführt. Auf dieser Grundlage werden schwach formulierte Rand-Anfangswertprobleme analysiert. Die analytischen Ergebnisse spielen eine wesentliche Rolle bei der numerischen Behandlung von partiellen Differentialgleichungen, u.a. mit Finiten Element Methoden.

Kapitel 1

Einführung in die Distributionentheorie

1.1 Schwache Ableitungen

Wir wissen aus der klassischen Analysis, dass im Allgemeinen

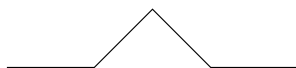
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

ist. Betrachten wir die Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0$, so ist diese für *jede* Funktion $u = u(x)$ erfüllt, jedoch muss

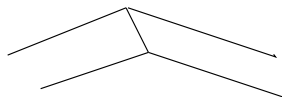
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x) = 0$$

nicht definiert sein. Dies erscheint unnatürlich und erfordert die Definition neuer „Funktionen“, für die die Ableitungen definiert und unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungen sind.

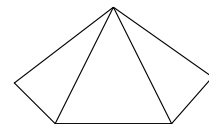
Weiterhin sind stückweise polynomiale Funktionen (siehe *Grafik 1*)



1-dimensional



2-dimensional



3-dimensional

Grafik 1

im klassischen Sinn an „Ecken“ bzw. „Kanten“ nicht differenzierbar.

Der Schlüssel zur Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs liegt in der Anwendung der partiellen Integration. Wir erinnern, dass für eine beschränkte messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:

für $n = 1$, $\Omega = (a, b)$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + u(x)v(x) \Big|_a^b;$$

für $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ glatt:

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \cos(\vec{n}, x_i) \, d\sigma, \quad (1.1)$$

wobei \vec{n} der äußere Normalenvektor der Fläche $\partial\Omega$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration auf Funktionen $u, v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$, wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ ein Multiindex und $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^{|\alpha|-1} v}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|-1} v \cos(\vec{n}, x_1)}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \, d\sigma \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v \, dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) \, d\sigma. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$R(u, v)$ hängt von den Ableitungen von u und v bis zur Ordnung $|\alpha| - 1$ ab. Führen wir die Bezeichnung $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ ein, dann können wir (1.2) auch wie folgt schreiben:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v \, dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) \, d\sigma. \quad (1.3)$$

Es sei $C_0^{|\alpha|}(\Omega) = \{v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega}) : \text{supp } v \text{ beschränkt, } \text{supp } v \subset \Omega\}$

mit $\text{supp } v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$,

das heißt, die Funktionen $v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ verschwinden in einem Randstreifen des Gebietes Ω und damit verschwindet das Oberflächenintegral in (1.3) für diese Funktionen.

Definition 1 (Schwache Ableitungen)

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, w \in L^1_{loc}(\Omega)$, das heißt, u und w sind über jedem beschränkten inneren Teilgebiet von Ω integrierbar. $w = u_\alpha = D^\alpha u$ ist die schwache α -te Ableitung von u im Gebiet Ω (nicht punktweise definiert!), falls gilt:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v \, dx \quad \forall v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega). \quad (1.4)$$

Durch „Überschiebung“ der Differentiation auf die so genannten Testfunktionen wird durch Formel (1.4) die schwache Ableitung eingeführt. Wir werden später sehen, dass diese Idee in der Distributionentheorie weiter ausgebaut wird, das heißt $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ wird durch $C_0^\infty(\Omega)$ ersetzt und die Distributionen werden als lineare Funktionale über dem Raum $C_0^\infty(\Omega)$ definiert.

Wir überzeugen uns zunächst davon, dass die schwachen Ableitungen in $L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig bestimmt sind und daher mit den klassischen Ableitungen übereinstimmen, falls diese existieren und sich in $L^1_{loc}(\Omega)$ befinden.

Lemma 1 (von Du Bois-Reymond)

Eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lokal integrierbare Funktion f verschwindet im Gebiet Ω fast überall genau dann, wenn $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist.

Beweis

a) Es sei $f = 0$ fast überall. Dann gilt $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

b) Es sei $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle v aus $C_0^\infty(\Omega)$.

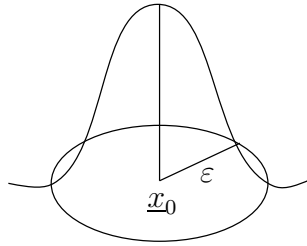
Wir nehmen ein $x_0 \in \Omega$. Es existiert eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ mit $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega$.

Wir betrachten einen beliebigen Zahlenvektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ und Funktionen (siehe Grafik 2)

$$\Phi_{\vec{k}}(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Psi_{\vec{k}}(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei c_ε Normierungskonstanten sind.



Grafik 2 Hutfunktion $e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}}$

Die Funktionen $\Phi_{\vec{k}}$ und $\Psi_{\vec{k}}$ befinden sich in $C_0^\infty(\Omega)$.

Es gilt:

$$\int_{\Omega} f(x) \Phi_{\vec{k}}(x) \, dx = \int_{K_\varepsilon(x_0)} f(x) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} \cos\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \, dx = \left(f w_\varepsilon, \cos\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \right)_{L^2(K_\varepsilon(x_0))} = 0, \quad (1.5)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \Psi_{\vec{k}}(x) \, dx = \int_{K_\varepsilon(x_0)} f(x) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} \sin\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \, dx = \left(f w_\varepsilon, \sin\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \right)_{L^2(K_\varepsilon(x_0))} = 0, \quad (1.6)$$

wobei $w_\varepsilon = c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}}$ gesetzt wurde.

Die Relationen (1.5) und (1.6) besagen, dass die Fourierkoeffizienten von $f w_\varepsilon$ verschwinden. Daher ist $f = 0$ fast überall in $K_\varepsilon(x_0)$ [12, Theorem 7.26, S. 257]. Der Punkt x_0 ist jedoch beliebig aus Ω , woraus $f(x) = 0$ fast überall in Ω folgt. ■

Zur Erinnerung: Betrachten wir das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann kann bezüglich des Systems $\cos\left(\frac{n\pi}{\varepsilon}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{\varepsilon}x\right)$ ($k = n\pi$) die Fourierentwicklung durchgeführt werden. Entsprechende Überlegungen sind für mehrere Variablen möglich.

Weitere Beweise dieses Lemmas finden sich in [22, S. 90], [11, Th. 1.4.2, S. 10] oder in der obigen Form in [26, S. 72].

Wir beweisen noch eine Variante des Lemmas 1 für stetige vektorwertige Funktionen $\vec{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\vec{g} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$, d.h. $\vec{f}: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n, \vec{g}: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Lemma 2 (Fundamental-Lemma der Variationsrechnung)

Sei Ω ein beschränktes, genügend glatt berandetes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$ und Γ eine Teilmenge von $\partial\Omega$, so dass $\partial\Omega \setminus \Gamma$ offen ist. Weiterhin sei $\vec{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\vec{g} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Falls

$$\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\sigma = 0 \quad \forall \vec{v} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \vec{v}|_{\Gamma} = 0, \quad (1.7)$$

dann ist $\vec{f}(x) = 0$ für $x \in \Omega$ und $\vec{g}(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$.

Beweis

Wir nehmen an, dass ein Punkt $x_0 \in \Omega$ existiert, so dass $f(x_0) \neq 0$ ist. Wir wählen eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ auf der $\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) > 0$ ist. Weiterhin wählen wir eine spezielle Funktion $v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, nämlich $\vec{v} = w_\varepsilon(x) \vec{f}(x_0)$. Hierbei ist:

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} e e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } x \in K_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bemerken, dass $w_\varepsilon(x_0) = e e^{-1} = 1$, $w_\varepsilon(x)|_{\partial K_\varepsilon(x_0)} = e e^{-\infty} = 0$ und $w_\varepsilon(x) \geq 0$ ist.

Für dieses \vec{v} ist

$$\int_{\Omega} \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, d\sigma = \int_{K_\varepsilon(x_0)} \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, dx > 0.$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme (1.7) erhalten und es muss $\vec{f}(x) \equiv 0$ in Ω sein.

Die Relation (1.7) lautet jetzt:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\sigma = 0 \quad \forall \vec{v} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \vec{v}|_{\Gamma} = 0. \tag{1.8}$$

Sei $x_1 \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ und $g(x_1) \neq 0$. Wir gehen wie oben vor und wählen eine Kugel $K_\varepsilon(x_1)$ mit $K_\varepsilon(x_1) \cap \Gamma = \emptyset$ und $\vec{g}(x) \cdot \vec{g}(x_1) > 0$ auf $K_\varepsilon(x_1) \cap \partial\Omega$. Wir betrachten die vektorwertige Funktion $\vec{v}(x) = w_\varepsilon(x) \vec{g}(x_1)$ aus dem Raum der Testfunktionen.

Es ist:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\sigma = \int_{K_\varepsilon(x_1) \cap \partial\Omega} w_\varepsilon(x) \vec{g}(x_1) \cdot \vec{g}(x) \, d\sigma > 0.$$

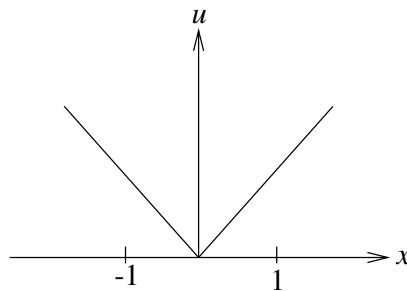
Das ist ein Widerspruch zu (1.8) und es folgt $\vec{g}(x) = 0$ auf $\partial\Omega \setminus \Gamma$. ■

Folgerung aus Lemma 1

Schwache Ableitungen sind in $L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig definiert und stimmen mit den klassischen Ableitungen überein, falls diese existieren.

Beispiel für eine schwache Ableitung

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$; siehe Grafik 3.



Grafik 3

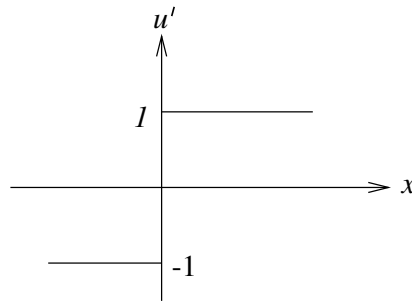
Wir berechnen die schwache Ableitung u' . Dazu betrachten wir die Definitionsgleichung

$$\int_{-1}^{+1} uv' \, dx = - \int_{-1}^{+1} wv \, dx \quad \text{für alle } v \in C_0^1((-1, +1)).$$

Für $u = |x|$ und nach partieller Integration über den Teilintervallen $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |x|v' \, dx &= - \int_{-1}^0 xv' \, dx + \int_0^1 xv' \, dx = \int_{-1}^0 v \, dx - \int_0^1 v \, dx \\ &= - \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)v \, dx = - \int_{-1}^{+1} wv \, dx. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Du Bois–Reymond folgt, dass $u'(x) = w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ist.



Grafik 4

Die zweite Ableitung von $u(x) = |x|$ (beziehungsweise die erste Ableitung von $\operatorname{sgn}(x)$) ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)v' \, dx &= - \int_{-1}^0 v' \, dx + \int_0^1 v' \, dx = -v(0) + \underbrace{v(-1)}_{=0} + \underbrace{v(1)}_{=0} - v(0) \\ &= -2v(0) \quad \forall v \in C_0^1((-1, +1)). \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Frage, ob es eine integrierbare Funktion $w \in L(-1, +1)$ gibt, so dass $2v(0) = \int_{-1}^{+1} w(x)v(x) \, dx$ ist. Wir nehmen an, dass es ein solches $w \in L(-1, +1)$ gibt und betrachten eine beliebige Funktion $v \in C_0^1((-1, +1))$. Da sich auch xv in $C_0^1((-1, +1))$ befindet, muss gelten:

$$\int_{-1}^1 w(x)xv(x) \, dx = 2v(0) \cdot 0 = 0.$$

Aus dem Lemma von Du Bois–Reymond folgt, dass $w(x)x = 0$ fast überall ist und daher $w(x) = 0$ fast überall folgt. Damit wäre

$$\int_{-1}^1 w(x)v(x) \, dx = 0 = 2v(0)$$

für alle $v \in C_0^1((-1, +1))$, was nicht sein kann.

Folgerung

Sprungfunktionen besitzen keine schwachen Ableitungen. Die Einführung eines allgemeineren Ableitungsbegriffs erweist sich als notwendig.

Übungsaufgaben

Ü1 Im Quadrat $\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ sei die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < x < 0, \quad -1 < y < 1, \\ -1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \quad -1 < y < 1 \end{cases}$$

gegeben. Existieren die schwachen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$?

Ü2 Wir betrachten das Intervall (a_1, a_5) mit der Zerlegung $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Auf diesem Intervall sei eine *Hutfunktion* u definiert; das heißt u ist eine stückweise lineare Funktion, so dass $u(a_1) = u(a_2) = u(a_4) = u(a_5) = 0$, $u(a_3) = 1$ ist. Man berechne die schwache Ableitung.

1.2 Der Raum der Testfunktionen \mathcal{D}

Es sei Ω eine nichtleere offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ; K sei eine kompakte Teilmenge von Ω . Wir bezeichnen mit $C_K^\infty(\Omega)$ die Menge der Funktionen, die in Ω beliebig oft differenzierbar sind und deren Träger sich in K befinden. In $C_K^\infty(\Omega)$ wird ein abzählbares System von Normen eingeführt:

$$\|v\|_{K,j} = \sup\{|D^\alpha v(x)| : x \in K, |\alpha| \leq j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist.

Definition 2

Die Menge

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} C_K^\infty(\Omega)$$

ist der lineare Raum (über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen) aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Es ist $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, versehen mit der induktiven Limes „Topologie“, die durch die Topologien in $C_K^\infty(\Omega)$ erzeugt wird (vgl. [2, Kapitel 1]) bzw. $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, versehen mit folgendem Konvergenzbegriff: Eine Folge (v_i) von Elementen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann zum Nullelement, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, so dass $\text{supp } v_i \subset K$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist.
2. $D^\alpha v_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$, gleichmäßig in K , für alle Multiindizes α .

$\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein lokal konvexer Raum, aber nicht metrisierbar, das heißt, es gibt keine Metrik ρ , so dass $\rho(v_i, 0) \rightarrow 0$, für $i \rightarrow \infty$, äquivalent zu 2. wäre.

In $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein System von Normen definierbar:

$$\|v\|_j = \sup\{|D^\alpha v(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq j\}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (1.10)$$

Wir bemerken, wenn $v \in C_K^\infty(\Omega)$ ist, dann ist $\|v\|_j = \|v\|_{j,K}$.

Bemerkung

$\mathcal{D}(\Omega)$ wird auch als Raum der Test- bzw. Grundfunktionen bezeichnet. Dieser Begriff stammt aus der Variationsformulierung bzw. schwachen Formulierung von Differentialgleichungen und steht in engem Zusammenhang mit der Definition der schwachen Ableitungen; siehe (1.4).

Ein klassisches Beispiel für eine Testfunktion ist die Hutfunktion

$$v(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Durch Multiplikation mit einer Konstanten c kann erreicht werden, dass für $\hat{v}(x) = cv(x)$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x) \, dx = \int_{|x| \leq 1} \hat{v}(x) \, dx = 1 \quad (1.12)$$

ist.

Weitere Testfunktionen können durch Faltungen von \hat{v} mit integrierbaren Funktionen mit kompakten Trägern gewonnen werden.

Satz 1

Es sei u eine integrierbare Funktion, deren Träger eine kompakte Teilmenge K aus Ω ist. Die Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - t) \hat{v}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau) \hat{v}\left(\frac{x - \tau}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} d\tau, \quad (1.13)$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, befindet sich in $C_0^\infty(\Omega)$ für eine positive reelle Zahl ε mit $\varepsilon < \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \delta$ (für $\Omega = \mathbb{R}^n$ entfällt diese Bedingung). Ist u stetig, dann konvergiert u_ε gegen u gleichmäßig für $\varepsilon \rightarrow 0$. Ist $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, dann konvergiert u_ε gegen u in der L_p -Norm.

Beweis

Da \hat{v} sich in $C_0^\infty(\Omega)$ befindet, folgt aus (1.13), dass $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$ ist. Deshalb müssen wir nur noch zeigen, dass sich der Träger von u_ε in einer kompakten Menge K' befindet.

Für Punkte $x - \varepsilon y \notin K$ gilt, dass $u(x - \varepsilon y) = 0$ und damit $u_\varepsilon(x) = 0$ ist. Betrachten wir einen festen Punkt x , für den $u_\varepsilon(x) \neq 0$ ist, dann muss $x - \varepsilon y \in K$ für ein y , $|y| \leq 1$, sein. Daher befindet sich der Träger von $u_\varepsilon(x)$ in einer Menge K' , deren Abstand von K höchstens gleich ε ist und daher ebenfalls eine kompakte Menge darstellt.

Da $\varepsilon < \delta$ ist, befindet sich K' in Ω .

Wir nehmen nun an, dass u stetig ist. Da $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v} dy = 1$ ist, gilt:

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [u(x - \varepsilon y) - u(x)] \hat{v}(y) dy.$$

Der Ausdruck $u(x - \varepsilon y) - u(x)$ konvergiert über einer kompakten Menge gleichmäßig gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$, woraus die Behauptung folgt.

Wir zeigen nun, dass

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)| \hat{v}(y) dy \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u(x - \varepsilon y) - u(x)\|_{L_p(K_1(0))} \|\hat{v}(y)\|_{L_q(K_1(0))} \\ &= \left(\int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{K_1(0)} |\hat{v}(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $p > 1$ ist.

Daher folgt

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p &\leq \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \, dy \left(\int_{K_1(0)} \hat{v}(y)^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= C \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \, dy, \end{aligned} \quad (1.14)$$

wobei

$$C = \left(\int_{K_1(0)} \hat{v}(y)^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}}$$

ist. Die Ungleichung (1.14) gilt auch im Fall $p = 1$, falls

$$C = \max_{y \in K_1(0)} \hat{v}(y)$$

gewählt wird.

Integration der Ungleichung (1.14) über Ω liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p \, dx &\leq C \int_{\Omega} \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \, dy \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} C \int_{K_1(0)} \int_{\Omega} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Da u beschränkten Träger besitzt, ist nach dem Satz über die mittlere Stetigkeit des inneren Integrals [14, S. 70, Theorem 2.4.2]

$$\int_{\Omega} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p \, dx < \varepsilon' \quad \text{für } |\varepsilon y| < \delta.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung

Ist Ω beschränkt, dann folgt aus dem obigen Beweis, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ ist. Dies gilt auch für unbeschränkte Gebiete.

Lemma 3

Sei Ω ein Gebiet aus dem \mathbb{R}^n . Der lineare Raum C_0^∞ ist dicht in $L_p(\Omega)$.

Beweis

Wir betrachten ein Element $u \in L_p(\Omega)$. Da u absolut integrierbar ist, existiert zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $u_K \in L_p(\Omega)$ mit beschränktem Träger $K = K(\varepsilon')$, so dass

$$\|u - u_K\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

ist. Nach Satz 1 konvergiert $u_{K,\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} u_K(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) \, dy$ in der $L_p(\Omega)$ -Norm zu u_K , d.h.

$$\|u_{K,\varepsilon} - u_K\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

für genügend kleines ε .

Die Funktion $u_{K,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega)$ approximiert u auch in $L_p(\Omega)$. Zu jedem $\varepsilon' > 0$ existiert nämlich ein ε und ein $K = K(\varepsilon')$, so dass

$$\|u - u_{K,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u - u_K\|_{L_p(\Omega)} + \|u_K - u_{K,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'. \quad \blacksquare$$

Satz 2

Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gibt es eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf K ist.

Beweis

Wir betrachten eine abgeschlossene δ -Umgebung K_δ von K , die in Ω enthalten ist:

$$K_\delta = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Zur Umgebung $K_{\frac{\delta}{2}}$ (siehe Grafik 5) betrachten wir die charakteristische Funktion

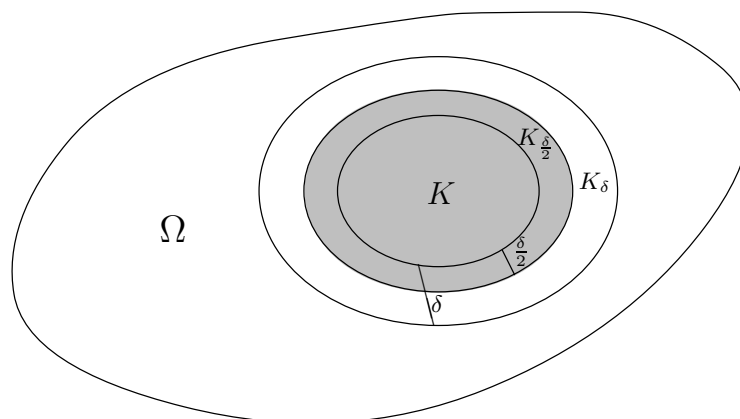
$$u = \begin{cases} 1 & \text{auf } K_{\frac{\delta}{2}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass

$$\eta(x) = u_\varepsilon(x) = \int_{K_1(0)} u(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) \, dy$$

die gewünschte Funktion ist, falls $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ gewählt wird. Es ist $u(x - \varepsilon y) = 1$, falls $x - \varepsilon y \in K_{\frac{\delta}{2}}$ ist. Dies ist sicherlich für $x \in K$ und $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ erfüllt.

Damit ist $\eta(x) \equiv 1$ auf K . Weiterhin ist $0 \leq \eta(x) \leq 1, \eta(x) \equiv 0$ für $x \notin K_\delta$ und $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.



Grafik 5 Umgebungen von K



1.3 Der Raum der Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$

Definition 3

Der lineare Raum aller über dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ definierten stetigen linearen Funktionale ist der Raum der verallgemeinerten Funktionen bzw. Distributionen und wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Kurz: Eine Distribution F über Ω ist ein stetiges lineares Funktional über $\mathcal{D}(\Omega)$.

Erläuterung

1. F ist ein Funktional. $Fv = (F, v) = F(v) = \langle F, v \rangle$ ist für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine reelle (komplexe) Zahl; ($\mathcal{D}(\Omega)$ ist im Allgemeinen ein linearer Raum über dem Körper der komplexen Zahlen und enthält komplexwertige Testfunktionen).
2. F ist linear, das heißt $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 Fv_1 + \lambda_2 Fv_2$.
3. F ist stetig: $v_k \rightarrow v$ in $\mathcal{D} \Rightarrow Fv_k \rightarrow Fv$ für $k \rightarrow \infty$.

Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein linearer Raum:

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)v := \lambda_1 F_1 v + \lambda_2 F_2 v.$$

Damit befindet sich $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Im Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ wird ein Konvergenzbegriff eingeführt.

Definition 4

Die Folge von Distributionen F_k konvergiert zur Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, falls

$$F_k v \rightarrow Fv \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Satz 3

Ein lineares Funktional F über $\mathcal{D}(\Omega)$ ist eine Distribution genau dann, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ eine Zahl $m = m(K)$, $m \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante M_K existieren, so dass

$$|Fv| \leq M_K \|v\|_{K,m} \quad \forall v \in C_K^\infty(\Omega) \quad (1.15)$$

ist.

Beweis

- a) Es gelte (1.15). Wir betrachten eine konvergente Folge $(v_i)_i$, $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$. Die Elemente dieser Folge sowie ihr Grenzwert befinden sich in $C_K^\infty(\Omega)$, wobei K eine kompakte Teilmenge von Ω ist. Daher ist

$$|F(v_i - v)| \leq M_K \|v - v_i\|_{K,m}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $i \rightarrow \infty$ zu Null für alle m . Daher ist F stetig.

- b) F sei stetig. Wir betrachten eine beliebige kompakte Teilmenge K aus Ω . Wir zeigen, dass die Beschränktheitsrelation (1.15) gilt. Sei

$$\mathcal{D}_K^\infty(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}^\infty(\Omega), \text{supp } v \subset K\},$$

versehen mit dem System der Normen (1.9). Weiterhin sei

$$N_K^\infty(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega) : Fv = 0\},$$

d.h. $N_K^\infty(\Omega)$ ist der Nullraum von F in $\mathcal{D}_K^\infty(\Omega)$. Da F stetig auf $\mathcal{D}_K^\infty(\Omega)$ ist, muss der Nullraum $N_K^\infty(\Omega)$ abgeschlossen sein. Folglich ist $\mathcal{D}_K^\infty(\Omega) \setminus N_K^\infty(\Omega)$ offen. Falls F nicht das Nullelement ist, gibt es ein

$$v_0 \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega) \setminus N_K^\infty(\Omega)$$

mit $|F(v_0)| = 1$ und eine kugelartige Umgebung $U(0)$ der Null aus $\mathcal{D}_K^\infty(\Omega)$, so dass

$$v_0 + U(0) \subset \mathcal{D}_K^\infty(\Omega) \setminus N_K^\infty(\Omega)$$

ist. Wir zeigen, dass $|F(w)| < 1$ für alle $w \in U(0)$ sein muss. Sei $w_0 \in U(0)$ mit $|F(w_0)| \geq 1$. Dann ist $w_1 = \frac{-w_0}{F(w_0)}$ auch aus $U(0)$, da

$$\|w_1\|_m = \frac{1}{|F(w_0)|} \|w_0\|_m \leq \|w_0\|_m$$

für alle m ist.

Es gilt $F(v_0 + w_1) = 1 - 1 = 0$, was nicht sein kann, da $\{v_0 + U(0)\} \cap N_K^\infty(\Omega) = \emptyset$. Folglich ist $|F(w)| < 1$ für alle $w \in U(0)$.

Betrachten wir ein beliebiges $v \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$, so finden wir ein m und eine Konstante C_K , so dass

$$w = \frac{v}{C_K \|v\|_{K,m}} \in U(0)$$

ist, d.h.

$$|F(w)| = \frac{|F(v)|}{C_K \|v\|_{K,m}} < 1$$

ist. Damit gilt:

$$|F(v)| \leq C_K \|v\|_{K,m} \quad \forall v \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega). \quad \blacksquare$$

Definition 5

Falls m unabhängig von K gewählt werden kann, dann spricht man von Distributionen endlicher Ordnung. Die kleinste Zahl m , für die (1.15) für alle K gilt, heißt Ordnung von F in Ω .

Im anderen Fall spricht man von Distributionen unendlicher Ordnung.

Beispiele für Distributionen:

1) Ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, dann ist das lineare Funktional F_f , definiert durch

$$F_f v = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

eine Distribution 0. Ordnung. Es gilt nämlich für $v \in C_K^\infty(\Omega)$:

$$|F_f v| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \right| = \left| \int_K f(x)v(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in K} |v(x)| \int_K |f(x)| \, dx = \|v\|_{K,0} \cdot M_K.$$

2) Ist $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, dann ist das lineare Funktional

$$F_f^\alpha v = \int_{\Omega} f(x)D^\alpha v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution höchstens $|\alpha|$ -ter Ordnung. Für $v \in C_K^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} |F_f^\alpha v| &= \left| \int_{\Omega} f(x)D^\alpha v(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in K} |D^\alpha v(x)| \int_K |f(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{\substack{|\beta| \leq |\alpha| \\ x \in K}} |D^\beta v(x)| \int_K |f(x)| \, dx = \|v\|_{K,|\alpha|} M_K. \end{aligned}$$

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in \Omega$ ein fester Punkt. Die Dirac-Distribution δ_ξ ist durch

$$Fv = \langle \delta_\xi, v \rangle = v(\xi) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. F ist ein lineares stetiges Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ von der Ordnung 0:

$$|\langle \delta_\xi, v \rangle| = |v(\xi)| \leq \|v\|_0.$$

F ist nicht durch eine integrierbare Funktion darstellbar, d.h. nicht regulär (siehe Definition 6 auf folgender Seite). Dies wurde bereits für den eindimensionalen Fall für δ_0 am Ende des Abschnitts 1.1 gezeigt. Ersetzen wir die dort genutzte Multiplikation mit x durch die Multiplikation mit $(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdots (x_n - \xi_n)$, erhalten wir analog die Behauptung.

4) Wir betrachten die Dirac-Distribution auf Oberflächen:

Sei S eine Oberfläche im \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$. Wir definieren für eine auf S lokal integrierbare Funktion f :

$$\begin{aligned} F(v) &= F_f(v) = \int_S f v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \\ |F(v)| &\leq \int_S |f v| \, d\sigma \leq \int_S |f| \, d\sigma \sup_{x \in S} |v(x)| \leq \int_S |f| \, d\sigma \|v(x)\|_{K,0}. \end{aligned}$$

F_f kann als Maß im \mathbb{R}^n , konzentriert auf S , mit der Dichte f interpretiert werden.

5) Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $|f(x)| \leq c|x|^{-m}$ für $|x| \leq 1$, wobei $m \in \mathbb{N}$ und c eine positive Konstante ist.

Es gibt eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ der Ordnung $\leq m$, so dass $F = F_f$ über $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist.

Es sei $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Die Funktion v hat kompakten Träger, das heißt, es gibt ein $a > 0$, so dass $v(x) = 0$ für $|x| > a$ ist. Wir betrachten die Taylorentwicklung:

$$v(x) = v(0) + xv'(0) + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}v^{(m-1)}(0) + \frac{x^m}{m!}v^{(m)}(tx), \quad t \in (0, 1).$$

Wir betrachten folgende Distribution F :

$$\begin{aligned} Fv &= \int_{|x|>1} f(x)v(x) \, dx + \int_{|x|\leq 1} f(x) \left[v(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}v^{(k)}(0) \right] \, dx \\ &= \int_{|x|>1} f(x)v(x) \, dx + \int_{|x|\leq 1} f(x) \frac{x^m}{m!}v^{(m)}(tx) \, dx. \end{aligned}$$

Es ist:

$$|Fv| \leq \|v\|_0 \int_{1<|x|<a} f(x) \, dx + \int_{|x|\leq 1} \frac{c}{m!} |v^{(m)}(tx)| \, dx \leq A\|v\|_0 + B\|v\|_m.$$

Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist $v^{(k)}(0) = 0$ für alle k und daher $Fv = \langle f, v \rangle$. F ist eine Fortsetzung der Funktion $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und wird auch als Regularisierung von f bezeichnet.

In diesen Beispielen wurden einerseits Distributionen betrachtet, die mit lokal integrierbaren Funktionen identifizierbar sind und andererseits traten Distributionen auf, die nicht durch lokal integrierbare Funktionen erzeugt werden.

Wir unterscheiden zwischen diesen beiden Typen von Distributionen.

Definition 6

Eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist regulär, wenn es eine lokal integrierbare Funktion f über Ω gibt, so dass

$$Fv = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ist. Ist dies nicht der Fall, so nennt man die Distribution singulär.

Die Distribution in Beispiel 4 ist singulär.

Träger einer Distribution

Es ist im Allgemeinen nicht sinnvoll, den Wert einer Distribution in einem beliebigen Punkt aus Ω zu definieren, jedoch können wir sagen, wann eine Distribution in einer offenen Teilmenge von Ω verschwindet.

Definition 7

Es sei $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω_0 eine offene Teilmenge von Ω .

$$F = 0 \text{ auf } \Omega_0 \iff Fv = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_0).$$

Definition 8

Der Träger einer Distribution ist definiert durch

$$\text{supp } F = \{\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \text{ wobei } \Omega \text{ die größte offene Menge mit } F = 0 \text{ ist}\},$$

oder

$$\text{supp } F = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{es gibt keine offene Umgebung } U(x), \text{ auf der } F = 0 \text{ ist}\}.$$

Es gilt $Fv = 0$ für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } F \cap \text{supp } v = \emptyset$.

Übungsaufgaben

Ü3 Beweisen Sie, dass für ein $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die folgende Relation gilt:

$$\forall K \text{ kompakt, } K \subset \Omega, \exists C = C(K) > 0, \exists k = k(K) \in \mathbb{N}:$$

$$|(F, v)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha v(x)| \quad \forall v \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega).$$

Hinweis: Man zeige indirekt, dass die Behauptung gilt, indem man eine Folge $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ konstruiert, für die die Ungleichung

$$\text{erfüllt ist.} \quad |(F, v_j)| \geq j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |D^\alpha v_j(x)|$$

Ü4 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(F, v) := \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(n) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

eine Distribution unendlicher Ordnung definiert.

Hinweis: Betrachten Sie, unter der Annahme F sei von der Ordnung k , die Folge $\{v_\epsilon\}$ mit $v_\epsilon = v\left(\frac{x-k-1}{\epsilon}\right)$, wobei $v \in \mathcal{D}([-1, 1])$ ist.

Differentiation von Distributionen**Definition 9**

Die α -te Ableitung einer Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Funktional $D^\alpha F$, das durch

$$\langle D^\alpha F, v \rangle = D^\alpha F(v) = D^\alpha Fv := (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ definiert ist.

$D^\alpha F$ befindet sich in $\mathcal{D}'(\Omega)$, da folgende Eigenschaften gelten:

- $D^\alpha F$ ist linear, da

$$\langle D^\alpha F, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \rangle = (-1)^{|\alpha|} (\lambda_1 \langle F, D^\alpha v_1 \rangle + \lambda_2 \langle F, D^\alpha v_2 \rangle).$$
- $D^\alpha F$ ist stetig.

Aus $v_k \xrightarrow{\mathcal{D}} v$ folgt $D^\alpha v_k \xrightarrow{\mathcal{D}} D^\alpha v$ für alle α und für $k \rightarrow \infty$.
Daher gilt $\langle D^\alpha F, v_k \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v_k \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v \rangle = \langle D^\alpha F, v \rangle$.

Folgerungen

- Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar.
- Das Ergebnis der Differentiation ist nicht von der Differentiationsreihenfolge abhängig:

$$D^\alpha D^\beta F = D^\beta D^\alpha F.$$

- Ist $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$, dann ist aF durch die Relation

$$\langle aF, v \rangle = \langle F, av \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. aF befindet sich in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Die Leibniz'sche Regel gilt:

$$D^\alpha(aF) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta a D^{\alpha - \beta} F,$$

mit $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.

Bemerkungen

- In [23] ist gezeigt, dass eine assoziative Multiplikation von zwei beliebigen Distributionen nicht definiert werden kann.
- Ist $F = 0$ in Ω , so ist auch $D^\alpha F = 0$ in Ω , das heißt $\text{supp } D^\alpha F \subset \text{supp } F$.
- Konvergiert $F_k \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} F$, dann konvergiert $D^\alpha F_k \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha F$ für $k \rightarrow \infty$, das heißt, konvergente Distributionenfolgen/-reihen können beliebig oft differenziert werden.

Beispiele

- Ableitungen der Dirac-Distribution:

$$\langle D^\alpha \delta_\xi, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_\xi, D^\alpha v \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(\xi).$$

- Ableitung von $\ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^1$:

$\ln|x|$ ist lokal integrierbar, jedoch ist die klassische Ableitung $\frac{dy}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ nicht unmittelbar mit einer Distribution aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ identifizierbar (siehe 5. Beispiel, S.21).

Wir berechnen die Ableitung im Sinne der Distributionentheorie:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dy}{dx} \ln|x|, v(x) \right\rangle &= -\langle \ln|x|, v'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| v'(x) \, dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x| v'(x) \, dx - \int_{|x| < \varepsilon} \ln|x| v'(x) \, dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln|x| v'(x) \, dx \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\ln|x| v(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \ln|x| v(x) \Big|_{\varepsilon}^{\infty} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) \, dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon [v(\varepsilon) - v(-\varepsilon)] + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) \, dx \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) \, dx = pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} v(x) \, dx =: \left\langle P \frac{1}{x}, v(x) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass für kleine ε

$$\begin{aligned}
v(\varepsilon) &= v(0) + \varepsilon v'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(\xi), \\
v(-\varepsilon) &= v(0) - \varepsilon v'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(\eta)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

ist.

pv bezeichnet dabei den Cauchy'schen Hauptwert. $P \frac{1}{x}$ heißt Hadamard'sche Regularisierung oder kanonische Fortsetzung von $\frac{1}{x}$.

$P \frac{1}{x}$ ist aus $\mathcal{D}'(\Omega)$, da

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle P \frac{1}{x}, v \right\rangle \right| &= \left| pv \int_{-a}^a \frac{v(x)}{x} \, dx \right| = \left| pv \int_{-a}^a \frac{v(0) + xv'(\xi(x))}{x} \, dx \right| \\
&= \left| \int_{-a}^a v'(\xi(x)) \, dx \right| \leq 2a \max_{x \in \mathbb{R}} |v'(x)| \leq 2a \|v\|_1
\end{aligned}$$

ist. Damit folgt:

$$\frac{dy}{dx} \ln |x| = P \frac{1}{x}. \tag{1.17}$$

Weiterhin gilt $\langle P \frac{1}{x}, v \rangle = \int_{-a}^a v'(\xi(x)) \, dx = \int_{-a}^a \frac{v(x) - v(0)}{x} \, dx$ und $P \frac{1}{x}$ stimmt daher mit der im Beispiel 5 eingeführten Regularisierung überein.

- Ableitung von $P \frac{1}{x}$:

Wir zeigen, dass $\left\langle \frac{dy}{dx} P \frac{1}{x}, v \right\rangle = -\langle P \frac{1}{x}, v'(x) \rangle = -pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist.

Es ist

$$\begin{aligned}
pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} \, dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} \, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} \, dx \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} v'(x) \, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} v'(x) \, dx - \left[\frac{1}{x} (v(x) - v(0)) \right]_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \right] \\
&= pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} v'(x) \, dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [v(-\varepsilon) - v(0) + v(\varepsilon) - v(0)] \right\} \\
&\stackrel{(1.16)}{=} pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} v'(x) \, dx,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

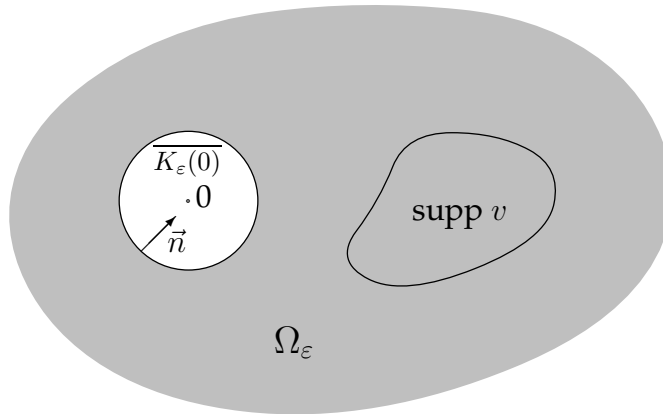
- Berechnung der Distributionenableitung

$$\Delta \ln |x| = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \ln |x| + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ln |x| \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Aus der Definition folgt, dass

$$\begin{aligned} \langle \Delta \ln |x|, v \rangle &= \langle \ln |x|, \Delta v \rangle \quad \text{für } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx. \end{aligned}$$

Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$, so dass $\text{supp } v \cup \overline{K_\varepsilon(0)} \subset \Omega$ und $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(0)}$ (siehe Grafik 6).



Grafik 6 Das Gebiet Ω_ε

Die 2. Greensche Formel liefert:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \ln |x| v(x) \, dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(\ln |x| \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln |x| \right) \, ds.$$

Da v und $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf $\partial \Omega$ verschwinden, erhalten wir

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_{|x| \geq \varepsilon} \Delta \ln |x| v(x) \, dx + \int_{|x|=\varepsilon} \left(\ln |x| \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln |x| \right) \, ds.$$

Setzen wir $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, dann ist $\partial_n = -\partial_r$ auf dem Rand $r = \varepsilon$ und damit (wegen $\Delta \ln |x| = 0$ für $|x| \geq \varepsilon$)

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_0^{2\pi} \left[-\ln \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} v(r, \varphi)|_{\varepsilon=r} + v(\varepsilon, \varphi) \frac{1}{\varepsilon} \right] \varepsilon \, dt \, m \varphi.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} v(\varepsilon, \varphi) \, d\varphi = v(0)2\pi$$

und

$$\Delta \ln |x| = 2\pi \delta_0 \quad (1.18)$$

ist.

- Distributionenableitung $\Delta \frac{1}{|x|}$:

Analog zum vorigen Beispiel erhält man in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta_0 \quad (1.19)$$

(vgl. [2, Example 2.15, S. 44]).

- Lösen der Gleichung $x^m u = 0$:

Wir lösen die Gleichung $x^m u = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. In $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ existiert nur die Lösung $u = 0$ fast überall. Wir zeigen, dass $u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_0^{(k)}(x)$ eine Lösung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\langle x^m \delta_0^{(k)}, v \rangle = \langle \delta_0^{(k)}, x^m v \rangle = (-1)^k \langle \delta_0, D^k(x^m v) \rangle = (-1)^k (x^m v)^{(k)}|_{x=0} = 0$$

für $k \leq m - 1$ und für beliebige Elemente $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Es gilt allgemeiner: Jede verallgemeinerte Funktion, deren Träger ein Punkt ist, kann als Linearkombination der entsprechenden Delta-Distribution und ihrer Ableitungen dargestellt werden [2, Th.3.2, S. 76–78].

Übungsaufgaben

- Ü5 Man berechne die Distributionenableitung von

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^\lambda & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Hierbei ist $-1 < \lambda < 0$.

- Ü6 Man bestimme Distributionenlösungen folgender Differentialgleichungen:

- $xu' = 1$,
- $u'' + au' + b = \delta_0$.

- Ü7 Man berechne folgende Distributionenableitung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta \frac{1}{|x|} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \frac{1}{|x|}.$$

Tensorprodukt und Faltung

Wir beginnen mit dem Tensorprodukt. Wir erinnern zunächst an die Definition des Tensorproduktes zweier Funktionen.

Es seien $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Als Produktmenge bezeichnen wir die Menge

$$\Omega_n \times \Omega_m = \{(x, y) : x \in \Omega_n, y \in \Omega_m\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Für Funktionen $f \in L^1_{loc}(\Omega_n)$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega_m)$ ist das direkte Produkt (Tensorprodukt) durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y) = g(y)f(x) =: (g \otimes f)(x, y)$$

definiert und es gilt folgende Relation für $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x)g(y)v(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^m} g(y)v(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x, y) \, dx \right] dy \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Tensorprodukt von Distributionen

Mit Hilfe der zugeordneten regulären Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und $G \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$ kann (1.20) geschrieben werden als

$$\langle F \otimes G, v \rangle = \langle F, G(v) \rangle = \langle G, F(v) \rangle, \quad (1.21)$$

wobei

$$G(v) = \langle G(\cdot), v(x, \cdot) \rangle = G(v)(x), \quad F(v) = \langle F(\cdot), v(\cdot, y) \rangle = F(v)(y). \quad (1.22)$$

Falls wir zeigen können, dass $G(v)(x) \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ und $F(v)(y) \in \mathcal{D}(\Omega_m)$ ist, dann ist die Relation (1.21) als Definition für das Tensorprodukt zweier Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$ korrekt.

Satz 4

Für eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und eine Grundfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ gilt, dass $\langle F, v \rangle(y)$ aus $\mathcal{D}(\Omega_m)$ ist. Dabei ist:

$$D_y^\beta \langle F, v \rangle(y) = \langle F, D_y^\beta v \rangle(y).$$

Beweis

Die Funktion $\langle F, v \rangle(y) = \langle F(\cdot), v(\cdot, y) \rangle$ hat beschränkten Träger, da $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist. Bezeichnen wir mit e_i den i -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^m , dann gilt

$$\frac{\langle F, v \rangle(y + he_i) - \langle F, v \rangle(y)}{h} = \left\langle F(\cdot), \frac{v(\cdot, y + he_i) - v(\cdot, y)}{h} \right\rangle \quad (1.23)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle F, v \rangle(y + he_i) - \langle F, v \rangle(y)}{h} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \langle F, v \rangle(y) \\ &= \left\langle F(\cdot), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(\cdot, y + he_i) - v(\cdot, y)}{h} \right\rangle = \left\langle F(\cdot), \frac{\partial}{\partial y_i} v(\cdot, y) \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial}{\partial y_i} v \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Analoge Überlegungen gelten auch für die höheren Ableitungen. Der Satz gilt auch, falls F mit G und x mit y vertauscht wird. ■

Satz 5

Es sei $F_n \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und $G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Distribution $F_n \otimes G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m)$, die durch

$$\begin{aligned} (F_n \otimes G_m)(v_n \otimes v_m) &:= F_n(v_n)G_m(v_m) & \forall v_i \in \mathcal{D}(\Omega_i), i = n, m, \\ (F_n \otimes G_m)v &:= F_n(G_m(v)) = G_m(F_n(v)) & \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m) \end{aligned}$$

definiert ist.

Beweis

Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass die lineare Hülle von $\mathcal{D}(\Omega_n) \times \mathcal{D}(\Omega_m)$ dicht in $\mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist [26, Lemma, S. 99]. Wir müssen zeigen, dass $F_n \otimes G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist.

- Die Linearität von $F_n \otimes G_m$ ist offensichtlich:
 $(F_n \otimes G_m)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (F_n \otimes G_m)v_1 + \lambda_2 (F_n \otimes G_m)v_2$ für $v_i \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$, $i = 1, 2$.
- Die Stetigkeit zeigen wir durch entsprechende Abschätzungen. Dazu betrachten wir kompakte Mengen $K_n \subset \Omega_n$ und $K_m \subset \Omega_m$. Da F_n und G_m stetig sind, existieren Konstanten M_n und M_m und nichtnegative Zahlen n_0 und m_0 , so dass

$$\begin{aligned} |F_n(v_n)| &\leq M_n |v_n|_{n_0} & \text{für alle } v_n \in \mathcal{D}(K_n) \quad \text{und} \\ |G_m(v_m)| &\leq M_m |v_m|_{m_0} & \text{für alle } v_m \in \mathcal{D}(K_m) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Zu der kompakten Menge $K = K_n \times K_m$ wählen wir eine beliebige Funktion $v \in \mathcal{D}(K)$. Nach Satz 4 ist $\langle G_m, v \rangle(\cdot) \in \mathcal{D}(K_n)$ und

$$\begin{aligned} |(F_n, \langle G_m, v \rangle(\cdot))| &\leq M_n |\langle G_m, v \rangle|_{n_0} = M_n \sup_{\substack{|\alpha| \leq n_0 \\ x \in K_n}} |\langle G_m, D_x^\alpha v \rangle(x)| \\ &\leq M_n M_m \sup_{\substack{|\alpha| \leq n_0, x \in K_n \\ |\beta| \leq m_0, y \in K_m}} \{|D_x^\alpha D_y^\beta v(x, y)|\} \\ &= M_n M_m \sup_{\substack{|\gamma| \leq n_0 + m_0 \\ (x, y) \in K}} |D^\gamma v(x, y)| \\ &= M_n M_m |v|_{n_0 + m_0}. \end{aligned}$$

Vertauschen wir die Rolle von F_n und G_m , dann erhalten wir die gleiche Abschätzung und es gilt:

$$F_n \otimes G_m = G_m \otimes F_n \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m). \quad \blacksquare$$

Lemma 4

Für die Träger der entsprechenden Funktionale gilt

$$\text{supp}(F_n \otimes G_m) = \text{supp} F_n \times \text{supp} G_m,$$

falls $\text{supp} F_n \subset \Omega_n$ und $\text{supp} G_m \subset \Omega_m$ ist.

Beweis

Betrachten wir ein $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ mit der Eigenschaft, dass $\text{supp } v \subset (\Omega_n \setminus \text{supp } F_n) \times \Omega_m$ oder $\text{supp } v \subset \Omega_n \times (\Omega_m \setminus \text{supp } G_m)$. Dann ist $(F_n \otimes G_m)v = 0$ bzw. $(G_m \otimes F_n)v = 0$.

Daher gilt zunächst:

$$\text{supp } (F_n \otimes G_m) \subset \text{supp } F_n \times \text{supp } G_m.$$

Betrachten wir Funktionen $v_n \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ und $v_m \in \mathcal{D}(\Omega_m)$, dann gilt:

$$(F_n \otimes G_m)(v_n \otimes v_m) = F_n(v_n)G_m(v_m)$$

und damit:

$$\text{supp } F_n \times \text{supp } G_m \subset \text{supp } (F_n \otimes G_m). \quad \blacksquare$$

Beispiel:

$$\text{supp } (\delta_\xi \otimes \delta_\eta) = \{(\xi, \eta)\}.$$

Wir gehen nun zur Faltung über.

Faltung

Wir erinnern zunächst an den klassischen Faltungsbegriff für Funktionen.

Seien f und g lokal integrierbare Funktionen im \mathbb{R}^n , so dass

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)f(x-y)| \, dx$$

ebenfalls lokal integrierbar ist. Die Funktion

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y) \, dx = (g * f)(x)$$

ist die Faltung der Funktionen f und g .

Die Bedingung, dass $f * g$ lokal integrierbar ist, ist in folgenden Fällen erfüllt:

- 1) Eine der Funktionen hat kompakten Träger; z.B. $\text{supp } f \subset K_{R_1}$ sei kompakt. In K_R gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_{K_R} (f * g)(x) \, dx &\leq \int_{K_R} \int_{K_{R_1}} |f(y)||g(x-y)| \, dx \, dx \\ &\leq \int_{K_{R_1}} |f(y)| \, dx \int_{K_{R+R_1}} |g(\xi)| \, d\xi < \infty. \end{aligned}$$

- 2) Die Funktionen f und g verschwinden für $x < 0$ ($n = 1$). Dann ist:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} (f * g)(x) \, dx &= \int_0^R \int_0^x f(y) \underbrace{g(x-y)}_{=0 \text{ für } x-y < 0} \, dx \, dx \\ &\leq \int_0^R |f(y)| \, dx \int_0^R |g(\xi)| \, d\xi < \infty. \end{aligned}$$

3) Die Funktionen f und g sind integrierbar im \mathbb{R}^n . Für Funktionen $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\langle f * g, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\xi) v(\xi) \, d\xi \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(\xi - y) \, dx \right] v(\xi) \, d\xi \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{g(\xi - y)}_{=x} v(\xi) \, d\xi \right] \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) v(x + y) \, dx \, dy \\ &= \langle f \otimes g, v(x + y) \rangle = \langle f, \underbrace{\langle g, v(x + y) \rangle}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n)} \rangle. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Da $v(x + y) = w(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ im Allgemeinen keinen beschränkten Träger besitzt, ist die Faltung nicht für alle Distributionen definiert:

$$\text{supp } v(x + y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : x + y \in \text{supp } v \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Besitzt jedoch f oder g beschränkten Träger, dann ist $\text{supp}(f \otimes g) \cap \text{supp } v(x + y) = (\text{supp } f \times \text{supp } g) \cap \text{supp } v(x, y)$ kompakt und (1.26) wohldefiniert.

Definition 10

Besitzt eine der Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger, dann ist die Faltung durch die Relation

$$\begin{aligned} \langle (F * G), v \rangle &= \langle F \otimes G, v(x + y) \rangle \\ &= \langle F, Gv(x + y) \rangle = \langle G, Fv(x + y) \rangle \\ &= \langle (G * F), v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \quad (1.27)$$

definiert.

Besitze G kompakten Träger. Dann ist $Gv(x + y) = \langle G, \eta v(x + y) \rangle$, wobei $\eta = \eta(y) \equiv 1$ für $y \in U(\text{supp } G)$ und $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Damit ist $\eta(y)v(x + y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ und $\langle G, \eta v(x + y) \rangle \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Die Wahl der Funktion η spielt hierbei keine Rolle. Man kann für Distributionen G mit kompaktem Träger in dieser Weise auch die Fortsetzung von G auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren.

Beispiel

Wir betrachten die Faltung von $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der δ_0 -Distribution

$$\langle \delta_0 * F, v \rangle = \langle \delta_0 \otimes F, v(x + y) \rangle = \langle F, \delta_0 v(x + y) \rangle = \langle F, v(y) \rangle = \langle F, v \rangle.$$

Für die Faltung von $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Ableitung der δ_0 -Distribution gilt:

$$\langle D^\alpha \delta_0 * F, v \rangle = \langle F, D^\alpha \delta_0 v(x + y) \rangle = \langle F, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(y) \rangle = \langle D^\alpha F, v \rangle.$$

Kurz: $D^\alpha \delta_0 * F = D^\alpha F = \delta_0 * D^\alpha F.$

Eigenschaften des distributionellen Faltungsproduktes

Falls mindestens eine der folgenden Distributionen kompakten Träger besitzt, gilt:

1) $\text{supp}(F * G) \subset \text{supp} F + \text{supp} G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + z, y \in \text{supp} F, z \in \text{supp} G\}$.
Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht. Man betrachte $F = \delta'_0, G \equiv 1$. Dann ist $\text{supp}(F * G) = \text{supp}(\delta'_0 * 1) = \text{supp}(\delta_0 * 0) = \emptyset \neq \text{supp} \delta'_0 + \text{supp} 1 = \mathbb{R}$.

2) $F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * F_2 * F_3$.

3) $D^\alpha(F * G) = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G$.

Es gilt nämlich $D^\alpha(F * G) = (D^\alpha \delta_0) * F * G = (D^\alpha \delta_0 * F) * G = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G$.

Bemerkung: Haben weder F noch G beschränkten Träger, dann gilt (3) im Allgemeinen nicht; zum Beispiel $H' * 1 = \delta_0 * 1 = 1; H * 1' = H * 0 = 0 \quad (n = 1)$.

4) Ist $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Translation τ_h von f um h durch

$$\tau_h f(x) = f(x - h) \in C(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Weiterhin gilt für Funktionen $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x) v(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) v(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x + h) \, dx;$$

kurz: $\langle \tau_h f, v \rangle = \langle f, \tau_{-h} v \rangle$.

Daher ist die Definition der Translation einer Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ durch die Relation

$$\langle \tau_h F, v \rangle := \langle F, \tau_{-h} v \rangle \tag{1.28}$$

sinnvoll.

Für $F = \delta_0$ gilt: $\langle \tau_h \delta_0, v \rangle = \langle \delta_0, \tau_{-h} v \rangle = \langle \delta_0(\cdot), v(\cdot + h) \rangle = v(h) = \langle \delta_h, v \rangle$.

Damit erhalten wir:

$$\langle \tau_h F, v \rangle = \langle F, \tau_{-h} v \rangle = \langle F, v(h + \cdot) \rangle = \langle F, \langle \delta_h(y) v(y + \cdot) \rangle \rangle = \langle \delta_h * F, v \rangle.$$

Kurz: $\tau_h F = \delta_h * F$.

Folgerung

Falls F oder G einen beschränkten Träger besitzt, ist:

$$\tau_h(F * G) = \delta_h * F * G = \tau_h F * G = F * \tau_h G.$$

Beispiel

Wir hatten gezeigt, dass $\Delta \ln|x| = \delta_0 2\pi$ im \mathbb{R}^2 ist. Die Funktion $\ln|x|$ wird auch als Fundamentallösung bezeichnet. Durch sie werden Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 2\pi f$ aufgebaut, falls die folgende Faltung und das Integral im klassischen Sinn existieren:

$$u = \ln|x| * f = \int_{\mathbb{R}^2} \ln|x - y| f(y) \, dtm y. \tag{1.29}$$

Es gilt nämlich: $\Delta u = \Delta(\ln|x| * f) = \Delta \ln|x| * f = 2\pi \delta_0 * f = 2\pi f$.

Durch (1.29) wird das „logarithmische“ Volumenintegral definiert (Faltung der Fundamentallösung mit der Dichtefunktion f).

Übungsaufgaben

- Ü8 Es sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Träger in $[-1, 1]$. Beschreiben Sie den Träger von $v(x+y) = v(x, y)$ im \mathbb{R}^2 .
- Ü9 Finde eine Folge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen auf \mathbb{R} , die die folgenden Bedingungen erfüllt:
 a) $(\delta_n)_n$ konvergiert gegen δ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und
 b) $(\delta_n(x))_n$ konvergiert fast überall gegen Null.
- Ü10 Seien S und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $S * T$ existiere. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x^k(S * T) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (x^j S) * (x^{k-j} T).$$

Lösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen

Wir betrachten eine lineare partielle Differentialgleichung der Ordnung m mit variablen Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Führen wir als Abkürzung den Differentialoperator

$$L(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein, so lautet die obige Gleichung

$$L(x, D)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ (bzw. } x \in \Omega). \quad (1.30)$$

Definition 11

Unter einer verallgemeinerten Lösung (Distributionslösung) von (1.31) im Gebiet Ω versteht man jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für die

$$\langle L(x, D)u, v \rangle = \langle u, L^*(x, D)v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ist. Durch $L^*(x, D)v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha v)$ ist der formal adjungierte Operator definiert.

Definition 12

Unter einer Fundamentallösung des Differentialoperators $L(x, D)$ im \mathbb{R}^n versteht man jede verallgemeinerte Funktion $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die der Beziehung

$$L(x, D)E = \delta_0$$

bzw. $\langle L(x, D)E, v \rangle = \langle E, L^*(x, D)v \rangle = \langle \delta_0, v \rangle = v(0)$ für alle v aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ genügt.

Bemerkungen

- Die Existenz von Fundamentallösungen für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten wurde von L. Ehrenpreis 1954 [5] bewiesen.
- Für skalare Differentialoperatoren zweiter Ordnung $L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $|\alpha|$ -mal Hölder-stetig differenzierbaren Koeffizienten a_α existiert eine Fundamentallösung [17, Theorem 19, III].
- Es gibt elliptische Operatoren höherer Ordnung mit C^∞ -Koeffizienten, für die keine Fundamentallösung existiert [19].

Wir geben dazu ein Beispiel von N. Ortner (1996) an. Es sei

$$L(x, D) = (1 - x^2)^3 \frac{dy}{dx} - 4x \tag{1.31}$$

ein gewöhnlicher linearer Differentialoperator mit polynomialen Koeffizienten. Für eine Fundamentallösung

$$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \tag{1.32}$$

müsste gelten:

$$(1 - x^2)^3 E' - 4xE = \delta. \tag{1.33}$$

Für $1 < x < \infty$ ist $E = ce^{\frac{1}{(1-x^2)^2}}$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Für $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$ ist E nur dann in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, wenn $c = 0$. Analoge Überlegungen in $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ ergeben, dass $\text{supp} E \subset \{0\}$. Da $E \neq 0$ muss $\text{supp} E = \{0\}$ sein und daher eine natürliche Zahl m existieren, so dass $E = \sum_{k=0}^m c_k \delta^{(k)}$, $c_m \neq 0$, ist. Setzen wir E in (1.33) ein, dann ergibt sich

$$(1 - x^2)^3 [c_0 \delta' + c_1 \delta'' + \dots + c_m \delta^{(m+1)}] - 4x [c_0 \delta + c_1 \delta' + \dots + c_m \delta^{(m)}] = \delta,$$

d.h.

$$[c_0 \delta' + c_1 \delta'' + \dots + c_m \delta^{(m+1)}][1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6]v(x) - [c_0 \delta + c_1 \delta' + \dots + c_m \delta^{(m)}][4xv] = v(0). \tag{1.34}$$

Für $h(x) = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$ gilt: $h(0) = 1, h'(0) = 0, h''(0) = -6, h'''(0) = 0 \dots$ und für $g(x) = 4x$ haben wir $g(0) = 0, g'(0) = 4, g^{(k)}(0) = 0$ für $k \geq 2$.

Somit ist die Relation (1.34) für alle $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ erfüllt, falls

$$-c_0 [h'v + hv'] + c_1 [h''v + 2h'v' + hv''] + \dots + (-1)^m c_m [h^{(m+1)}v + \dots + hv^{(m+1)}]_{|x=0} - c_0 [gv] + c_1 [g'v + gv'] + \dots + (-1)^{m+1} c_m [g^{(m)}v + \dots + gv^{(m)}]_{|x=0} = v(0)$$

ist. Durch Vergleich der Koeffizienten vor $v^{(k)}(0), k = 0, 1, 2, \dots, (m + 1)$, erhalten wir $(-1)^m c_m h(0)v^{(m+1)}(0) = 0$, woraus $c_m = 0$ folgt.

- Fundamentallösungen sind nicht eindeutig bestimmt:
Ist E_0 Lösung der homogenen Gleichung $L(x, D)u = 0$, dann ist $E + E_0$ ebenfalls Fundamentallösung: $L(x, D)(E + E_0) = L(x, D)E + L(x, D)E_0 = \delta_0$.
- Fundamentallösungen spielen bei der Konstruktion von Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (1.30) eine „fundamentale“ Rolle.

Hauptsatz

Die Differentialgleichung (1.30) besitze konstante Koeffizienten und die rechte Seite $f \in \mathcal{D}'$ von (1.30) besitze beschränkten Träger (bzw. $E * f$ existiere).

Dann existiert eine Distributionenlösung von $L(x, D)u = f$ der Gestalt

$$u = E * f.$$

Beweis

$$L(D)u = L(D)(E * f) = L(D)E * f = \delta_0 * f = f.$$

Beispiele für Fundamentallösungen

1) Wir betrachten einen linearen Differentialoperator im \mathbb{R}^1 :

$$L(x, D) = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0(x).$$

Ist u_0 Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L(x, D)u_0 &= 0 && \text{für } x > 0, \\ u_0(0) &= 0 \\ &\vdots \\ u_0^{(m-2)}(0) &= 0 \\ u_0^{(m-1)}(0) &= 1, \end{aligned}$$

dann ist $E(x) = H(x)u_0(x)$ eine Fundamentallösung von $L(x, D)$.

Wir überzeugen uns davon:

$$\begin{aligned} E &= Hu_0, \\ E' &= H'u_0 + Hu_0' = \delta_0 u_0 + Hu_0' = Hu_0' && \text{(im Distributionensinn)}, \\ E'' &= H'u_0' + Hu_0'' = \delta_0 u_0' + Hu_0'' = Hu_0'' && \text{(im Distributionensinn)}, \\ &\vdots \\ E^{(m)} &= H'u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)} = \delta_0 u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)} && \text{(im Distributionensinn)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \langle L(x, D)E, v \rangle &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)}, v \rangle \\ &+ \langle \quad \quad \quad Ha_{m-1}(x)u_0^{(m-1)}, v \rangle \\ &\vdots \\ &+ \langle \quad \quad \quad Ha_0(x)u_0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + HL(x, D)u_0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + 0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0, u_0^{(m-1)} v \rangle \\ &= u_0^{(m-1)}(0) v(0) \\ &= v(0). \end{aligned}$$

2) Für den Operator der Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^1

$$L(x, Dx) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + w^2, \quad w = \text{const.},$$

ist die Funktion u_0 leicht berechenbar:

$$\begin{aligned} u_0''(x) + w^2 u_0(x) &= 0, \\ u_0(0) &= 0, \\ u_0'(0) &= 1. \end{aligned}$$

$u_0 = \frac{1}{w} \sin wx$ ist die Lösung dieses Rand-Anfangswertproblems.

Damit ist $E(x) = H(x) \frac{1}{w} \sin wx$ eine Fundamentallösung.

Die Berechnung von Fundamentallösungen ist im Allgemeinen eine anspruchsvolle Aufgabe. Wir werden uns in den folgenden Kapiteln unter Anderem mit diesem Problem (Laplace-, Wärmeleitungs- und Wellenoperator) beschäftigen, indem wir die Eigenschaften der Fouriertransformation ausnutzen.

1.4 Fouriertransformation und temperierte Distributionen

Fouriertransformation von Funktionen

Es sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, das heißt, u ist absolut integrierbar im \mathbb{R}^n . Mit (\cdot, \cdot) bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Die Fouriertransformation ist durch die Relation

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.35)$$

definiert. Die Fouriertransformierte \hat{u} besitzt folgende Eigenschaften:

- \hat{u} ist beschränkt:

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1} < \infty.$$

- \hat{u} ist stetig in allen Punkten $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi_0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| dx \\ &= \int_{K_A(0)} |u(x)| |e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_A(0)} 2|u(x)| dx, \end{aligned}$$

wobei $K_A(0)$ eine Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius A ist. In $K_A(0)$ kann das erste Integral wie folgt abgeschätzt werden:

Da für ein $\tilde{\xi}$ aus einer Umgebung von ξ_0 gilt (Taylorentwicklung):

$$|e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| = |e^{i(\tilde{\xi}, x)}(x, \xi - \xi_0)| \leq |x| |\xi - \xi_0|,$$

folgt:

$$\int_{K_A(0)} |u(x)| |x| |\xi - \xi_0| dx \leq A |\xi - \xi_0| \int_{K_A(0)} |u(x)| dx < \varepsilon' \int_{K_A(0)} |u(x)| dx < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}$$

für $|\xi - \xi_0| < \frac{\varepsilon'}{A}$.

Das zweite Integral kann ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ gewählt werden, falls A genügend groß ist, da $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Somit folgt:

$$|\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } |\xi - \xi_0| < \frac{\varepsilon'}{A}.$$

- \hat{u} ist im Allgemeinen nicht aus $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wählen wir zum Beispiel

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^1$, dann ist

$$\hat{u}(\xi) = \int_0^1 e^{ix\xi} dx = \frac{1}{i\xi} e^{ix\xi} \Big|_0^1 = \frac{1}{i\xi} (e^{i\xi} - 1) = \frac{\sin \xi}{\xi} - i \frac{\cos \xi - 1}{\xi}.$$

$\hat{u}(\xi)$ wäre aus $L^1(\mathbb{R}^1)$, wenn Real- und Imaginärteil absolut integrierbar sind.

Die Funktion $\frac{\sin \xi}{\xi}$ ist jedoch nicht absolut integrierbar. Falls $\int_0^\infty \frac{|\sin \xi|}{\xi} d\xi < \infty$ wäre,

dann würde auch $\int_1^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi} d\xi < \infty$ sein, da $\sin^2 \xi \leq |\sin \xi|$ ist. Mit $\sin^2 \xi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\xi)$ erhalten wir, dass $\int_1^\infty \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\cos 2\xi}{\xi}\right) d\xi < \infty$ ist.

Nun ist $\int_1^\infty \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi < \infty$ [6, S. 565] und damit $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{\xi} d\xi = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A < \infty$, was nicht sein kann.

- Falls \hat{u} aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, dann ist die Umkehrformel

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) \end{aligned} \tag{1.36}$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gültig [20, Th. 9.11, S. 182–187].

- Ist $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $|x|^k u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, bzw. $(1 + |x|^k)u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für eine natürliche Zahl k , dann besitzt \hat{u} stetige Ableitungen bis zur Ordnung k und es gilt:

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = D_\xi^\alpha \mathcal{F}[u](\xi) = \mathcal{F}[(ix)^\alpha u] \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \tag{1.37}$$

Hierbei ist $(ix)^\alpha = (ix_1)^{\alpha_1} \dots (ix_n)^{\alpha_n}$. Wir zeigen (1.37).

Wir erhalten durch Differentiation unter dem Integral:

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) D_\xi^\alpha e^{i(\xi,x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) (ix)^\alpha e^{i(\xi,x)} dx.$$

Da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |(ix)^\alpha| |e^{i(\xi,x)}| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| (1 + |x|^k) dx < \infty$$

ist, konvergiert das differenzierte Integral absolut und gleichmäßig und wir erhalten die Behauptung (für $|x| < 1$ offensichtlich, für $|x| \geq 1$ benutze man "binomische" Formeln).

- Analog kann man zeigen:

Ist $(1 + |\xi|^k)\hat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann muss u stetig differenzierbar sein und

$$D_x^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}[(-i\xi)^\alpha \hat{u}] \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \tag{1.38}$$

Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha u] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[u] \tag{1.39}$$

ist.

Weiterhin gilt für Funktionen $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\bullet \mathcal{F}[u(x - x_0)](\xi) = e^{i(x_0, \xi)} \mathcal{F}[u](\xi). \quad (1.40)$$

$$\bullet \mathcal{F}[e^{i(x, \xi_0)} u] = \mathcal{F}[u](\xi + \xi_0). \quad (1.41)$$

- Sind f, g und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (1.42)$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) \, dy \right] e^{i(x, \xi)} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) e^{i(x, \xi)} \, dx \right] g(y) \, dy \\ &\stackrel{(1.41)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y, \xi)} \hat{f}(\xi) g(y) \, dy \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

- Falls $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist $f\hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi$$

bzw. (man benutze den Satz von Fubini)

$$\langle f, \mathcal{F}[g] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], g \rangle. \quad (1.43)$$

Die Relation (1.43) liefert eine Idee, wie die Fouriertransformation von Distributionen definiert werden könnte. Jedoch bildet die Fouriertransformation den Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ab (das Fourierbild besitzt i.A. keinen endlichen Träger). Der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist zu klein und es muss ein $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ umfassender Raum \mathcal{S} gefunden werden, so dass $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Nach Einführung eines entsprechenden Konvergenzbegriffs in \mathcal{S} wird dann der Raum der linearen stetigen Funktionale \mathcal{S}' (der Raum der temperierten Distributionen) eingeführt, für welche die Fouriertransformation durch die Relation (1.43) definiert ist.

Kurz: $\mathcal{S} \supset \mathcal{D}$, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Der Raum \mathcal{S} sollte folgende Eigenschaften besitzen:

- 1) $\mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- 2) $\mathcal{F}: \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$.
- 3) Da $D_\xi^\alpha \mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha u] = i^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha u]$, sollte die Multiplikation mit Polynomen nicht aus \mathcal{S} herausführen.

Übungsaufgabe

Ü11 Man beweise: Falls die Fouriertransformierte

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u] = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i(\xi, x)} \, dx$$

sich in $L^1(\mathbb{R}^n)$ befindet, dann gilt die Umkehrformel

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{-i(\xi, x)} \, d\xi.$$

Der Grundraum \mathcal{S}

Definition 13

Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt schnell fallend, falls

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty$$

bzw. Konstanten $C_{\alpha,\beta}(\varphi) = C_{\alpha,\beta}$ existieren, so dass

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha,\beta}(\varphi) = C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und}$$

für alle Multiindizes α und β ,

bzw.

$$\sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

ist.

Diese Bedingung besagt, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0 \tag{1.44}$$

sein muss.

Beispiele für schnell fallende Funktionen φ , die nicht in \mathcal{D} liegen, sind $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$, $\varphi(x) = x^\alpha e^{-|x|^4}$.

Definition 14

Der Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der lineare komplexwertige Raum der schnell fallenden komplexwertigen Funktionen, versehen mit folgender Konvergenz:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \iff x^\alpha D^\beta \varphi_k \xrightarrow{\text{glm im } \mathbb{R}^n} x^\alpha D^\beta \varphi$$

für $k \rightarrow \infty$ und für alle Multiindizes α und β .

Bemerkung

In \mathcal{S} ist ein abzählbares System von Seminormen einföhrbar:

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Dadurch wird eine Topologie in \mathcal{S} eingeföhrt, in der \mathcal{S} metrisierbar und vollständig ist (Fréchet Raum).

Satz 6

\mathcal{D} (als Grundraum komplexwertiger Funktionen) ist dicht in \mathcal{S} .

Beweis

Es sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir wählen eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ ist. Wir setzen $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi(\varepsilon x)$ für ein $\varepsilon > 0$. φ_ε befindet sich in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da $\varphi_\varepsilon - \varphi(x) = \varphi(x)[\psi(\varepsilon x) - 1] \equiv 0$ für $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$, konvergiert $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi$ in \mathcal{S} für $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definition 15

Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist der lineare Raum aller über \mathcal{S} stetigen linearen Funktionale, versehen mit der schwachen Konvergenz: Die Folge (F_k) von Elementen $F_k \in \mathcal{S}'$ konvergiert gegen ein Element $F \in \mathcal{S}'$ genau dann, wenn $\langle F_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ für $k \rightarrow \infty$ und für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt.

Die Elemente aus \mathcal{S}' heißen auch verallgemeinerte Funktionen schwachen Wachstums (polynomialen Wachstums). Diese Bezeichnung kann folgendermaßen erklärt werden: Nicht jede lokal integrierbare Funktion f erzeugt eine Distribution aus \mathcal{S}' ; f darf nicht schneller wachsen als eine beliebige Potenz von x für $|x| \rightarrow \infty$, damit $\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ existiert. Grob gesagt: lokal integrierbare Funktionen, die Elemente aus \mathcal{S}' erzeugen, dürfen nur polynomiales Wachstum besitzen. In diesem Sinne spricht man von temperierten Distributionen als Elementen aus \mathcal{S}' .

Beispiele für temperierte Distributionen

- Jedes Polynom p erzeugt ein Element aus \mathcal{S}' . Es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\langle p, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)\varphi(x)| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)| \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m} |\varphi(x)| \, dx \\ &\leq \|p(x)(1+|x|^2)^{-m}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m |\varphi(x)| < \infty \end{aligned}$$

für genügend großes m .

- Jede lokal integrierbare Funktion, die sich für $|x| \rightarrow \infty$ wie eine Potenz von x verhält, erzeugt eine temperierte Distribution. Ihre distributionellen Ableitungen sind wiederum temperierte Distributionen; zum Beispiel erzeugt die Heaviside'sche Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine temperierte Distribution.

- Jede Funktion $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, erzeugt ein Element aus \mathcal{S}' :

Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der Träger befinde sich in $K_R = \{x : |x| < R\}$. Dann ist

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{K_R} f(x)\varphi(x) \, dx \right| \leq M|\varphi|_0 \|f\|_{L_p}.$$

Da der Raum \mathcal{D} dicht in \mathcal{S} ist, kann f zu einem linearen stetigen Funktional auf \mathcal{S} fortgesetzt werden.

- Jede Distribution mit kompaktem Träger befindet sich in \mathcal{S}' . Der Raum der Distributionen mit beschränktem Träger wird auch als \mathcal{E}' bezeichnet (Dualraum zu $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit System von Halbnormen).

Die Ableitungen von temperierten Distributionen sind zunächst über dem Grundraum \mathcal{D} definiert, können aber auf den Grundraum \mathcal{S} durch die Relation

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

fortgesetzt werden (\mathcal{D} ist dicht in \mathcal{S} ; ist $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist auch $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$).

Ebenso ist die Faltung von temperierten Distributionen F und G als Fortsetzung auf \mathcal{S} definierbar, falls eine der beiden Distributionen kompakten Träger besitzt.

Fouriertransformation in \mathcal{S}

Die Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}$ sind absolut integrierbar im \mathbb{R}^n und daher Fouriertransformierbar im klassischen Sinn.

Satz 7

Die Fouriertransformation bildet den Grundraum \mathcal{S} eineindeutig auf sich ab.

Beweis

Es sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Die Funktionen $(1 + |x|^k)\varphi$ befinden sich für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ ebenfalls in \mathcal{S} . Aus der Formel (1.37) folgt, dass $\mathcal{F}[\varphi]$ sich in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ befindet. Unter Beachtung von (1.40) erhalten wir:

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = i^{|\beta|} (-i\xi)^\beta \mathcal{F}[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|} i^{|\beta|} \mathcal{F}[D_x^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi)$$

und

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\beta(x^\alpha \varphi(x))| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |x|^2)^m}{(1 + |x|^2)^m} |D_x^\beta(x^\alpha \varphi)| \, dx \\ &\leq C_{m,\beta,\alpha}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \, dx < \infty, \end{aligned} \quad (1.45)$$

wobei m entsprechend groß gewählt wurde.

Außerdem besitzt jede Funktion $\psi \in \mathcal{S}$ ein Urbild $\varphi \in \mathcal{S}$. Dies ist offensichtlich, da $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi](-x) =: \varphi(x)$ nach den obigen Ausführungen aus \mathcal{S} ist. Folglich ist \mathcal{F} eine eineindeutige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} ($\mathcal{F}[\varphi] = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \varphi = 0$). ■

Lemma 5

Die Fouriertransformation ist eine lineare stetige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} .

Beweis

Die Linearität ist offensichtlich. Wir betrachten eine in \mathcal{S} konvergente Folge von Funktionen (φ_k) , $\varphi_k \in \mathcal{S}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Aus (1.45) folgt, dass

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi_k - \varphi]| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\beta(x^\alpha(\varphi_k - \varphi))| \cdot M$$

ist. Damit konvergiert $\mathcal{F}[\varphi_k] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi]$ (vergleiche mit Definition 13). ■

Fouriertransformation in \mathcal{S}'

Wie angekündigt, wird die Fouriertransformation für temperierte Distributionen mit Hilfe der Relation (1.43) eingeführt:

Definition 16

Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[F]$ ist für ein Element $F \in \mathcal{S}'$ durch die Beziehung

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (1.46)$$

definiert.

$\mathcal{F}[F]$ befindet sich in \mathcal{S}' , d.h. $\mathcal{F}[F]$ ist ein lineares stetiges Funktional auf \mathcal{S} . Die Linearität, $\langle \mathcal{F}[F], \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathcal{F}[F], \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathcal{F}[F], \varphi_2 \rangle$, folgt aus der Linearität der Fouriertransformation \mathcal{F} über dem Grundraum \mathcal{S} .

Betrachten wir nun eine konvergente Folge von Elementen $\varphi_k \in \mathcal{S}$ mit $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.

Nach Lemma 5 ist für ein $\varepsilon > 0$:

$$|\langle \mathcal{F}[F], \varphi_k \rangle - \langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle| = |\langle F, \mathcal{F}[\varphi_k - \varphi] \rangle| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_0(\varepsilon).$$

Die inverse Fouriertransformation ist für Elemente $G \in \mathcal{S}'$ durch die Relation

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[G], \varphi \rangle = \langle G, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (1.47)$$

erklärt. Diese Definition ist sinnvoll, da $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[G]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G]] = G$ ist.

Wir erhalten unmittelbar:

Lemma 6

Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist ein topologischer Isomorphismus.

Die Eigenschaften (1.37)–(1.42), die für die Fouriertransformation von Funktionen gelten, bleiben im Raum \mathcal{S}' bestehen.

Wir betrachten nun einige Relationen:

- Es ist

$$\begin{aligned} \langle D_\xi^\alpha \mathcal{F}[F], \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}[F], D_\xi^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, \mathcal{F}[D_\xi^\alpha \varphi] \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F, (-ix)^\alpha \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[(ix)^\alpha F], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

das heißt

$$D_\xi^\alpha \mathcal{F}[F] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha F].$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[D_x^\alpha F], \varphi \rangle &= \langle D_x^\alpha F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D_x^\alpha \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F, \mathcal{F}[(i\xi)^\alpha \varphi] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}[F], (i\xi)^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[F], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha F] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[F].$$

- Wir verifizieren (1.41) im Raum \mathcal{S}'

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F(x - x_0)], \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}[\tau_{x_0} F], \varphi \rangle = \langle \tau_{x_0} F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi](\xi + x_0) \rangle = \langle F, \mathcal{F}[e^{i(\xi, x_0)} \varphi] \rangle \\ &= \langle e^{i(\xi, x_0)} \mathcal{F}[F], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\mathcal{F}[F(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)} \mathcal{F}[F].$$

Lemma 7

Sei $F \in \mathcal{S}'$ eine Distribution mit beschränktem Träger. Dann ist

$$\mathcal{F}[F](\xi) = \langle F(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle \quad (1.48)$$

für ein beliebiges $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\text{supp} F$.

Beweis

Für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle F(x), \eta(x) \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle \\ &= \langle F(x), \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle F(x), \eta(x) e^{i(x, \xi)} \rangle \varphi(\xi) d\xi \\ &= \langle \langle F(x), \eta(x) e^{i(x, \xi)} \rangle, \varphi(\xi) \rangle. \end{aligned}$$

■

Beispiele

Sei $F = \delta_0$. Dann liefert (1.48):

$$\mathcal{F}[\delta_0] = \langle \delta_0, \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle = \eta(0) e^{i(\xi, 0)} \equiv 1.$$

Für $F = D^\alpha \delta_0$ erhalten wir:

$$\mathcal{F}[D^\alpha \delta_0] = (-i\xi)^\alpha.$$

Es gilt nämlich:

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha \delta_0](\xi) = \langle D_x^\alpha \delta_0, \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \eta(x) D_x^\alpha e^{i(\xi, x)} \Big|_{x=0} = (-1)^{|\alpha|} (i\xi)^\alpha = (-i\xi)^\alpha.$$

Da $\mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[1] = \delta_0$ ist, folgt: $\mathcal{F}[1] = \delta_0 (2\pi)^n$;

oder allgemeiner

$$\mathcal{F}^{-1}[(-x)^\alpha] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[(+x)^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0.$$

Daher ist insbesondere:

$$\mathcal{F}[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0 (2\pi)^n.$$

Fouriertransformation der Faltung

Seien $F, G \in \mathcal{S}'$ und G oder F besitze kompakten Träger. Dann gilt die Relation (1.42)

$$\mathcal{F}[F * G] = \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G],$$

wobei $\langle \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G], \varphi \rangle := \langle \mathcal{F}[F], F[G]\varphi \rangle$ ist.

Wir nehmen an, das G beschränkten Träger besitzt.

Da $\langle F * G, \varphi \rangle = \langle F(x), \langle G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \rangle$ für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist (η ist die oben beschriebene Abschneidefunktion), erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F * G], \varphi \rangle &= \langle F * G, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle F(x), \langle G(y), \eta(y)\mathcal{F}[\varphi](x+y) \rangle \rangle \\ &\stackrel{(1.42)}{=} \langle F(x), \langle G(y), \eta(y) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i(x+y, \xi)} d\xi \rangle \rangle \\ &= \langle F(x), \int_{\mathbb{R}^n} \langle G(y), \eta(y) e^{i(\xi, y)} \rangle \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \rangle \\ &\stackrel{(1.49)}{=} \langle F, \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[G](\xi) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \rangle \\ &= \langle F, \underbrace{\mathcal{F}[\mathcal{F}[G]\varphi]}_{\in \mathcal{S}} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[F], \mathcal{F}[G]\varphi \rangle \\ &=: \langle \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Fouriertransformation ist nicht immer einfach; ein Beispiel ist.

Beispiel

Man berechne $\mathcal{F}[H] = \pi\delta_0 + iP\frac{1}{\xi}$.

Für die Funktion $H(x)e^{-ax}$, $a > 0$, gilt:

$$\mathcal{F}[H(x)e^{-ax}] = \int_0^{\infty} e^{-ax+ix\xi} dx = \frac{1}{-a+i\xi} e^{-ax+ix\xi} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{-a+i\xi} = \frac{i}{\xi+ia}.$$

Für $a \rightarrow +0$ konvergiert $H(x)e^{-ax} \xrightarrow{\mathcal{S}'} H(x)$ und daher ist $\lim_{a \rightarrow 0^+} \mathcal{F}[H(x)e^{-ax}] = \mathcal{F}[H]$.

Ist $\varphi(x) = 0$ für $|x| > R$, dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi+ia} d\xi &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-R}^{+R} \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\varphi(0) \int_{-R}^{+R} \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} d\xi + \int_{-R}^{+R} [\varphi(\xi) - \varphi(0)] \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} d\xi \right] \\ &= -2i\varphi(0) \lim_{a \rightarrow 0^+} \arctan \frac{R}{a} + \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi} d\xi \\ &= -i\pi\varphi(0) + \left\langle P\frac{1}{\xi}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + a^2) \Big|_{-R}^{+R} = 0$$

und

$$\int_{-R}^{+R} \frac{-ia}{\xi^2 + a^2} = -i \arctan \frac{\xi}{a} \Big|_{-R}^{+R}$$

ist.

Da \mathcal{D} in \mathcal{S} dicht ist, folgt die Behauptung.

Übungsaufgaben

Ü12 Man berechne die Fouriertransformierten im \mathbb{R}^1 von:

- a) $u(x) = (H(R - |x|))$
- b) $u(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$
- c) $u(x) = e^{ix^2}$

Ü13 Man berechne die Fouriertransformierte im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, von

$$u(x) = e^{-(Ax, x)},$$

wobei die quadratische Form (Ax, x) positiv definit ist, das heißt, es existiert eine positive Konstante α , so dass

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Kapitel 2

Rand- und Anfangswertprobleme für lineare partielle Differentialgleichungen

Wie wir bereits im Hauptsatz gesehen haben, können mit Hilfe von Fundamentallösungen Lösungen von partiellen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden. Die Fundamentallösungen sind jedoch nicht eindeutig bestimmt. Gelingt es, solche Fundamentallösungen (Greensche Funktionen) zu bestimmen, die gewissen Rand- beziehungsweise Anfangsbedingungen genügen, dann können mit ihrer Hilfe Lösungen von Rand- und Anfangswertproblemen dargestellt werden. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Berechnung von Fundamentallösungen mit Hilfe der Fouriertransformation.

2.1 Berechnung von Fundamentallösungen

Wir beginnen mit der Charakterisierung von Fundamentallösungen $E \in S'$.

Satz 8

Eine verallgemeinerte Funktion $E \in S'$ ist genau dann eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten, wenn ihre Fouriertransformierte $\mathcal{F}[E]$ der algebraischen Gleichung

$$L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = 1$$

mit $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha$ genügt.

Beweis

a) Es sei $E \in S'$ eine Fundamentallösung des Operators $L(D)$, das heißt

$$L(D)E = \delta_0.$$

Wenden wir die Fouriertransformation an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[L(D)E] &= \mathcal{F}\left[\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha E\right] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \mathcal{F}[D^\alpha E] \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[E] = L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = \mathcal{F}[\delta_0] = 1.\end{aligned}$$

b) $E \in \mathcal{S}'$ genüge der Beziehung

$$L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = 1$$

und daher ist:

$$\mathcal{F}[L(D)E] = \mathcal{F}[\delta_0].$$

Da \mathcal{F} ein topologischer Isomorphismus von \mathcal{S}' auf \mathcal{S}' ist, muss $L(D)E = \delta_0$ sein. ■

Bemerkungen

Die Berechnung von Fundamentallösungen schwachen Wachstums für lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten ist durch Satz 8 auf die Lösung algebraischer Gleichungen

$$L(-i\xi)\hat{E} = 1 \tag{2.1}$$

in \mathcal{S}' zurückgeführt worden. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}[\hat{E}] = E$ liefert eine gesuchte Fundamentallösung.

\hat{E} ist nicht eindeutig bestimmt, falls $L(-i\xi)$ eine reelle Nullstelle besitzt.

Sei $N_L = \{\xi \in \mathbb{R}^n : L(-i\xi) = 0\}$. Die Lösungen von (2.1) unterscheiden sich um eine Distribution mit einem Träger in N_L voneinander. Die Konstruktion einer Lösung aus \mathcal{S}' hängt wesentlich von der Struktur von N_L ab. L. Hörmander [11] hat gezeigt, dass stets eine Lösung in \mathcal{S}' existiert.

Ist $\frac{1}{L(-i\xi)}$ in \mathbb{R}^n lokal integrierbar, so ist eine Lösung \hat{E} von (2.1) das dadurch erzeugte Funktional.

Ist $\frac{1}{L(-i\xi)}$ in \mathbb{R}^n nicht lokal integrierbar, dann kann man durch eine „Regularisierung“ eine Lösung von (2.1) konstruieren.

Diese beiden Fälle treten bei der Berechnung der Fundamentallösung des Laplace-Operators im \mathbb{R}^n ($n \geq 3$ und $n = 2$) auf.

2.2 Fundamentallösung des Laplace-Operators, Behandlung von Randwertproblemen

Im \mathbb{R}^n ist die Distribution $E_n \in \mathcal{S}'$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$\Delta E_n = \delta_0$$

genügt. Die Gleichung (2.1) hat in diesem Fall die Gestalt

$$-|\xi|^2 \hat{E}_n(\xi) = 1.$$

1. Fall

Für $n \geq 3$ ist $-\frac{1}{|\xi|^2}$ eine lokal integrierbare Funktion ($\int_{S_{n-1}} \int_{r < R} \frac{1}{r^2} r^{n-1} dr dw < \infty$), die eine Distribution aus \mathcal{S}' erzeugt.

Damit ist

$$E_n = \mathcal{F}^{-1} \left[-\frac{1}{|\xi|^2} \right] = -\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right] (-x).$$

Da für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{|\xi|^2}, \mathcal{F}[\varphi] \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|^2} \mathcal{F}[\varphi] d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < R} \frac{1}{|\xi|^2} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{i(x,\xi)} dx \right] d\xi \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left[\int_{|\xi| < R} \frac{1}{|\xi|^2} e^{i(x,\xi)} d\xi \right] dx \end{aligned}$$

ist, führt dies zur Berechnung des Integrals

$$I_R(x) = \int_{|\xi| < R} \frac{1}{|\xi|^2} e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

Es ist

$$I_R(x) = \int_{|\xi| < R} e^{i|x||\xi| \cos \vartheta} |\xi|^{-2} d\xi,$$

wobei ϑ der Winkel zwischen x und ξ ist. Für $|x| = r$, $|\xi| = \rho$ und das Oberflächenelement $d\sigma = \rho^{n-1} dw$ auf $S_{n-1}(\rho) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = \rho\}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} I_R(x) &= \int_{\rho=0}^R \int_{|\xi|=\rho} e^{ir\rho \cos \vartheta} \rho^{-2} d\sigma d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^R \int_{S_{n-1}(1)} e^{ir\rho \cos \vartheta} \rho^{n-3} dw d\rho \\ &= r^{2-n} \int_{t=0}^{rR} \int_{S_{n-1}(1)} e^{it \cos \vartheta} t^{n-3} dw dt, \quad t = r\rho \end{aligned}$$

und daher

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R(x) = r^{2-n} \text{const.}$$

Wir berechnen die Konstante c_n , für die $E_n = c_n r^{2-n}$ ist. Dazu betrachten wir eine kugelsymmetrische Funktion $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) = \tilde{\phi}(|x|)$.

Für diese Funktion ϕ gilt

$$(\Delta E_n, \phi) = c_n \langle r^{2-n}, \Delta \phi \rangle = c_n \int_0^\infty r^{2-n} \left(\tilde{\phi}'' + \frac{n-1}{r} \tilde{\phi}' \right) r^{n-1} w_{n-1} \, dr,$$

wobei $w_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ das Oberflächenmaß der Einheitskugel ist.

Es ist

$$\begin{aligned} c_n \int_0^\infty \left[r \tilde{\phi}'' + (n-1) \tilde{\phi}' \right] \, dr w_{n-1} &= c_n \left[\int_0^\infty -\tilde{\phi}' \, dr - (n-1) \tilde{\phi}(0) \right] w_{n-1} \\ &= c_n \left[\tilde{\phi}(0) - (n-1) \tilde{\phi}(0) \right] w_{n-1} \\ &= -(n-2) \tilde{\phi}(0) c_n w_{n-1} = \tilde{\phi}(0) \end{aligned}$$

und folglich

$$c_n = -\frac{1}{(n-2)w_{n-1}}.$$

Damit ist

$$E_n(x) = -\frac{1}{(n-2)w_{n-1}} |x|^{2-n} \quad \text{für } n > 2 \quad (2.2)$$

$$E_3(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}. \quad (2.3)$$

2. Fall

Für $n = 2$ hatten wir die Fundamentallösung (1.18) bereits berechnet. Es ist

$$E_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}. \quad (2.4)$$

Randwertprobleme

Sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet im \mathbb{R}^n mit dem Rand $\partial\Omega$.

Wir betrachten das *Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und das *Neumannproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= k & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei \vec{n} der äußere Normaleneinheitsvektor ist und die rechten Seiten genügend glatt sind.

Das Dirichletproblem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Das Neumannproblem ist nur dann lösbar, falls die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} k(x) \, d\sigma(x) = 0 \quad (2.5)$$

gilt. Die Lösbarkeitsbedingung folgt aus der Greenschen Formel für das Paar u und $v \equiv 1$:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\sigma.$$

In diesem Fall ist die Lösung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Angenommen, es gäbe die Lösungen u_1 und u_2 . Dann liefert die 1. Greensche Formel, dass

$$- \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in C^2(\overline{\Omega})$$

ist. Daher ist $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ in Ω und $u_1 - u_2 = \text{const}$ in Ω .

Die Funktion f kann außerhalb einer Kugel, die Ω enthält, durch 0 fortgesetzt werden, beziehungsweise integrierbare Funktionen f können durch 0-Fortsetzungen außerhalb $\overline{\Omega}$ zu integrierbaren Funktionen im \mathbb{R}^n ergänzt werden.

Die Fortsetzungen haben beschränkten Träger und $f * E_n$ ist in diesem Sinn definiert. Die Distribution $u = f * E_n$ ist Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = f$ in Ω , genügt aber im Allgemeinen nicht den Randbedingungen. Daher soll eine Fundamentallösung (Greensche Funktion) gefunden werden, die den homogenen Randbedingungen genügt und mit deren Hilfe die Lösung des Randwertproblems dargestellt werden kann.

Greenscher Darstellungssatz

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet und u eine in $\overline{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Dann gilt

$$pu(y) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) \, d\sigma, \quad (2.6)$$

$$\text{wobei } p = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{für } y \in \partial\Omega \\ 0 & \text{für } y \notin \overline{\Omega} \end{cases} \text{ ist.}$$

Das Integral $\int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx$ wird als Volumen- bzw. Newtonpotential bezeichnet,

$\int_{\partial\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \, d\sigma$ ist das Potential der einfachen Schicht und $\int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) \, d\sigma$ der doppelten Schicht.

Beweis

1. Fall: $y \notin \overline{\Omega}$

In diesem Fall ist $E_n(x - y)$ in $\overline{\Omega}$ eine (beliebig oft nach y) differenzierbare Funktion.

Die 2. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\sigma$$

liefert für $v = E_n(x - y)$:

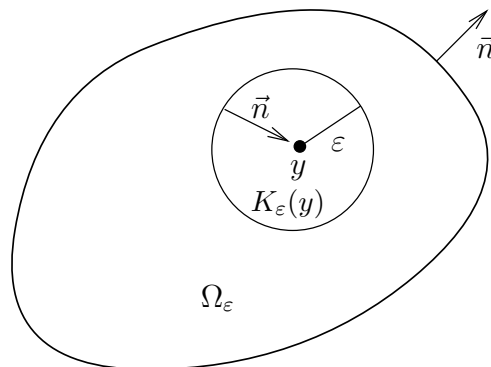
$$0 - \int_{\Omega} E_n(x - y)\Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial E_n(x - y)}{\partial n_x} - E_n(x - y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) \, d\sigma.$$

2. Fall: $y \in \Omega$

Wir legen um y eine Kugel $K_\varepsilon(y)$ mit dem Radius $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{K_\varepsilon(y)} \subset \Omega$ ist. In $\Omega \setminus K_\varepsilon(y)$ können wir die 2. Greensche Formel für u und $v = E_n(x - y)$ anwenden:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x - y)\Delta u(x) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x - y) - E_n(x - y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] \, d\sigma_x \\ &+ \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x - y) - E_n(x - y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] \, d\sigma_x, \quad (2.7) \end{aligned}$$

wobei $S_\varepsilon(y) = \{x : |x - y| = \varepsilon\}$ die Oberfläche der Kugel $K_\varepsilon(y)$ ist.



Grafik 7 Das Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus K_\varepsilon(y)$

Wir führen auf S_ε sphärische Koordinaten ein: $r = |x - y|$, $d\sigma = \varepsilon^{n-1} \, dw$, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$.

Damit ist $E_n = c_n r^{2-n}$, $c_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}$ für $n > 2$ und $E_2 = c_2 \ln r$. Wir erhalten :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\sigma_x \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial}{\partial r} E_n(x-y) \varepsilon^{n-1} dw + \int_{S_\varepsilon(y)} E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial r}(x) \varepsilon^{n-1} dw \right] \\
 &= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) c_2 dw + \int_{S_\varepsilon(y)} c_2 \ln \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon dw \right] & \text{für } n = 2, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) c_n (2-n) dw + \int_{S_\varepsilon(y)} c_n \frac{\partial u}{\partial r}(x) \varepsilon dw \right] & \text{für } n > 2 \end{cases} \\
 &= -u(y) + 0.
 \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$u(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta u(x) dx \right] + \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\sigma_x$$

und schließlich:

$$u(y) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\sigma_x.$$

3. Fall: $y \in \partial\Omega$

Da $\partial\Omega$ durch eine glatte Randfläche (beziehungsweise Randkurve) dargestellt wird, schneiden wir eine Halbkugel, die durch die Tangentialfläche in y begrenzt wird, aus. Analoge Überlegungen wie im zweiten Fall führen zur Behauptung. ■

Bemerkung

Die obigen Rechnungen bestätigen, dass E_n eine Fundamentallösung des Laplaceoperators ist. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann gilt für $y \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u dx = - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta_x u dx = - \langle \Delta_x E_n(x-y), u \rangle \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right) d\sigma = -u(y).
 \end{aligned}$$

Es folgt: $\Delta_x E_n(x-y) = \delta_y(x)$, bzw. $\Delta_x E_n(x) = \delta_0(x)$.

Der obige Beweis beruhte auf klassischen Rechnungen. Er kann wesentlich vereinfacht werden, wenn man distributionentheoretische Überlegungen direkt anwendet.

Sei $y \in \Omega$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx \right) &= - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx = - \langle \Delta_x E_n(x-y), u \rangle \\ &= - \langle \delta_y, u \rangle = -u(y). \end{aligned}$$

Und andererseits nach der zweiten Greenschen Formel, da $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] d\sigma_x \\ &= -u(y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sei nun $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Die Delta-Distribution δ_y kann auf $C^2(\overline{\Omega})$ fortgesetzt werden. Aus der zweiten Greenschen Formel (2.7) folgt mit (2.8) sofort die Behauptung.

Folgerungen

Dirichletproblem

Wählen wir eine Fundamentallösung \tilde{E}_n so, dass $\tilde{E}_n(x-y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und für alle $y \in \Omega$ ist, dann erhalten wir die Lösung des inneren Dirichletproblems durch die Formel

$$u(y) = \int_{\Omega} \tilde{E}_n(x-y) f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} \tilde{E}_n(x-y) g(x) \, d\sigma_x.$$

In diesem Fall wird $\tilde{E}_n(x-y) = G_D(x,y)$ als Greensche Funktion bezeichnet und durch die Relation

$$\begin{aligned} \Delta_x G_D(x,y) &= \delta(x-y) && \text{für } x \in \Omega, \, y \in \Omega, \\ G_D(x,y) &= 0 && \text{für } x \in \partial\Omega, \, y \in \Omega \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt. Die obige Formel erscheint dann als Summe des Newtonschen Volumenpotentials und des Doppelschichtpotentials

$$u(y) = \int_{\Omega} G_D(x,y) f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} G_D(x,y) g(x) \, d\sigma_x. \quad (2.9)$$

Es ist

$$G_D(x,y) = E_n(x-y) + h(x,y),$$

wobei $h(x,y)$ eine harmonische Funktion ist, so dass

$$\begin{aligned} \Delta_x h(x,y) &= 0 && \forall x \in \Omega, \, \forall y \in \Omega, \\ h(x,y) &= -E_n(x-y) && \forall x \in \partial\Omega, \, \forall y \in \Omega \end{aligned} \quad (2.10)$$

gilt.

Neumannproblem

Würde eine Fundamentallösung \tilde{E}_n so existieren, dass $\frac{\partial}{\partial n_x} \tilde{E}_n(x-y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $y \in \Omega$ wäre, dann würde eine Lösung des inneren Neumannproblems durch die Relation

$$u(y) = \int_{\Omega} \tilde{E}_n(x-y) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} k(x) \tilde{E}_n(x-y) d\sigma_x$$

erzeugt werden. Eine solche Fundamentallösung existiert jedoch nicht. Setzen wir nämlich

$$\tilde{E}_n(x, y) = E_n(x-y) + H(x, y) = G_N(x, y),$$

dann müsste gelten:

$$\begin{aligned} \Delta_x H(x, y) &= 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ \frac{\partial H}{\partial n_x}(x, y) &= -\frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x-y) \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega. \end{aligned}$$

Wenden wir den Greenschen Darstellungssatz auf $u(x) \equiv 1$, dann erhalten wir für $y \in \Omega$:

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) d\sigma. \quad (2.11)$$

Andererseits liefert die 2. Greensche Formel für das Paar $H(x, y) = u(x, y)$, $y \in \Omega$ fest, und $v(x) \equiv 1$ die Lösbarkeitsbedingung für das Neumann-Rand-Datum

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_x H(x, y) \cdot 1 dx - \int_{\Omega} H(x, y) \Delta 1 dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) d\sigma - \int_{\partial\Omega} H(x, y) \frac{\partial}{\partial n_x} 1 d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x-y) d\sigma = 0, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu (2.11) steht. Betrachten wir jedoch ein $H(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta_x H(x, y) &= 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} &= -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\mu(\partial\Omega)$ das Oberflächenmaß von $\partial\Omega$ ist, dann ist die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x-y) d\sigma + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} d\sigma = 0$$

erfüllt. In diesem Fall existiert eine Lösung $H(x, y)$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Nach dem Greenschen Darstellungssatz ist

$$u(y) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) k(x) d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) d\sigma \quad (2.12)$$

und aus der 2. Greenschen Formel folgt:

$$0 = \int_{\Omega} H(x, y) \Delta u dx - \int_{\partial\Omega} H(x, y) k(x) d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) d\sigma. \quad (2.13)$$

Addieren wir diese beiden letzten Gleichungen, dann erhalten wir eine Lösungsdarstellung des Neumannproblems (Existenz vorausgesetzt):

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\Omega} G_N(x, y) f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} G_N(x, y) k(x) \, d\sigma + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u(x) \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} G_N(x, y) f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} G_N(x, y) k(x) \, d\sigma + \text{const.} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bemerkung

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ist und f, g und k genügend glatte Funktionen sind. Diese Voraussetzungen können präzisiert werden: $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, $k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ liefern Lösungen $u \in H^2(\Omega)$, für die die Formeln (2.9) und (2.14) gelten.

Berechnung der Greenschen Funktionen

Die Greenschen Funktionen hängen von der Geometrie des Gebietes ab. Für die Kugel, den Kreis oder den Halbraum kann mit Hilfe der Spiegelungsmethode ([2, S. 221f], [26, S. 322ff]) die Greensche Funktion analytisch berechnet werden.

Beispiel: Die Greensche Formel für die Kugel $K_R(0)$ lautet:

$$G_D(x, y) = -\frac{1}{(n-2)w_{n-1}} \left[\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{1}{\left| \frac{R^2 x}{|x|^2} - y \right|^{n-2}} \right].$$

Zur Verifikation setze man $|x| = R$ und überprüfe, dass $\Delta_x \frac{1}{\left| \frac{R^2 x}{|x|^2} - y \right|^{n-2}} = 0$ für $|x| < R$ ist.

Die Formel (2.9) stellt dann für $f = 0$ die Poissonsche Integral-Darstellungsformel für die Kugel ($n = 3$) dar:

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x-y|^3} g(x) \, d\sigma_x.$$

In anderen Fällen ist die Greensche Funktion durch numerische Berechnung der Lösung des Hilfsproblems (2.10) beziehungsweise eines entsprechenden Hilfsproblems für das Neumannproblem näherungsweise bestimmbar. Dieser Weg wird aber meist nicht beschrritten, sondern es wird das fehlende Cauchy-Datum in der Darstellungsformel ausgerechnet (Lösung von Integralgleichungen).

Übungsaufgaben

Ü14 Gegeben sei folgendes Neumannproblem für die Funktion $u = u(x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

a) Beweisen Sie die Lösbarkeitsbedingung.

b) Sind folgende Probleme lösbar?

$$\Delta u = \text{const} \neq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \text{const} \neq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

$$\Delta u = c_1 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = c_2 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

c) Zeigen Sie: Falls das Neumannproblem lösbar ist, ist die Lösung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Ü15 Man berechne das Potential der doppelten Schicht mit konstanter Dichte für einen glatt berandeten, beschränkten Körper.

Ü16 Man berechne das Potential der einfachen Schicht mit konstanter Dichte für die Einheitskugel.

Ü17 Gegeben seien folgende Neumannprobleme für die Funktion $H = H(x, y)$:

$$\Delta_x H(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega,$$

$$(a) \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$$

$$(b) \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$$

Überprüfen Sie die Lösbarkeitsbedingung.

Ü18 Gegeben sei ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\partial\Omega$ sei sein Rand.

Mit $E_n(\cdot)$ bezeichnen wir die (in der Vorlesung hergeleitete) Fundamentallösung des Laplace

Operators $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ im \mathbb{R}^n .

Die Funktion $G_D(x, y) = E_n(x-y) + h(x, y)$, die den Relationen

$$\begin{aligned} \Delta_x G_D(x, y) &= \delta(x-y) && \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ G_D(x, y) &= 0, && \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega \end{aligned}$$

genügt, bezeichnet man als Greensche Funktion des Dirichletproblems für den Laplace-Operator.

Man berechne $G_D(x, y)$ für:

(a) $\Omega =$ Kreisscheibe $K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ (R bezeichne den Radius),

(b) $\Omega =$ Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ (R Radius).

Ü19 Man bestimme die Funktion G_D für den Halbraum $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, wobei hier gelten soll $\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_D(x) = 0$.

Hinweise zur Lösung der Aufgaben Ü18 und Ü19

- Das Randwertproblem:

$$\Delta_x h(x, y) = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad h(x, y) = -E_n \quad \text{auf } \partial\Omega$$

ist eindeutig lösbar. (Diese Tatsache sei ohne Beweis verwendet!)

- Zur Bestimmung der Funktion h setze man die **Spiegelungsmethode** der Funktionentheorie ein, man informiere sich über diese Methode in einem Lehrbuch über Funktionentheorie.
- Falls der Hinweis Spiegelungsmethode nicht genügt, findet man die obigen bzw. ähnliche Rechnungen an folgenden Stellen:
 - a) Al-Gwaiz; Theory of Distributions, pp. 220
 - b) Vladimirov; Equations of Mathematical Physics, pp. 322

Herleitung von Randintegralgleichungen

Indirekte Methode

Als Modellproblem sehen wir uns das innere Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung an

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir suchen die Lösung in Form eines Doppelschichtpotentials mit unbekannter Dichte $\gamma(y)$ auf $\partial\Omega$ (indirekte Methode)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y. \quad (2.15)$$

Das Doppelschichtpotential genügt der Laplace-Gleichung im offenen Gebiet Ω (Vertauschung von Differentiation und Integration ist möglich für $x \neq y$). Die Dichte γ ist so zu bestimmen, dass u die vorgeschriebenen Werte g auf $\partial\Omega$ annimmt.

Dazu müssen die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ berechnet werden, hier ist $x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega$. Wir definieren den direkten Wert des Doppelschichtintegrals:

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0 - y) d\sigma_y := K[\gamma](x_0).$$

Lemma 8

Sei $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \frac{1}{2} \gamma(x_0) + K[\gamma](x_0).$$

Beweis

Für Funktionen $v \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt die erste Greensche Formel

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} v(y) d\sigma_y = \int_{\Omega} \gamma(y) \Delta v(y) dy + \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla v(y) dy.$$

Wir betrachten nun einen festen Punkt $x \in \Omega$ und eine Kugel $K_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Wie im Beweis des Darstellungssatzes betrachten wir das Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x)}$ und die glatte Funktion $v(y) = E_n(x-y)$ in Ω_ε .

Es ist

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y + \int_{S_\varepsilon(x)} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) dy.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir analog zu vorne

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y - \gamma(x) = \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) dy.$$

Es folgt:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) \, d\sigma_y = \gamma(x) + \int_{\Omega} \nabla\gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) \, dy.$$

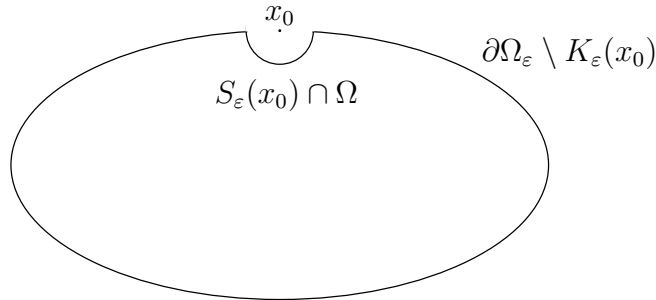
Damit ist:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \gamma(x_0) + \int_{\Omega} \nabla\gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy. \tag{2.16}$$

Für $x_0 \in \partial\Omega$ wenden wir ebenfalls die Beweisideen des Darstellungssatzes an und schneiden eine Halbkugel heraus.

Die erste Greensche Formel liefert in $\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon(x_0) \cap \bar{\Omega}$ (siehe Grafik 8)

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon(x_0) \cap \partial\Omega_\varepsilon} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y) \, d\sigma_y + \int_{S_\varepsilon(x_0) \cap \Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y) \, d\sigma_y = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla\gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy.$$



Grafik 8 Das Gebiet $\Omega \setminus K_\varepsilon(x_0)$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir

$$K[\gamma](x_0) - \frac{1}{2}\gamma(x_0) = \int_{\Omega} \nabla\gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy. \tag{2.17}$$

Aus den Gleichungen (2.16) und (2.17) folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \frac{1}{2}\gamma(x_0) + K[\gamma](x_0). \quad \blacksquare$$

Folgerung

Die Lösung γ der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$\frac{1}{2}\gamma(x_0) + \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y) \, d\sigma_y = g(x_0)$$

liefert die gesuchte Dichte. Die Formel (2.15) stellt die Lösung des Randwertproblems dar.

Neben dieser „Ansatzmethode“ zur Herleitung von Integralgleichungen wird häufig ein anderer direkter Zugang gewählt.

Direkte Methode

Wir betrachten folgende Potentiale

$$V[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} E_n(x-y)\psi(y) \, d\sigma_y \quad \text{Potential der einfachen Schicht,}$$

$$U[\varphi](x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_y} \varphi(y) \, d\sigma_y \quad \text{Potential der doppelten Schicht.}$$

Lemma 9 [4], [15]Die Randwerte von V und U und ihre Normalableitungen sind durch folgende Relationen beschrieben: für $x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} V[\psi](x) &= \int_{\partial\Omega} E_n(x_0-y)\psi(y) \, d\sigma_y = V[\psi](x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U[\varphi](x) &= \frac{1}{2}\varphi(x_0) + K[\varphi](x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial n} V[\psi](x) &= -\frac{1}{2}\psi(x_0) + K^*[\psi](x_0) \\ &= -\frac{1}{2}\psi(x_0) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y)|_{x=x_0} \psi(y) \, d\sigma_y, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial n} U[\varphi](x) &= \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y)|_{x=x_0} \varphi(y) \, d\sigma_y \\ &= D[\varphi](x_0). \end{aligned}$$

FolgerungSei u Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Für u gilt der Darstellungssatz:

$$u(x) = U[u](x) - V\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Aus Lemma 9 folgen Beziehungen zwischen den Randdaten u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf $\partial\Omega$:

$$u(x_0) = \frac{1}{2}u(x_0) + K[u](x_0) - V\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x_0) \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = D[u](x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) - K^*\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](x_0). \quad (2.19)$$

Daher ist auf dem Rand:

$$\frac{1}{2}u - K[u] = -V\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial n} + K^*\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] = D[u]. \quad (2.21)$$

Ist $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ (Neumannproblem) auf dem Rand vorgeschrieben, dann kann u aus der Fredholm'schen Integralgleichung

$$\frac{1}{2}u(x_0) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n}{\partial n}(x_0 - y)u(x_0) \, dy = - \int_{\partial\Omega} E_n(x_0 - y)g(y) \, dy = G(x_0)$$

auf dem Rand $\partial\Omega$ berechnet werden.

Eine andere Möglichkeit ist, auf die Gleichung (2.19) zurückzugreifen

$$D[u](x_0) = \frac{1}{2}g(x_0) + K^*[g](x_0) = \tilde{G}(x_0).$$

2.3 Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitungsgleichung und das Cauchysche Anfangswertproblem

Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta\right) u(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.22)$$

beschreibt den Wärmefluss in einem homogenen isotropen Medium, das das Gebiet Ω einnimmt, $u = u(x, t)$ beschreibt die Temperatur am Ort x zum Zeitpunkt t , beziehungsweise die Teilchenkonzentration von chemischen Substanzen; a^2 ist der thermische Diffusionskoeffizient beziehungsweise die Temperaturleitfähigkeitszahl; f charakterisiert den Einfluss von Wärmequellen beziehungsweise Wärmesenken und stellt deren Dichte dar (Quelldichte).

Eine Fundamentallösung $E = E(x, t)$ ist durch die Distributionengleichung

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}), \varphi = \varphi(x, t),$$

beziehungsweise

$$(\partial_t - a^2 \Delta_x) E(x, t) = \delta_0(x, t) = \delta_0(x) \otimes \delta_0(t) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$$

definiert.

Wir wenden die Fouriertransformation bezüglich x an und erhalten:

$$[\partial_t + a^2 |\xi|^2] \mathcal{F}_x[E](\xi, t) = \delta_0(t).$$

$\mathcal{F}_x[E]$ ist bei festem ξ Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialoperators

$$L(\partial_t) = \partial_t + A^2, \quad A^2 = a^2 |\xi|^2.$$

Wir hatten gezeigt (S. 34, Beispiel 1), dass $H(t)u_0(t)$ eine Fundamentallösung von $L(D)$ ist, wobei $u_0(t)$ durch $L(\partial_t)u_0(t) = 0$ für $t > 0$ und $u_0(0) = 1$ gegeben ist. Wir erhalten daher

$$\mathcal{F}_x[E](\xi, t) = H(t)e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

und

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[H(t)e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 |\xi|^2 t} e^{-i(x, \xi)} \, d\xi \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) t} e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} \, d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi_1^2 t} (\cos x_1 \xi_1 - i \underbrace{\sin x_1 \xi_1}_{\text{ungerade}}) d\xi_1 &= 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 t \xi_1^2} \cos x_1 \xi_1 d\xi_1 \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4a^2 t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4a^2 t}} \quad ([3, \text{S. 118 (5)}]). \end{aligned}$$

Folglich ist:

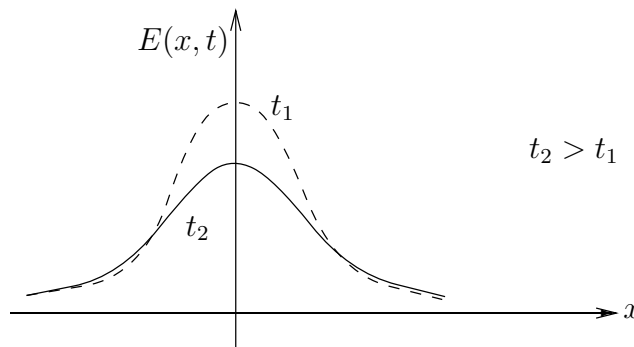
$$E(x, t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \frac{(\sqrt{\pi})^n}{(a\sqrt{t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}. \quad (2.23)$$

Die Fundamentallösung hat folgende Eigenschaften:

- $E(x, t) > 0$ für $t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $E(x, t) = 0$ für $t < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\lim_{t \rightarrow 0+} E(x, t) = \delta_0(x)$. (2.24)

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} 2^n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} dx_1 \dots dx_n = H(t) = 1 \quad \text{für } t > 0. \quad (2.25)$$

(vgl. [3, S. 350])



Grafik 9 Abfließen der Temperatur

Die Fundamentallösung beschreibt die Temperaturverteilung für die Punktquelle $\delta_0(x) \otimes \delta_0(t)$ (Abfließen mit wachsendem t). Wir zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow 0+} E(x, t) = \delta_0(x)$ ist.

Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist (beachte $\varphi(x) - \varphi(0) = x \cdot \nabla \varphi(\hat{x})$ mit $\hat{x} \in (0, x)$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \\ &\leq K(\varphi) t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x| e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} dx \\ &= K(\varphi) w_{n-1} t^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^{n-1} dr \quad [3, \text{S. 350, Formel 2}] \\ &= \tilde{K}(\varphi) t^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{n+1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Falls die rechte Seite f der Wärmeleitungsgleichung (2.22) eine Distribution mit kompaktem Träger bezüglich x ist und für $t < 0$ verschwindet, dann existiert das Wärmepotential

$$u = E * f.$$

Darüber hinaus gilt folgender Satz:

Satz 9

Falls die Dichtefunktion f lokal integrierbar ist, für $t < 0$ verschwindet und in jedem Streifen $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig beschränkt ist, dann existiert das Wärmepotential

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\tau \\ &= f * E. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Es gilt folgende Abschätzung:

$$|u(x, t)| \leq t \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0, \quad (2.27)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0. \quad (2.28)$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} (f * E)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(t - \tau, x - \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{H(t - \tau)}{(2a\sqrt{\pi(t - \tau)})^n} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t - \tau)})^n} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

$$\text{da } H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } t - \tau \geq 0, \text{ also } t \geq \tau, \\ 0 & \text{für } t - \tau < 0, \text{ also } t < \tau \end{cases}$$

$$\text{und } f(\xi, \tau) = 0 \text{ für } \tau < 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten die Existenz der Faltung aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |(f * E)(x, t)| &\leq \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(t - \tau, x - \xi) d\xi d\tau \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)| t \leq Mt. \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar die Relation (2.28). ■

Folgerung: Das Wärmepotential $u(x, t)$, gegeben durch (2.26), ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)u(x, t) &= f(x, t) && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem mit inhomogenen Randdaten und $f(x, t)=0$:

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)v(x, t) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0+} v(x, t) &= v(x, 0) = g(x) && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Durch Überlagerung von $v(x, t)$ und $u(x, t)$ erhält man die Lösung des allgemeinen Problems mit nichtverschwindenden rechten Seiten. Um $v(x, t)$ zu konstruieren, wenden wir auf (2.29) die Fouriertransformation an; voraussetzend, dass g Fouriertransformierbar ist.

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{v}(\xi, t) &= 0, \\ \hat{v}(\xi, 0) &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung ist:

$$\hat{v}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t}. \quad (2.30)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\hat{g}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] (x) \\ &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\mathcal{F}_x [g] \cdot \mathcal{F}_x \left[\mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right] \right] (x) \\ &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\mathcal{F}_x \left[g * \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right] \right] (x) \\ &= \left(g * \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right) (x) \\ &= g * \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{1}{(4a^2 \pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Lemma 10

Es sei f eine lokal integrierbare Dichtefunktion, die für $t < 0$ verschwindet und in jedem Streifen $0 \leq t \leq T$ beschränkt ist, und g sei eine beschränkte lokal integrierbare Funktion. Dann ist die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)w(x, t) &= f(x, t) && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ w(x, 0) &= g(x) && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.32)$$

durch

$$w(x, t) = u(x, t) + v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(4a^2 \pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} d\xi d\tau + \frac{1}{(4a^2 \pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi$$

gegeben.

Lemma 11

Die Lösung w des Problems (2.32) ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Wir zeigen die Eindeutigkeit. Es seien w_1 und w_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (2.32). Dann gilt für die Differenz $v(x, t) = w_1(x, t) - w_2(x, t)$:

$$\begin{aligned}(\partial_t - a^2 \Delta)v(x, t) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Nach Anwenden der Fouriertransformation bezüglich der Ortsvariablen erhalten wir

$$\hat{v}(\xi, t) = 0$$

und damit $v(x, t) = 0$. ■

Übungsaufgaben

Ü20 Gegeben sei das Cauchysche Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0+) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Die Distributionen bzw. Funktionen u und f sind für $t > 0$ definiert und können durch 0 für $t < 0$ fortgesetzt werden, indem Sie $\tilde{u}(x, t) = H(t)u(x, t)$ und $\tilde{f}(x, t) = H(t)f(x, t)$ setzen. Welcher Differentialgleichung genügt \tilde{u} und wie kann \tilde{u} berechnet werden?

Ü21 Zeigen Sie, dass in einem einseitig begrenzten Stab die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) &= 0, \quad x > 0, t > 0, \\ u(x, 0+) &= g(x) \quad \text{für } x > 0, \quad u(0+, t) = 0 \quad \text{für } t > 0\end{aligned}$$

lautet:

$$u(x, t) = E(x, t) * \tilde{g}(x),$$

wobei $\tilde{g}(x)$ eine ungerade Fortsetzung von $g(x)$ auf die gesamte Zahlengerade ist.

Ü22 Überlegen Sie, dass das in Aufgabe Ü21 formulierte Problem mit der allgemeineren Randbedingung

$$u(0+, t) = h(t)$$

die Lösung

$$u(x, t) = E(x, t) * \tilde{g}(x) - 2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} * h(t)$$

besitzt.

2.4 Fundamentallösung des Operators der Wellengleichung und das Cauchysche Anfangswertproblem

Die Wellengleichung

$$(\partial_{tt} - a^2 \Delta)u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < \infty,$$

beschreibt die Auslenkung (transversale Schwingungen) einer Saite ($n = 1$), einer Membran ($n = 2$) beziehungsweise eines Volumens ($n = 3$) unter Einwirkung einer äußeren Störung $f(x, t)$ am Ort x zum Zeitpunkt t . Die Konstante a charakterisiert die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Lemma 12

Die Fundamentallösungen des Wellenoperators

$$\partial_{tt} - a^2 \Delta$$

lauten:

in der Raumdimension $n = 1$

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|), \quad (2.33)$$

in der Raumdimension $n = 2$

$$E_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad (2.34)$$

in der Raumdimension $n = 3$

$$E_3(x, t) = H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x). \quad (2.35)$$

Beweis

Die Fundamentallösung $E_n(x, t)$ genügt der Gleichung

$$(\partial_{tt} - a^2 \Delta)E_n(x, t) = \delta_0(x, t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (2.36)$$

Nach Anwendung der Fouriertransformation bezüglich x erhalten wir

$$[\partial_{tt} + a^2 |\xi|^2] \mathcal{F}_x[E_n](\xi, t) = \delta_0(t).$$

$\mathcal{F}_x[E_n]$ ist bei festem ξ Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialoperators

$$L(\partial_t) = \partial_{tt} + A^2, \quad A^2 = a^2 |\xi|^2.$$

Da $u_0(t) = \frac{\sin At}{A}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L(\partial_t)u_0(t) &= 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u_0(0) &= 0, \\ u_0'(0) &= 1 \end{aligned}$$

ist, folgt, dass $u_0(t)H(t) = H(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} = \mathcal{F}_x[E_n](\xi, t)$ ist.

Folglich gilt:

$$E_n(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[H(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} \right] = H(t) \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{a} \mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x). \quad (2.37)$$

1. Fall: $n = 1$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(\cos x\xi - i \sin x\xi)}_{\text{ungerade}} \frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x\xi \sin a\xi t}{\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{\sin[(at-x)\xi] + \sin[(at+x)\xi]}{\xi} d\xi, \end{aligned}$$

da $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(b-a) + \sin(b+a)]$ ist.

Unter Beachtung, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin Ay}{y} dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } A > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } A < 0 \end{cases}$$

gilt (vgl. [3, Formel 11, S. 351]), erhalten wir (siehe Grafik 10)

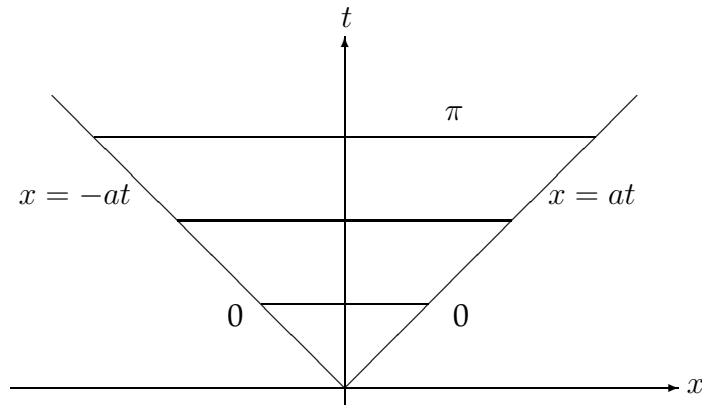
$$\mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x) = \begin{cases} \pi & \text{für } at > |x| \\ 0 & \text{für } at < |x| \end{cases} = \pi H(at - |x|)$$

und

$$E_1(x, t) = H(t) \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{a} H(at - |x|).$$

Weiterhin ist $H(t)H(at - |x|) = H(at - |x|)$ und daher

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|). \quad (2.38)$$

Grafik 10 Die Funktion $\pi H(at - |x|)$ **2. Fall:** $n = 3$

Wir erinnern an Beispiel 4, S. 20, in dem eine Klasse von Distributionen, die auf Oberflächen S konzentriert sind,

$$F_f(v) = \int_S f v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

eingeführt wurde.

Wir betrachten die folgende Distribution auf der Kugeloberfläche $S_R = \{x : |x| = R\}$,

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi \rangle = \int_{S_R} \varphi(x) \, d\sigma \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

δ_{S_R} ist ein lineares, stetiges Funktional mit beschränktem Träger und befindet sich daher in \mathcal{S}' .

Wir zeigen, dass

$$\delta_{S_R} = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\frac{4\pi R \sin(|\xi|R)}{|\xi|} \right],$$

beziehungsweise

$$\mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] = \frac{4\pi R \sin(|\xi|R)}{|\xi|}$$

ist. Aus Lemma 7 folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] &= \langle \delta_{S_R}, \eta e^{i(\xi, x)} \rangle = \int_{S_R} e^{i(\xi, x)} \, d\sigma_x \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i|\xi|R \cos \vartheta} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= R^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi e^{i|\xi|R \cos \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Durch die Variablentransformation $\tau = \cos \vartheta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] &= 2\pi R^2 \int_{+1}^{-1} e^{i|\xi|R\tau} (-1) d\tau \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} (\cos |\xi|R\tau + i \underbrace{\sin |\xi|R\tau}_{\text{ungerade}}) d\tau \\ &= 4\pi R^2 \left[\frac{1}{|\xi|R} \sin |\xi|R\tau \right]_0^1 = \frac{4\pi R}{|\xi|} \sin |\xi|R. \end{aligned}$$

Setzen wir $R = at$, dann liefern (2.37) und die Relation

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin at|\xi|}{a|\xi|} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{4\pi at}{4\pi a^2 t} \frac{\sin at|\xi|}{|\xi|} \right] = \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}$$

die Fundamentallösung

$$E_3(x, t) = H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}, \quad (2.39)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \langle E_3, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{S_{at}} \frac{1}{t} \varphi(x, t) d\sigma_x dt \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{|x|=t'} \frac{1}{t'} \varphi \left(x, \frac{t'}{a} \right) d\sigma_x dt' \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

3. Fall: $n = 2$

Wir benutzen die Hadamardsche Absteigemethode (Reduktion bezüglich einer Variablen [26, S. 149ff]), um eine Fundamentallösung E_2 zu berechnen. E_2 wird durch die Relation

$$\langle E_2, \varphi \rangle = \langle E_2(x_1, x_2, t), \varphi(x_1, x_2, t) \rangle := \langle E_3(x_1, x_2, x_3, t), \hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) \rangle$$

mit $\hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_1, x_2, t)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, definiert.

Diese Definition ist sinnvoll:

$$\begin{aligned} \langle (\partial_{tt} - a^2 \Delta_2) E_2, \varphi \rangle &= \langle E_2, (\partial_{tt} - a^2 \Delta_2) \varphi \rangle \\ &= \langle E_3, (\partial_{tt} - a^2 \Delta_3) \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle (\partial_{tt} - a^2 \Delta_3) E_3, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0, 0, 0) = \langle \delta_2, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\langle E_2, \varphi \rangle = \langle E_3, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x_1, x_2, t) d\sigma_x dt.$$

Das Integral auf der Kugeloberfläche soll durch ein zweidimensionales Bereichsintegral ausgedrückt werden.

Auf der Kugeloberfläche S_{at} gilt: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (at)^2$. Damit ist

$$x_3 = \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2)}, \quad \text{d.h.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \end{pmatrix}$$

$$d\sigma_x = \sqrt{EG - F^2} \, dx_1 \, dx_2 = \pm \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \, dx_1 \, dx_2,$$

$$E = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1}, \quad G = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2}, \quad F = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \langle E_2, \varphi \rangle &= \frac{2a}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq at} \frac{\varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \, dx_1 \, dx_2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(at - |x|)\varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \, dx_1 \, dx_2 \, dt. \end{aligned}$$

Der Faktor 2 realisiert die Vorzeichen \pm , $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Daraus folgt:

$$E_2(x, t) = \frac{H(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}. \quad \blacksquare$$

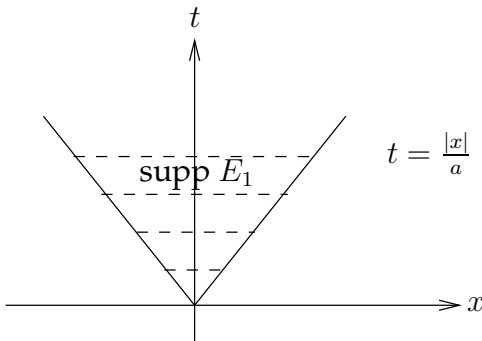
Eigenschaften der Fundamentallösungen

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|),$$

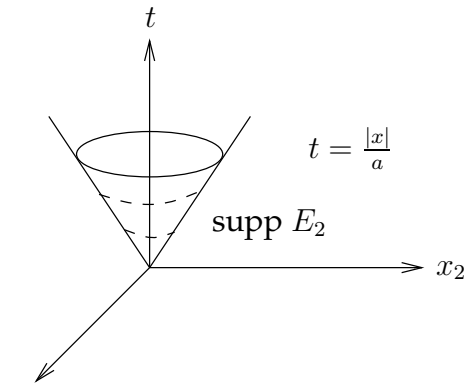
$$E_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}},$$

$$E_3(x, t) = H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).$$

Die Träger von E_1 und E_2 stimmen mit der Abschließung des in die Zukunft gerichteten Vollkegels überein (vgl. Grafik 11 und Grafik 12).

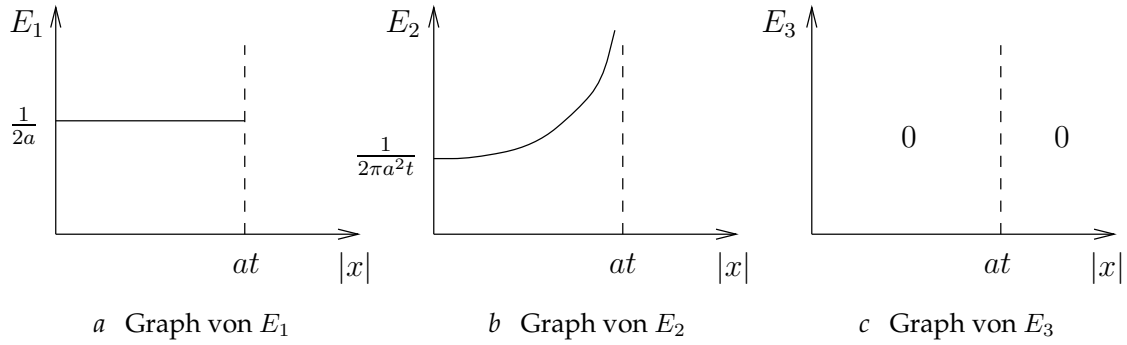


Grafik 11 Träger von E_1



Grafik 12 Träger von E_2

Der Träger von E_3 besteht aus den Randpunkten des Kegels $\{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty] : at = |x|\}$. Die Grafiken 13 a, b, c skizzieren die entsprechenden Graphen von E_1, E_2 und E_3 .



Grafik 13

Wir beschreiben das Verhalten von $E_n(x, t)$ in Bezug auf die Zeitvariable t .

Definition 17

Sei $F = F(x, t)$ aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $v = v(x)$ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Die Distribution

$$\langle F(x, t), v(x) \rangle = h(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$

ist durch die Relation

$$\langle \langle F(x, t), v(x) \rangle, \psi(t) \rangle = \langle F(x, t), v(x)\psi(t) \rangle$$

für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ definiert.

Lemma 13

Es gilt im Distributionensinn:

$$\left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x) \right\rangle = \frac{d^k}{dt^k} \langle F(x, t), v(x) \rangle.$$

Beweis

Wir berechnen die obige Relation:

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x) \right\rangle, \psi(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x)\psi(t) \right\rangle \\ &= (-1)^k \left\langle F(x, t), v(x) \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right\rangle \\ &= (-1)^k \left\langle \langle F(x, t), v(x) \rangle, \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d^k}{dt^k} \langle F(x, t), v(x) \rangle, \psi(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

■

Definition 18

Die Distribution $F = F(x, t)$ gehört bezüglich der Variablen t zur Klasse $C^k(I)$ in einem Zeitintervall I , falls $\langle F(x, t), v(x) \rangle$ für alle $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ aus $C^k(I)$ ist.

Lemma 14

Die Fundamentallösungen $E_n(x, t)$, $n = 1, 2, 3$ gehören zur Klasse $C^\infty[0, \infty)$ bezüglich t . Für $t \rightarrow 0_+$ werden die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} E_n(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial E_n(x, t)}{\partial t} = \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial^2 E_n(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ angenommen.

Beweis

Wir beweisen nur den Fall $n = 3$ und empfehlen die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ als Übungsaufgabe.

Sei $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\langle E_3(x, t), v(x) \rangle = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} v(x) \, d\sigma_x.$$

Wir setzen $x = aty$ und erhalten $d\sigma_x = (at)^2 d\sigma_y$

$$\begin{aligned} \langle E_3(x, t), v(x) \rangle &= \frac{H(t)t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \quad \text{für } t \geq 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $E_3(x, t) \in C^\infty[0, \infty)$ bezüglich t .

Weiterhin gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \langle E_3(x, t), v(x) \rangle = 0.$$

Wir betrachten jetzt die Ableitungen

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Wir berechnen nun die Grenzwerte der Ableitungen für $t \rightarrow 0_+$.

Aus (2.41) folgt unmittelbar

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left\langle \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d\sigma_y v(0) = v(0)$$

und daher

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t} = \delta(x).$$

Weiterhin ist

$$\int_{S_1} v(aty) d\sigma_y = \int_{S_1} v(-aty) d\sigma_y$$

und damit

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) d\sigma_y = 0.$$

Die Relation (2.42) liefert

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left\langle \frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle = 0$$

und somit folgt

$$\frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Cauchysches Anfangswertproblem für die Wellengleichung

Das Cauchysche Anfangswertproblem für die Wellengleichung lautet: Finde eine Distribution (Funktion) $u = u(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ so, dass

$$\left. \begin{aligned} (\partial_{tt} - a^2 \Delta)u(x, t) &= f(x, t) && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned} \right\} \text{in } \mathbb{R}^n$$

gilt, wobei $f = f(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $f = 0$ für $t < 0$; $u_0, u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir stellen eine neue Differentialgleichung auf, in der die Anfangsbedingungen in der rechten Seite der Differentialgleichung berücksichtigt werden. Dazu betrachten wir zunächst glatte Funktionen $u = u(x, t)$ und $f = f(x, t)$. Für die Funktion f hatten wir vorausgesetzt, dass sie für $t < 0$ verschwindet. Die Funktion u setzen wir in den Halbraum $t < 0$ ebenfalls durch Null fort, indem wir folgende Funktion einführen

$$U = U(x, t) = H(t)u(x, t).$$

Die Funktion U ist in \mathbb{R}^{n+1} lokal integrierbar und erzeugt eine reguläre Distribution. Für eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_{tt}U, \varphi \rangle &= \langle U, \partial_{tt}\varphi \rangle \\
&= \langle H(t)u(x, t), \partial_{tt}\varphi(x, t) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[- \int_0^\infty \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) dt + \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \right] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \varphi(x, t) dt - \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \varphi(x, t) \right]_{t=0}^{t=\infty} + \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \right] dx \\
&= \left\langle H \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \varphi(x, t) \right\rangle - u(x, 0) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \varphi(x, 0) \\
&= \left\langle H \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \varphi(x, t) \right\rangle + \langle u_0(x) \delta'(t), \varphi(x, t) \rangle + \langle u_1(x) \delta(t), \varphi(x, t) \rangle.
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
(\partial_{tt} - a^2 \Delta)U(x, t) &= H(t)f(x, t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \\
&= f(x, t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t). \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Die verallgemeinerte Cauchysche Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung besteht darin, eine Distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ zu finden, die der Relation (2.43) im Distributionensinn genügt.

Satz 10

Es seien u_0 und $u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $f = 0$ für $t < 0$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ des verallgemeinerten Cauchyschen Anfangswertproblems als Summe von drei Potentialen

$$U = E_n * f + E_n * \delta(t)u_1 + \frac{\partial}{\partial t} E_n * u_0 \delta(t). \tag{2.44}$$

Sind f , u_0 und u_1 genügend glatte Funktionen, dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung, die folgendermaßen gegeben ist:

$n=1, t>0$, **d'Alembertsche Formel:**

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \left\{ u_0(x+at) + u_0(x-at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi \right\} \tag{2.45}$$

$n = 2, t > 0$, **Poisson Formel:**

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{K_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} d\xi d\tau \\
 &+ \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi \\
 &+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$n = 3, t > 0$, **Kirchhoffsche Formel:**

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(x)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi \\
 &+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi \\
 &+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S_{at}(x)} u_0(\xi) d\sigma_\xi \right].
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Hierbei bedeutet $K_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^2 : |x' - x| < r\}$, $B_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x| < r\}$ und $S_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x| = r\}$.

Beweis

Wir führen den Beweis unter der Annahme, dass die rechten Seiten genügend glatte Funktionen sind.

Formel (2.44) liefert uns nach dem Hauptsatz (S. 36) die verallgemeinerte Lösung unter der Voraussetzung, dass die Faltungen existieren. Die Existenz der Faltungen wird durch folgende Aussage gesichert:

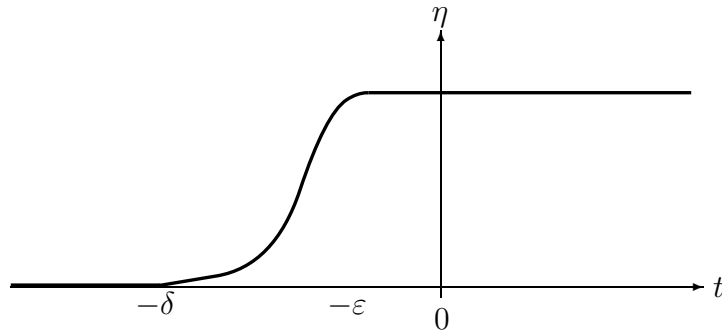
Satz 11 [26, S. 159 ff]

Es seien F und G Distributionen aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, so dass $F(x, t) = 0$ für $t < 0$ und $\text{supp } G \subset \overline{C^+}$, wobei $C^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : at > |x|\}$ der in die Zukunft gerichtete Kegel ist (siehe Grafik 10, 11, 12). Dann existiert die Faltung und kann durch

$$\langle F * G, v \rangle = \langle F(\xi, \tau'), \langle G(y, \tau) \eta(\tau') \eta(\tau) \eta(a^2\tau^2 - y^2), v(\xi + y, \tau' + \tau) \rangle \rangle$$

dargestellt werden. Hierbei ist $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ und für $\delta > \varepsilon > 0$ gilt:

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\delta, \\ 1 & \text{für } t > -\varepsilon. \end{cases}$$

Grafik 14 Graph der Funktion η

Betrachten wir die Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= \frac{1}{2a} H(at - |x|), \\ E_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \\ E_3(x, t) &= H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x), \end{aligned}$$

so sind die Voraussetzungen für $F = f$ und $G = E_n$ erfüllt.

Weiterhin folgt aus diesem Satz die Aussage:

Falls $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\text{supp } G \subset \overline{C}^+$ und $u = u(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\begin{aligned} G * u(x) \delta(t) &= G(x, t) * u(x), \\ G * u(x) \delta^{(k)}(t) &= \frac{\partial^k}{\partial t^k} [G(x, t) * u(x)] \\ &= \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} G(x, t) \right) * u(x), \end{aligned}$$

wobei die Faltung auf den rechten Seiten bezüglich x auszuführen ist.

Wir beginnen mit dem Fall $n=1$.

Für $E_1(x, t) = \frac{H(at - |x|)}{2a}$ haben wir die Faltung mit den rechten Seiten von (2.44) zu berechnen:

$$\begin{aligned} E_1 * f &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * f(x, t) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(a(t - \tau) - |x - \xi|) f(\xi, \tau) \, d\tau \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau) > |x-\xi|} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass $f(x, \tau) = 0$ für $\tau < 0$ und $H(a(t - \tau) - |x - \xi|) = 0$ für $a(t - \tau) < |x - \xi|$ und daher auch für $\tau > t$ ist.

Da $f * \delta_0 = f$ ist (vgl. Beispiel auf Seite 32), erhalten wir

$$\begin{aligned} E_1 * \delta(t)u_1 &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * \delta(t)u_1(x) \\ &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * u_1(x) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} H(at - |x - \xi|)u_1(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

beachtend, dass

$$H(at - |x - \xi|) = \begin{cases} 1 & \text{falls } at > x - \xi, x > \xi, \\ 1 & \text{falls } at > \xi - x, \xi > x. \end{cases}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} E_1 * \delta'(t)u_0 &= \frac{\partial}{\partial t}[E_1 * u_0] = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a}[u_0(x + at)a - u_0(x - at)(-a)] = \frac{1}{2}[u_0(x + at) + u_0(x - at)]. \end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zum Fall $n = 2$ über. Es ist

$$\begin{aligned} E_2 * f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(a(t - \tau) - |x - \xi|)}{2\pi a \sqrt{a^2(t - \tau)^2 - |x - \xi|^2}} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{a(t-\tau) > |x-\xi|} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - |x - \xi|^2}} \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{K_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - |x - \xi|^2}} \, d\xi \, d\tau, \end{aligned}$$

wobei $K_{a(t-\tau)}(x)$ ein Kreis mit dem Radius $a(t - \tau)$ um den Mittelpunkt x ist.

Weiterhin ist $E_2 * \delta u_1 = E_2(x, t) * \delta(t)u_1(x) = E_2(x, t) * u_1(x)$, wobei auf der rechten Seite die Faltung nur bezüglich der Ortsvariablen auszuführen ist (wir erinnern noch einmal daran, dass $f(t) * \delta(t) = f(t)$ ist).

Damit ist

$$E_2 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(at - |x - \xi|)u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x - \xi|^2}} \, d\xi = \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x - \xi|^2}} \, d\xi.$$

Durch analoge Überlegungen ($f * \delta' = f'$) erhalten wir

$$E_2 * \delta'(t)u_0 = \frac{\partial}{\partial t}[E_2(x, t) * u_0(x)] = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x - \xi|^2}} d\xi.$$

Schließlich kommen wir zum Fall $n = 3$.

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt nach (2.40):

$$\langle E_3 * f, \varphi \rangle = \langle E_3, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(y, \frac{|y|}{a})}{|y|} dy,$$

wobei $\psi = \psi(y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(x - y, t - \tau) \varphi(x, t) dx dt$ ist.

Daher ist

$$\begin{aligned} \langle E_3 * f, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x - y, t - \frac{|y|}{a}) \varphi(x, t)}{|y|} dx dt \right\} dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, t) \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x - y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy \right] dx dt. \end{aligned}$$

Da $f(x - y, t - \frac{|y|}{a}) = 0$ für $ta < |y|$ ist, muss die Integration bezüglich y nur über die Kugel $B_{at}(0)$ ausgeführt werden. Folglich ist:

$$E_3 * f = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(0)} \frac{f(x - y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy.$$

Setzen wir $x - y = \xi$, dann erhalten wir die Kugel $B_{at}(x)$ als Integrationsgebiet und schließlich aufgrund von Symmetrieeigenschaften

$$E_3 * f = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(x)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x - \xi|}{a})}{|x - \xi|} d\xi,$$

was zum ersten Teil der Kirchhoffschen Formel führt. Wir berechnen nun die restlichen Integrale. Es ist

$$E_3 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t} (\delta_{S_{at}(0)}(x) * u_1(x)),$$

was bedeutet, für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{S_{at}(0)} * u_1, \varphi \rangle &= \langle \delta_{S_{at}(0)} \otimes u_1, \varphi(\xi + y) \rangle = \langle \delta_{S_{at}(0)}(y), u_1(\xi) \varphi(\xi + y) \rangle \\ &\stackrel{\xi+y=x}{=} \int_{S_{at}(0)} \left[\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x - y) \varphi(x) dx \right] d\sigma_y \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \left[\int_{S_{at}(0)} u_1(x - y) d\sigma_y \right] dx. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\delta_{S_{at}(0)}(x) * u_1(x) = \int_{S_{at}(0)} u_1(x-y) d\sigma_y = \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi$$

und schließlich

$$E_3 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi.$$

Analog ist

$$E_3 * \delta'(t)u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_0(\xi) d\xi \right]. \quad \blacksquare$$

Interpretation der d'Alembertschen Formel

Die d'Alembertsche Formel

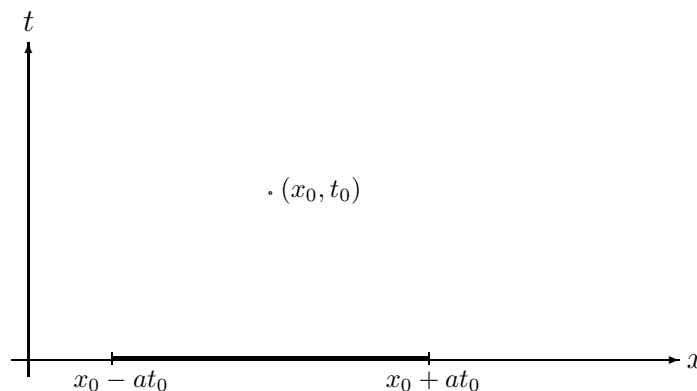
$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]$$

beschreibt den Einfluss des Quellterms und der Anfangsdaten in den entsprechenden Intervallen und deren Endpunkten.

Setzen wir $f(\xi, \tau) \equiv 0$, dann kann der Einfluss der Anfangsdaten auf das Verhalten im Punkt (x_0, t_0) folgendermaßen charakterisiert werden:

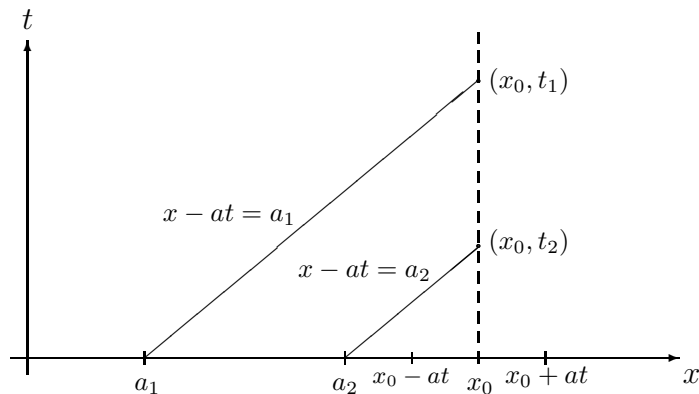
Definition 19

Als Abhängigkeitsgebiet $\mathcal{A}(x_0, t_0)$ des Punktes (x_0, t_0) bezeichnet man die Punktmenge auf der x -Geraden ($t = 0$) (im mehrdimensionalen Fall auf der Hyperebene $t = 0$), auf der die Kenntnis der Anfangsdaten ausreichend ist, um $u(x_0, t_0)$ zu berechnen.



Grafik 15 $\mathcal{A}(x_0, t_0) = [x - at_0, x + at_0]$

Im eindimensionalen Fall ist $\mathcal{A}(x_0, t_0) = [x - at_0, x + at_0]$ (siehe Grafik 15). Liegen räumlich begrenzte Anfangsbedingungen vor, z.B. $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset [a_1, a_2]$, so interessiert die Frage, in welchem Zeitraum ein Punkt $x_0 \notin [a_1, a_2]$ von der Welle erreicht wird, d.h. für welche t ist $u(x_0, t) \neq 0$.

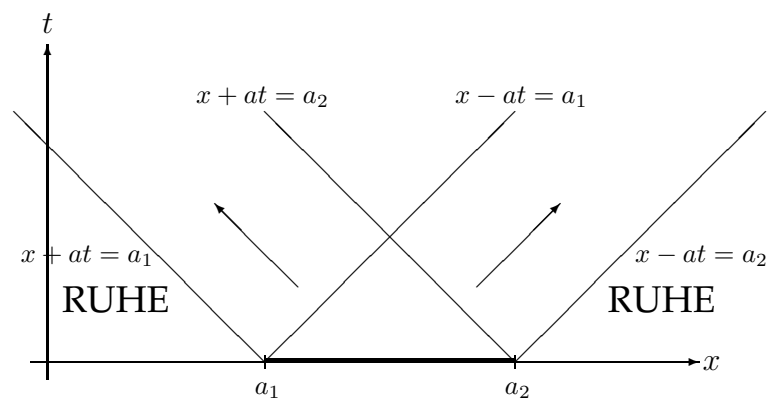


Grafik 16 Ausbreitung der Welle

Wir betrachten den Fall $x_0 > a_2$:

Die Welle erreicht x_0 zur Zeit $t_2 = \frac{x_0 - a_2}{a}$ mit einer scharf begrenzten Wellenfront. Sie ändert sich bis zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{x_0 - a_1}{a}$ und ist danach konstant. Ist $u_1 \equiv 0$, dann hört die Störung zur Zeit t_1 auf und es liegt eine scharf begrenzte Rückfront vor.

Der Punkt x_0 kann natürlich auch im Intervall $[a_1, a_2]$ liegen, bzw. links davon. Diese allgemeinere Situation ist in Grafik 17 dargestellt.



Grafik 17 Ausbreitung der Wellenberge

Ist $u_1 \equiv 0$, dann gilt das Huygensche Prinzip. Eine räumlich lokalisierte Anfangserregung ruft in jedem Punkt eine zeitlich begrenzte Erregung mit scharf begrenzter Vorder- und Rückfront hervor.

Dieses Prinzip gilt auch im dreidimensionalen Fall ($f \equiv 0$), im zweidimensionalen Fall jedoch nicht [26, S. 178ff].

Übungsaufgaben

- Ü23 Man zeige, dass für die Fundamentallösungen der Wellengleichung $E_1(x, t)$ und $E_2(x, t)$ folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2$ angenommen werden:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E_n(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial E_n(x, t)}{\partial t} = \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 E_n(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

- Ü24 Das Cauchy Problem für die zeitabhängige Schwingungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} u''(t) + a^2 u(t) &= f(t) \quad \text{für } t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \\ u'|_{t=0} &= u_1. \end{aligned}$$

Man bestimme die Auslenkung (Schwingung) $u(t)$ mit traditionellen Methoden und mit Hilfe von Fundamentallösungen.

(Hinweis: Man setze f und u durch Null für $t < 0$ fort, formuliere das obige Problem als Differentialgleichung im \mathbb{R}^1 und stelle die Lösung als Faltung mit der Fundamentallösung dar.)

- Ü25 Das Cauchy Problem für die Wärmeleitungsgleichung (nur zeitabhängig) lautet:

$$\begin{aligned} u'(t) + a u(t) &= f(t), \\ u|_{t=0} &= u_0. \end{aligned}$$

Man bestimme die Temperatur u zum Zeitpunkt t . Man zeige weiter, durch ein analoges Vorgehen wie in Aufgabe Ü24, dass die Lösung mit Hilfe der Fundamentallösung in der Form

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau + u_0 e^{-at}$$

dargestellt werden kann.

Kapitel 3

Schwache Lösungen von linearen elliptischen Randwertproblemen

Wir erinnern an den Begriff der schwachen Ableitungen, der im Kapitel 1.1 eingeführt wurde:

Es sei Ω ein Gebiet im \mathbb{R}^n , u und w seien Elemente aus $L^1_{loc}(\Omega)$. Die Funktion $w = D^\alpha u$ ist die schwache Ableitung von u im Gebiet Ω , falls gilt

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx =: (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v \, dx \quad \forall v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Diese Definition beruht auf der partiellen Integration und der speziellen Wahl der Funktionen v , die bis zur Ableitungsordnung $|\alpha|$ in einem Randstreifen von Ω verschwinden.

Sind die Elemente $v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$, dann treten Randterme auf.

Dieses Vorgehen kann auf partielle Differentialgleichungen übertragen werden. Betrachten wir eine lineare partielle Differentialgleichung der Ordnung $2m$ im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$A(x, D)u(x) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x)] = f(x).$$

Wir können diese Gleichung formal mit einer bis zur Ordnung m schwach differenzierbaren Funktion v multiplizieren und über Ω integrieren. Wir erhalten:

$$\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x)] v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Hierbei setzen wir zunächst voraus, dass die auftretenden klassischen Integrale definiert sind.

Durch partielles Integrieren erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} [a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u(x)] v(x) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u(x) D^{\alpha} v(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) \, dx \\
 &= \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

In $R(u, v)$ treten Ableitungen von u bis zur Ordnung $2m - 1$ und von v bis zur Ordnung $(m - 1)$ auf. Im Ausdruck

$$\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u(x) D^{\alpha} v(x) \, dx$$

treten Ableitungen von u und v nur bis zur Ordnung m auf.

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-\Delta u = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = f(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Wir nehmen an, dass u eine glatte Lösung ist. Multiplikation mit einer Funktion v , die bis zur ersten Ordnung schwach differenzierbar ist, Integration über Ω und partielles Integrieren führt zu:

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(x) d\sigma = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx. \tag{3.2}$$

Die Relation (3.1) bzw. das Beispiel (3.2) kann folgendermaßen verstanden werden:

Finde ein u , das schwache Ableitungen bis zur Ordnung m besitzt, so dass

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u(x) D^{\alpha} v(x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} R(u, v) \, dx + \int_{\Omega} f v \, dx$$

für alle v aus einem geeigneten Funktionenraum ist.

Wir sehen, dass wir „geeignete“ Funktionenräume für die Wahl von v definieren müssen. Weiterhin muss auch das Lösbarkeitsverhalten von u als Element eines Funktionenraumes bei gegebenem f und entsprechenden Randdaten diskutiert werden.

Passende Funktionenräume sind die Sobolevräume, auf die wir im nächsten Abschnitt eingehen werden.

Übungsaufgaben

Ü26 Man gebe schwache Formulierungen für folgende Randwertprobleme an:

a) $-\Delta u = f$ in Ω , $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$, wobei α und β nichtverschwindende Konstanten sind.

b) $-\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf Γ_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf Γ_2 .

Γ_1 und Γ_2 sind sich nicht überschneidende Randstücke, so dass $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$ ist.

Ü27 Die Durchbiegung u einer dünnen fest eingespannten Platte wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben (Kirchhoff Modell): Finde ein u , so dass:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Hierbei ist:

$$\Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}.$$

Man gebe eine schwache Formulierung dieses Randwertproblems an.

3.1 Sobolevräume

In diesem Abschnitt werfen wir nur einen kurzen Blick auf die Theorie der Sobolevräume. Genauere Ausführungen findet man z.B. in [1, 9, 27].

Zunächst erinnern wir, wie der Raum $L^p(\Omega)$ definiert war.

3.1.1 Der Raum $L^p(\Omega)$

Sei Ω eine nichtleere offene Menge im \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, $p \in [1, \infty]$.

Definition 20

$L^p(\Omega)$ bezeichnet die lineare Menge der Äquivalenzklassen von in Ω messbaren Funktionen

$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) für die

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

ist. Zwei Funktionen u und v sind äquivalent, falls $\int_{\Omega} |u - v|^p \, dx = 0$, das heißt, $u(x) = v(x)$ für fast alle $x \in \Omega$.

$L^2(\Omega)$ ist mit einem Skalarprodukt versehen

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\bar{v}(x) \, dx,$$

das die Norm

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

erzeugt.

Lemma 15 [1, S. 26 ff]

$L^p(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

ist ein Banachraum, $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum.

Wir haben bereits bewiesen (Lemma 3) dass die Elemente von $L^p(\Omega)$ durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$ approximiert werden können. Dies kann man ausnutzen um das Lemma von Du Bois-Reymond (Lemma 1) auf einem anderen Wege zu beweisen.

Lemma 16

Sei $u \in L^p(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} uv \, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.3)$$

Dann ist $u(x) = 0$ für fast alle $x \in \Omega$.

Beweis

Zu $p \in (1, \infty)$ betrachten wir den konjugierten Exponenten q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Da $C_0^\infty(\Omega)$ auch in $L^q(\Omega)$ dicht ist, folgt aus (3.3)

$$\int_{\Omega} uv \, dx = 0 \quad \forall v \in L^q(\Omega). \quad (3.4)$$

Es gilt nämlich: Sei $v \in L^q(\Omega)$. Dann existiert für ein $\varepsilon > 0$ ein Element $v_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass

$$\|v - v_0\|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon$$

ist.

Da

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx = (u, v - v_0) + (u, v_0) \stackrel{(3.4)}{=} (u, v - v_0)$$

und

$$|(u, v - v_0)| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v - v_0\|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon \|u\|_{L^p(\Omega)} = \varepsilon'$$

folgt (3.4). Die Funktion $u \in L^p(\Omega)$ erzeugt damit das 0-Funktional auf $L^q(\Omega)$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz ist u das Nullelement in $L^p(\Omega)$, was $u = 0$ fast überall bedeutet. ■

Dieses Lemma gestattet, die Definition 1 der schwachen Ableitung in Abschnitt 1.1 etwas zu modifizieren.

Definition 21

Sei $u \in L^p(\Omega)$. Die Funktion $w = D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ ist schwache Ableitung von u in Ω , falls

$$\int_{\Omega} wv \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

ist.

3.1.2 Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und $\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ wurden von S.L. Sobolev [24] vor etwa 60 Jahren eingeführt.

Definition 22

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionen, deren schwache Ableitungen $D^\alpha u$ für alle α mit $|\alpha| < k$ sich ebenfalls in $L^p(\Omega)$ befinden. Genauer:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.5)$$

In $W^{k,2}(\Omega)$ ist zusätzlich ein Skalarprodukt definiert

$$(u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} = (u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Bemerkung $W^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum [1, S. 45].

Die Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ können durch glattere Funktionen approximiert werden, jedoch im Allgemeinen nicht durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$, falls $k > 0$ ist. Um diese Approximation zu beschreiben, führen wir den Raum $H^{k,p}(\Omega)$ ein:

Definition 23

$H^{k,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ in der Norm (3.5).

Im Jahre 1964 haben Meyers und Serrin [16] folgenden Satz bewiesen.

Satz 12

Für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$H^{k,p}(\Omega) = \overline{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Beweisskizze [1, S. 52]

a) $H^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Da $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banachraum ist, muss sich $H^{k,p}(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}$ in $W^{k,p}(\Omega)$ befinden.

b) $W^{k,p}(\Omega) \subset H^{k,p}(\Omega)$.

Dieser Teil des Beweises wird in mehreren Schritten geführt, und wir geben nur eine Beweisskizze an.

1. Schritt Lokalisierung

Es wird der Satz über die Zerlegung (Partition) der Eins angewandt, der wie folgt lautet: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $\Omega \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, wobei $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ eine Familie von offenen Teilmengen im \mathbb{R}^n ist. Es existieren Funktionen $\eta_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass:

- (i) $\text{supp } \eta_i \subset \mathcal{O}_i$,
- (ii) $0 \leq \eta_i(x) \leq 1$ für $x \in \Omega$,
- (iii) zu jedem $x \in \Omega$ existiert eine endliche Indexmenge $M \subset I$, so dass $\eta_i(x) = 0$ für $i \in I \setminus M$,
- (iv) $\sum_{i \in I} \eta_i(x) = 1$ für $x \in \Omega$.

Die Menge von Funktionen $(\eta_i)_{i \in I}$ wird Zerlegung der Eins für die Überdeckung $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ von Ω genannt.

Bemerkung

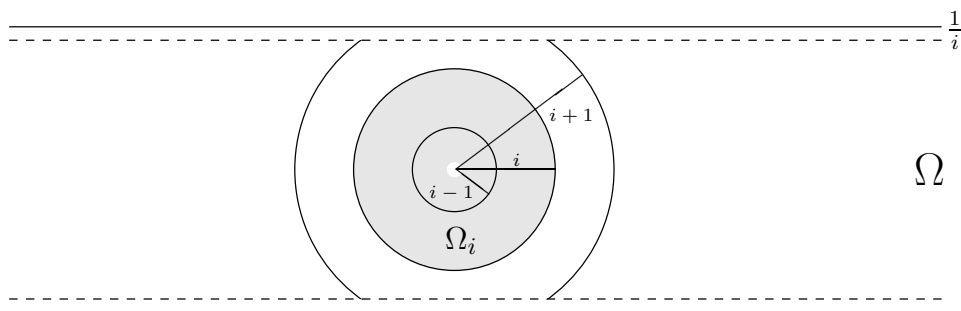
Wir hatten in Satz 2 gezeigt, dass es für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt, so dass $0 \leq \eta(x) \leq 1$, und $\eta(x) \equiv 1$ auf K ist.

2. Schritt Approximation auf beschränkten Teilmengen

Es wird eine abzählbare Überdeckung von Ω konstruiert:

$$\mathcal{O}_i = \Omega_{i+1} \cap (\overline{\Omega_{i-1}})^c, \quad i = 1, 2, \dots,$$

wobei $\Omega_i = \{x \in \Omega : |x| < i, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$ ist.



Grafik 18

Zu dieser Überdeckung von Ω wird eine Zerlegung der Eins $\{\eta_i\}_{i=1,2,\dots}$ betrachtet.

Die Funktionen $\eta_i u$ werden durch

$$J_{\varepsilon_i} * \eta_i u = c \int_{\Omega} \eta_i(x - \varepsilon_i y) u(x - \varepsilon_i y) e^{-\frac{1}{1-|y|^2}} dy$$

in $W^{k,p}(\Omega)$ approximiert, vgl. (1.13). Für $x \in \Omega_i$ gilt:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{i+2} \eta_j(x) u(x),$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{i+2} J_{\varepsilon_j} * (\eta_j u)(x) \in C^\infty(\Omega)$$

mit $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{(j+1)(j+2)}$.

Es gilt:

$$\|u - \varphi\|_{W^{m,p}(\mathcal{O}_i)} < \varepsilon$$

und schließlich $\|u - \varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \varepsilon$. ■

Bemerkung

$C^\infty(\bar{\Omega})$ ist nicht immer dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ (siehe Übungsaufgabe 29).

Es gilt jedoch die Aussage:

Satz 13

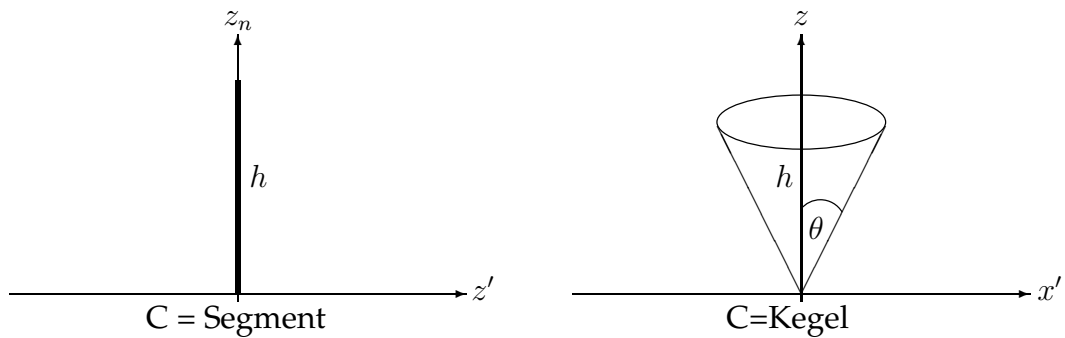
Besitzt Ω die Segment-Eigenschaft, dann sind die Einschränkungen auf Ω von Elementen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Die Segment-Eigenschaft (bzw. Kegeleigenschaft) ist wie folgt definiert:

Definition 24

Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Ω besitzt die gleichmäßige Segment- bzw. Kegeleigenschaft, falls es für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung V von x in \mathbb{R}^n gibt und neue Koordinaten $\{y_1, \dots, y_n\}$, so dass:

- (a) V ein Quader in den neuen Koordinaten ist,
 $V = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n\}$,
- (b) für jedes $y \in \bar{\Omega} \cap V$ und $z \in C$ ist $y - z \in \Omega$. Hierbei ist C ein offenes Segment
 $\{z : (0, \dots, 0, z_n) : 0 < z_n < h\}$ bzw. ein offener Kegel
 $C = \{z = (z', z_n) : \cot\theta|z'| < z_n < h\}$ für ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und für ein $h > 0$.



Grafik 19

Mit anderen Worten: für jeden Punkt $x \in \partial\Omega$ existiert ein lineares Segment oder ein Kegel C mit Spitze in x , so dass $C \setminus \{x\}$ in Ω enthalten ist. Gleichmäßig heißt, der gleiche Kegel wird in allen Punkten aus einer Umgebung V betrachtet.

Bemerkung

Eine beschränkte offene Teilmenge Ω von \mathbb{R}^n hat die gleichmäßige Kegeleigenschaft genau dann, wenn ihr Rand Lipschitz-stetig ist.

Dabei ist Ω von der Klasse $C^{k,1}$ (k -mal stetig differenzierbar und die k -ten Ableitungen sind Lipschitz-stetig, $k = 0, 1, 2, \dots$) falls in der Umgebung eines Randpunktes der Rand durch eine $C^{k,1}$ -Funktion $\varphi = \varphi(y') = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$ darstellbar ist und sich Ω unterhalb (bzw. auf einer Seite) vom Graphen von φ befindet. Ausführlicher heißt das:

In $V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) : -a_j < y_j < a_j, 1 \leq j \leq n-1\}$ gilt:

- $|\varphi(y')| < \frac{a_n}{2} \quad \forall y' \in V'$,
- $\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\}$,
- $\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V' : y_n = \varphi(y')\}$.

3.1.3 Äquivalente Normen in $W^{k,p}(\Omega)$

Wir erinnern zunächst daran, wann zwei Normen in einem linearen Raum X äquivalent sind.

Definition 25

Die Norm $\|\cdot\|_1$ ist äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_2$ im linearen Raum X , falls Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in X$$

ist.

Lemma 17

In $W^{k,p}(\Omega)$ sind folgende Normen äquivalent

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|u\|_{k,p,\max} &= \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, \\ \|u\|_{k,p,1} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Der Beweis soll als Übung (Ü30) ausgeführt werden.

3.1.4 Der Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$
Definition 26

Der Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ist die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm (3.5).

Bemerkungen

- Es ist $\mathring{W}^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Dies folgt aus Lemma 1.
- Für beschränkte Gebiete Ω und $k \geq 1$ ist $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ein echter Teilraum von $W^{k,p}(\Omega)$. Dies folgt aus Satz 13 (siehe auch Ü28).
- In $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ist die Norm äquivalent zu einer Seminorm in der nur die höchsten Ableitungen auftreten.

Satz 14

Für ein beschränktes Gebiet Ω sind die Norm (3.5) und die Seminorm

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

in $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ äquivalent.

Beweis

- Es ist offensichtlich, dass $|u|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ ist.
- Es gilt die Poincaré-Friedrichs Ungleichung: Es existiert eine Konstante $C = C(\text{diam}\Omega) > 0$, so dass gilt:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C |u|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega).$$

Sei u zunächst ein Element aus $C_0^\infty(\Omega)$. Da Ω beschränkt ist, gibt es eine Kugel $K_R(0)$, so dass $\Omega \subset K_R(0)$ ist. Für jeden Punkt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ gilt, dass $x_1 \in [-R, R]$ und wir haben

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \, d\xi.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &= \left| \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \, d\xi \right|^p \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|1\|_{L^q(-R,R)}^p \int_{-R}^{+R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^p \, d\xi \\ &= (2R)^{\frac{p}{q}} \int_{-R}^{+R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^p \, d\xi, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Nach Integration über Ω erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \leq (2R)^{\frac{p}{q}} \int_{\Omega} \left(\int_{-R}^{+R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^p \, d\xi \right) \, dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} (2R)^{\frac{p}{q}} \int_{-R}^{+R} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^p \, dx \, d\xi \\ &\stackrel{\frac{p}{q}=p-1}{=} (2R)^p \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (2R)^p |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \leq ((2R)^p + 1) |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p. \quad (3.6)$$

Allgemeiner gilt:

$$\begin{aligned} |u|_{W^{j-1,p}(\Omega)}^p &\leq (2R)^p |u|_{W^{j,p}(\Omega)}^p, \quad j = 1, 2, \dots, k, \\ \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{j=0}^k |u|_{W^{j,p}(\Omega)}^p \leq ((2R)^{pk} + (2R)^{p(k-1)} + \dots + (2R)^p + 1) |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \\ &= \frac{(2R)^{p(k+1)} - 1}{(2R)^p - 1} |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \\ &= C^p |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

woraus (3.6) für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt.

Wir betrachten nun ein $u \in \mathring{W}^{k,p}(\Omega)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir ein $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - \tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} < \varepsilon$.

Es ist

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &\leq \|u - \tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|\tilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
 &\leq \varepsilon + C|\tilde{u}|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
 &\leq \varepsilon + C|\tilde{u} - u|_{W^{k,p}(\Omega)} + C|u|_{W^{k,p}(\Omega)} \\
 &< \varepsilon(1 + C) + C|u|_{W^{k,p}(\Omega)}
 \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C|u|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Der Raum $\overset{\circ}{W}^{k,p}(\Omega)$ und insbesondere der Raum $\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ wird eine wichtige Rolle bei der schwachen Formulierung von Randwertproblemen spielen. Wir werden sehen, dass Elemente aus $\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ verschwindende Dirichletdaten auf dem Rand $\partial\Omega$ besitzen.

3.1.5 Einbettungssätze

Wir erläutern zunächst, was wir unter einer stetigen Einbettung eines Sobolevraumes in einen anderen bzw. in einen Raum stetig differenzierbarer Funktionen verstehen:

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$$

heißt, dass jedes Element (Äquivalenzklasse) von $W^{m,p}(\Omega)$ in $W^{j,q}(\Omega)$ (Menge von Äquivalenzklassen) enthalten ist und dass der Operator

$$\begin{aligned}
 I : W^{m,p}(\Omega) &\rightarrow W^{j,q}(\Omega), \\
 Iu &= u
 \end{aligned}$$

stetig ist. Das bedeutet, es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\|Iu\|_{W^{j,q}(\Omega)} = \|u\|_{W^{j,q}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

gilt.

Die Einbettung $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda \leq 1$, bzw. $W^{m,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega})$, bedeutet, dass jede Äquivalenzklasse aus $W^{m,p}(\Omega)$ eine Funktion enthält, die sich in $C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$ befindet. Der identische Operator

$$\begin{aligned}
 I : W^{m,p}(\Omega) &\rightarrow C^j(\overline{\Omega}), \\
 Iu &= u
 \end{aligned}$$

ist in diesem Sinne als Abbildung aufzufassen. Weiterhin ist I stetig, d.h. es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\|Iu\|_{C^j(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

ist.

Wir zitieren nun einige Einbettungssätze und verweisen auf [14, S. 300], [1, S. 97 ff], wo weitere Einbettungssätze und Beweise zu finden sind.

Satz 15 ([14, S. 300])

Sei Ω eine beschränkte Menge im \mathbb{R}^n , die eine Kegeleigenschaft besitzt. Dann gilt:

- (i) $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ für $kp < n$ und $p \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$.
- (ii) $W^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ für $kp = n$ und $p \leq q \leq \infty$.
Insbesondere ist $W^{n,1}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.
- (iii) $W^{k,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega})$, falls $(k-j)p > n, j = 0, 1, 2, \dots$.
- (iv) $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, falls $(k-j-1)p < n < (k-j)p$ und $0 < \lambda \leq \frac{(k-j)p-n}{p}$.
- (v) $W^{k,p}(\Omega) \subset C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, falls $(k-j-1)p = n$ und $0 < \lambda < 1$.

Folgerung

$$\begin{aligned} W^{1,2}(\Omega) &\not\subset C(\overline{\Omega}), \quad \text{aber } W^{2,2}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) \quad \text{für } n = 2, 3, \dots, \\ W^{k,2}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), \quad \text{für } k > \frac{n}{2}, \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), \quad \text{für } n = 2, p > 2. \end{aligned}$$

3.1.6 Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit reellem $s \geq 0$ (Sobolev-Slobodeskij-Raum)

Zur genauen Beschreibung des Verhaltens von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen und insbesondere zur Beschreibung der zugelassenen Glattheit der Randdaten, benötigt man Räume, bei der die Ableitungsordnung nicht ganzzahlig ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n, s \geq 0, s = k + \lambda$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < \lambda \leq 1$. Wir erinnern zunächst an die Definition von k -mal Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen:

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\overline{\Omega}) : H_{\alpha,\lambda}(u) = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}.$$

In $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ wird eine Norm eingeführt:

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha,\lambda}(u).$$

Es gilt $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega})$ und damit nimmt $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ eine Zwischenposition ein. Diese Idee wird auf Sobolevräume übertragen, um nicht ganzzahlige Differentiationsordnungen zu erklären.

Definition 27

Der Raum

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : I_\alpha(u) = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\lambda}} dx dy < \infty \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=k} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

wird Sobolev-Slobodeskij-Raum genannt.

Bemerkung

$W^{s,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum, separabel für $p \geq 1$ und reflexiv für $p > 1$.

$$\overset{\circ}{W}^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

Beispiel

Die Sprungfunktion einer reellen Variablen (siehe Grafik 20)

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört nicht zu $W^{1,2}(-2, 2)$, da $u'(x) = \delta_{-1}(x) + \delta_{+1}(x)$ im Distributionensinne ist. Jedoch ist $u \in W^{s,2}(-2, 2)$ für $0 \leq s < \frac{1}{2}$.

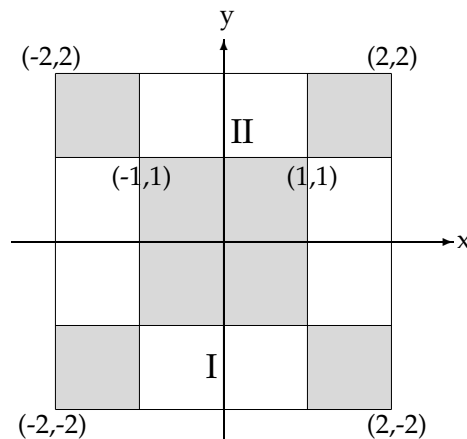


Grafik 20

Wir überzeugen uns davon. Wir betrachten die Funktion

$$v(x, y) = |u(x) - u(y)|$$

auf dem Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$.



Grafik 21

Über den schraffierten Flächen ist $v(x, y) = 0$, auf dem unschraffierten Gebiet ist $v(x, y) = 1$.

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} \int_{-2}^{+2} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy &= 2 \int_{-2}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy \\ &+ 2 \int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy \\ &= 2I + 2II. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x - y)^{1+2\lambda}} dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{2\lambda} \frac{1}{(x - y)^{2\lambda}} \Big|_{-1}^{+1} dy \\ &= \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{(1 - y)^{2\lambda}} - \frac{1}{(1 + y)^{2\lambda}} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \left[-\frac{(1 - y)^{-2\lambda+1}}{1 - 2\lambda} - \frac{(1 + y)^{-2\lambda+1}}{1 - 2\lambda} \right]_{-2}^{-1} < \infty, \end{aligned}$$

falls $-2\lambda + 1 > 0$, d.h. $\lambda < \frac{1}{2}$ ist.

Ähnliche Rechnungen können für das Integral II ausgeführt werden.

3.1.7 Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit $s < 0$

Wir erinnern an die Definition des Dualraums X' , eines Banachraums X , der über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} oder der komplexen Zahlen \mathbb{C} definiert ist. X' ist der lineare Raum aller stetigen (beschränkten) linearen Abbildungen $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) versehen mit der Operatornorm

$$\|F\|_{X'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|_X}.$$

Der Raum der Grundfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ war kein Banachraum. Wir hatten $\mathcal{D}'(\Omega)$ als Raum aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ (stetig im Sinne der Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$) eingeführt. Weiterhin hatten wir die Ordnung einer Distribution [Definition 5] definiert und somit auch gewissermaßen negative Ableitungsordnungen beschrieben. Um nun $W^{s,p}(\Omega)$ für $s < 0$ (negative Ableitungsordnungen) im Sinne der Distributionentheorie einführen zu können, greifen wir auf $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{-s,q}(\Omega)}} = \overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)$ zurück (beachte, dass $C_0^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen nicht dicht in $W^{-s,q}(\Omega)$ ist). Hierbei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definition 28

Sei $1 < p < \infty$, $s < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $W^{s,p}(\Omega)$ ist der Dualraum von $\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)$, das heißt

$$W^{s,p}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega))',$$

versehen mit der Norm

$$\|F\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{W^{-s,q}(\Omega)}}.$$

Die Einschränkung des Funktionals F auf $C_0^\infty(\Omega)$ definiert eine Distribution. Der folgende Satz charakterisiert die Elemente aus $W^{-k,p}(\Omega)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 16 [14, S. 294]

Sei $p \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. F ist aus $W^{-k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn eine Familie $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq k}$ von Elementen $f_\alpha \in L^p(\Omega)$ existiert, so dass gilt

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha,$$

wobei die Ableitungen $D^\alpha f_\alpha$ im Distributionensinn zu verstehen sind.

Beweis

Es wird eine Abbildung

$$I : \overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega) \rightarrow \prod_{|\alpha| \leq k} L^q(\Omega) = X$$

$$Iu = \{D_u^\alpha\}_{|\alpha| \leq k}$$

betrachtet. I ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)$ und $I(\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)) \subset X$.

Für $F \in W^{-k,p}(\Omega)$ definieren wir

$$\varphi(\{u_\alpha\}) := F(I^{-1}(\{u_\alpha\})_{|\alpha| \leq k}).$$

φ ist ein lineares stetiges Funktional auf $I(\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega))$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung ϕ von φ auf X . Nach dem Satz von Riesz existiert eine Familie $\{f_\alpha \in L^p(\Omega)\}_{|\alpha| \leq k}$, so dass gilt:

$$\phi(\{u_\alpha\}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} u_\alpha(x) f_\alpha(x) \, dx \quad \forall \{u_\alpha\}_{\alpha \in k} \in X.$$

Daher ist

$$F(I^{-1}(\{u_\alpha\})_{|\alpha| \leq k}) = F(u) = \varphi(\{D^\alpha u\}_{|\alpha| \leq k}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u f_\alpha(x) \, dx$$

für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ bzw. $u \in \overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)$.

Daraus folgt:

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha$$

im Distributionensinn. ■

3.1.8 Spurräume

Um Randwertprobleme in Sobolevräumen behandeln zu können, müssen wir für Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ Randdaten auf $\partial\Omega$ erklären. Da diese nicht immer im klassischen Sinn als Einschränkungen von stetigen Funktionen auf dem Rand definiert werden können, spricht man davon, dass die Randdaten im Spursinn angenommen werden. Diese befinden sich in so genannten Spurräumen und stimmen mit der klassischen Einschränkung überein, falls die Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ glatt bis zum Rand sind. Die Hauptidee ist, einen Diffeomorphismus (differenzierbare eineindeutige Koordinatentransformation) zu betrachten, der lokal eine Umgebung des Randes geschnitten mit Ω in den Halbraum \mathbb{R}_+^n abbildet. Die Einschränkungen der transformierten Funktion auf \mathbb{R}^{n-1} werden dann untersucht. Dazu ist eine gewisse Glattheit des Randes $\partial\Omega$ erforderlich.

Satz 17 [9, S. 37-39], [14, S. 337], [27, S. 130]

- (i) Sei $\Omega \in C^{k,1}$ und beschränkt, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \leq k + 1$, $s - \frac{1}{p} = l + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann existiert eine eindeutige lineare, stetige, surjektive Abbildung

$$T_l : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

so dass

$$T_l u = \left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial n^l} \right) \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

ist.

Hierbei ist \vec{n} der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$, T_l wird Spuroperator genannt.

- (ii) Für $p = 2$, s reell, $k \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $-\frac{1}{2} + k < s < k - 1 + \lambda$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $\Omega \in C^{k,\lambda}$, dann ist

$$T_{k-1} : W^{s,2}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{k-1} W^{s-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

eine surjektive stetige Abbildung.

Bemerkungen

- Insbesondere gilt für Gebiete mit einem Lipschitz Rand ($k = l = 0$, $s = 1$)

$$T_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

bzw. $T_0 : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ für $\frac{1}{p} < s \leq 1$.

- Ist $s = m$ ganzzahlig, dann ist $l = m - 1$ und

$$T_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

- Die Stetigkeit des Spuroperators ist äquivalent zu der Aussage:
Es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j k}{\partial n^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

ist.

- Die Elemente aus $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ sind wie folgt charakterisiert:

$$\mathring{W}^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\Omega) : T_l u = 0\},$$

d.h. $u = \frac{\partial u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^l u}{\partial n^l} = 0$ auf $\partial\Omega$ im Spursinn.

- Ist $\Omega \in C^{0,1}$, dann ist $\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ im Spursinn}\}$.

3.1.9 Fortsetzung vom Rand ins Gebiet

Der Spuroperator ist stetig rechts-invertierbar, d.h. es existiert eine stetige Rechts-Inverse von T_l , die den Elementen aus den Spurräumen Elemente aus den Sobolevräumen im Gebiet Ω zuordnet. Dieser Fortsetzungsoperator ist unabhängig von p .

Fortsetzungssatz [27, S. 133], [14, S. 338], [9, S. 37 ff]

Es seien die Voraussetzungen von Satz 17 erfüllt. Dann existiert ein stetiger linearer Operator

$$F_l : \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\Omega),$$

so dass für jedes Tupel $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ mit $F_l(u_0, u_1, \dots, u_l) = v$ die Relationen

$$\frac{\partial^j v}{\partial n^j} = u_j \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, l$$

gelten.

Bemerkungen

- Ein zu T_l rechtsinverser Operator F_l ist durch die Relation $T_l F_l = I_Y$ definiert, wobei Y der Bildraum und I_Y der identische Operator in Y sind. Er ist nicht eindeutig bestimmt. Die Stetigkeit besagt, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \|F_l(u_0, \dots, u_l)\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j v}{\partial n^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \\ &= C \sum_{j=0}^l \|u_j\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

für alle Elemente $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ist.

Übungsaufgaben

Ü28 Sei Ω ein beschränktes Intervall im \mathbb{R}^1 . Man zeige, dass $W_0^{1,p}(\Omega)$ echt in $W^{1,p}(\Omega)$ enthalten ist.

Ü29 Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$.

Die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist aus $W^{1,p}(\Omega)$. Es gibt jedoch keine Funktion $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, so dass $\|u - \varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$ für ein hinreichend kleines ε ist.

Ü30 Man zeige, dass in $W^{k,p}(\Omega)$ folgende Normen äquivalent sind:

$$(1) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

$$(2) \|u\|_{k,p,max} = \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \},$$

$$(3) \|u\|_{k,p,1} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ü31 Man zeige, dass $W^{k,p_1}(\Omega) \subset W^{k,p_2}(\Omega)$ für $p_1 > p_2 \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ist. Weiterhin gebe man ein Beispiel an, das zeigt, dass $W^{k,p_1}(\Omega)$ eine echte Teilmenge von $W^{k,p_2}(\Omega)$ ist.

3.2 Schwache Formulierung von Randwertproblemen

Die Grundidee ist, die in der Einleitung des Kapitels 3 ausgeführte partielle Integration der linearen Differentialgleichungen mit einer funktionalanalytischen Betrachtungsweise zu verbinden.

Wir erinnern dazu an den allgemeinen Begriff einer Operatorgleichung

$$\begin{aligned} A : V &\rightarrow W, \\ Au &= f, \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei A den Banachraum V in den Banachraum W abbildet. Ist $W = V'$, so besagt die Relation (3.7)

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V, \tag{3.8}$$

wobei hier das Symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die duale Paarung bedeutet, d.h. das Funktional $f \in V'$ wird auf die Elemente $v \in V$ angewandt.

Ist A ein linearer stetiger Operator, der V in V' abbildet, geschrieben als $A \in L(V, V')$, dann erzeugt A eine Bilinearform auf $V \times V$, die wie folgt definiert ist:

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in V.$$

Wir definieren zunächst, was wir unter einer beschränkten Bilinearform verstehen.

Definition 29

Es sei V ein reeller Banachraum und $a(\cdot, \cdot)$ eine Abbildung von $V \times V$ in \mathbb{R} .

(1) $a(\cdot, \cdot)$ ist eine Bilinearform, falls

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v), \\ a(u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 a(u, v_1) + \lambda_2 a(u, v_2), \\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \forall u_1, u_2, u, v_1, v_2, v \in V &\text{ gilt.} \end{aligned}$$

(2) $a(\cdot, \cdot)$ ist beschränkt (stetig), falls ein $c > 0$ existiert, so dass

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \tag{3.9}$$

ist.

Satz 18

(a) Sei V ein reeller Banachraum und $A \in L(V, V')$. Dann ist $a(u, v) := \langle Au, v \rangle$ eine stetige Bilinearform auf $V \times V$.

(b) Einer stetigen Bilinearform kann man eineindeutig einen Operator $A \in L(V, V')$ zuordnen, so dass

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall u, v \in V$$

und

$$\|A\|_{L(V, V')} \leq c$$

gilt. Hierbei ist c die Konstante aus Ungleichung (3.9).

Beweis

a) $A \in L(V, V')$ sei gegeben. Wir setzen

$$a(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Diese Form ist eine Bilinearform und sie ist stetig. Die Linearität ist offensichtlich und wir zeigen die Stetigkeit:

$$|a(u, v)| = |\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\|_{V'} \|v\|_V \leq \|A\|_{L(V, V')} \|u\|_V \|v\|_V.$$

b) Es sei $a(\cdot, \cdot)$ gegeben. Wir halten ein $u \in V$ fest und führen das Funktional F_u ein:

$$F_u v := a(u, v) \quad \forall v \in V.$$

F_u ist linear und es ist

$$|F_u v| = |a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V = c' \|v\|_V;$$

d.h. F_u ist aus dem Dualraum V' und $\|F_u\|_{V'} \leq c' = c \|u\|_V$.

Wir setzen

$$Au := F_u \quad \forall u \in V.$$

A ist linear und bildet V in V' ab, d.h. $A \in L(V, V')$.

Weiterhin ist A stetig

$$\|Au\|_{V'} = \|F_u\|_{V'} \leq c \|u\|_V$$

und $\|A\| \leq c$.

Damit erhalten wir

$$\langle Au, v \rangle = \langle F_u, v \rangle = F_u v = a(u, v). \quad \blacksquare$$

Die Operatorgleichung $Au = f$ ist genau dann erfüllt, falls

$$\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle = a(u, v) \quad \forall v \in V \text{ ist.}$$

Das Element $u \in V$ heißt **schwache Lösung** von $Au = f$.

Satz 19 (Lax–Milgram)

1. Fassung: Es sei V ein reeller reflexiver Banachraum und $a(\cdot, \cdot)$ eine reelle Bilinearform auf $V \times V$. Wir nehmen an, dass Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ existieren, so dass

- (1) $|a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$
- (2) $|a(u, u)| \geq c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V$

ist.

Dann existiert für jedes $f \in V'$ ein eindeutig bestimmtes Element $u = u^* \in V$ mit

$$a(u^*, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V$$

und $\|u^*\|_V \leq \frac{1}{c_2} \|f\|_{V'}$.

2. Fassung: Es sei V ein reeller reflexiver Banachraum und $A \in L(V, V')$. Wir setzen voraus, dass Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ existieren, so dass gilt

- (1') $|\langle Au, v \rangle| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V,$
- (2') $\langle Au, u \rangle \geq c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$

Dann existiert A^{-1} und ist aus $L(V', V)$.

Beweis

Nach Satz 18 sind beide Fassungen äquivalent und wir beweisen die 2. Fassung. Aus der Voraussetzung (2') folgt, dass der Nullraum von A nur das Nullelement enthält. Daher existiert A^{-1} auf dem Wertebereich von A , $\text{Im}(A)$. Wir zeigen in zwei Schritten, dass A surjektiv ist:

1. Schritt: $\text{Im}(A)$ ist abgeschlossen in V' . Es sei (w_n) eine Cauchy-Folge von Elementen aus $\text{Im}(A)$. Da V' ein Banachraum ist, existiert ein $w \in V'$ mit $\|w_n - w\|_{V'} \rightarrow 0$. Wir bezeichnen $A^{-1}w_n = u_n$. Aus (2') folgt:

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_V^2 &\leq \frac{1}{c_2} \langle A(u_n - u_m), u_n - u_m \rangle \\ &\leq \frac{1}{c_2} \|w_n - w_m\|_{V'} \|u_n - u_m\|_V . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\|u_n - u_m\|_V \leq \frac{1}{c_2} \|w_n - w_m\|_{V'}$$

und (u_n) ist eine Cauchy-Folge in V . Da V ein Banachraum ist, besitzt diese Cauchy-Folge einen Grenzwert u . A ist stetig, daher muss $w = Au$ sein und $w \in \text{Im}(A)$.

2. Schritt: $N(A') = \{0\}$. Wir erinnern, dass der duale Operator folgendermaßen definiert ist: $A : X \rightarrow Y$, $A' : Y' \rightarrow X'$, so dass $\langle A'y', x \rangle = \langle y', Ax \rangle \quad \forall x \in X, \forall y' \in Y'$ ist.

Sei nun $X = V$, $Y = V'$. Dann gilt $A' : V'' \rightarrow V'$ und

$$\langle A'y'', x \rangle = \langle y'', Ax \rangle \quad \forall x \in V, \quad \forall y'' \in V'' .$$

Da V reflexiv ist, existiert eine normisomorphe Abbildung $J : V \rightarrow V''$, so dass

$$\langle x', x \rangle = \langle x'', x' \rangle = \langle Jx, x' \rangle \quad \forall x \in V, \forall x' \in V', \forall x'' \in V''$$

ist. Daher ist $\langle A'y'', x \rangle = \langle A'Jy, x \rangle = \langle Jy, Ax \rangle = \langle Ax, y \rangle$.

Für $A'J = A^* : V \rightarrow V'$ erhalten wir:

$$\langle A^*y, x \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in V .$$

Für $y \in N(A^*) \subset V$ gilt:

$$\langle Ax, y \rangle = 0. \quad \forall x \in V .$$

Setzen wir $x = y$, dann ist

$$\langle Ay, y \rangle = 0$$

und aus (2') folgt, dass $y = 0$ ist. Damit ist auch $N(A') = \{0\}$. Die normale Lösbarkeit ($\text{Im}(A) = \overline{\text{Im}(A)}$) und $N(A') = \{0\}$ sichert, dass A eine surjektive Abbildung ist (vgl. [13] Theorem 3.2, S. 11).

Weiterhin gilt:

$$\|A^{-1}f\|_V^2 = \|u^*\|_V^2 \leq \frac{1}{c_2} \langle Au^*, u^* \rangle \leq \frac{1}{c_2} \|f\|_{V'} \|u^*\|_V ,$$

woraus

$$\|u^*\|_V \leq \frac{1}{c_2} \|f\|_{V'}$$

folgt. ■

Wir beweisen noch eine Variante des Satzes von Lax-Milgram, wenn die Bilinearform auf einem Paar verschiedener Hilberträume (bzw. reflexiver Banachräume) $V_1 \times V_2$ definiert ist.

Satz 20 [18, S. 294]

Sei $a(u, v)$ eine reelle Bilinearform, die auf $V_1 \times V_2$ definiert ist. V_1 und V_2 sind Hilberträume oder reflexive Banachräume. Weiterhin nehmen wir an, dass ein Banachraum B existiert, so dass $V_2 \subset B$ topologisch und algebraisch eingebettet ist.

Es gelte:

- (i) $a(u, v) \leq c_1 \|u\|_{V_1} \|v\|_{V_2} \quad \forall u \in V_1, \forall v \in V_2,$
- (ii) $\sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u, v)| \geq c_2 \|u\|_{V_1} \quad \forall u \in V_1,$
- (iii) $\sup_{\|v\|_{V_1} \leq 1} |a(u, v)| \geq c_3 \|v\|_B \quad \forall v \in V_2.$

Weiterhin sei $f \in V_2'$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u^* \in V_1$, so dass:

$$a(u^*, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_2$$

ist. Es gilt:

$$\|u^*\|_{V_1} = \frac{1}{c_2} \|f\|_{V_2'}. \quad (3.10)$$

Beweis

Wir führen den Beweis für Hilberträume V_1 und V_2 aus. Die Übertragung auf reflexive Banachräume erfolgt analog zum Beweis des Satzes von Lax-Milgram.

1. Schritt: Zunächst führen wir eine Abbildung $A : V_1 \rightarrow V_2$ ein, so dass

$$a(u, v) = (A u, v)_{V_2} \quad \forall v \in V_2, \forall u \in V_1 \quad (3.11)$$

ist. Hierbei bezeichnet $(\cdot, \cdot)_{V_2}$ das Skalarprodukt in V_2 .

Wir überlegen, dass (3.11) sinnvoll ist. Dazu halten wir $u \in V_1$ fest und betrachten $a(u, v)$ als lineares stetiges Funktional auf V_2 , was nach Voraussetzung (i) möglich ist. Nach dem Satz von Riesz existiert ein eindeutig bestimmtes Element $A u \in V_2$, so dass

$$a(u, v) = (A u, v)_{V_2} \quad \forall v \in V_2$$

ist. Durchläuft u den gesamten Raum V_1 , dann erhalten wir (3.11).

2. Schritt: Wir zeigen, A ist eine lineare stetige, eineindeutige Abbildung von V_1 auf $\text{Im}(A) \subset V_2$.

- Es ist offensichtlich, dass A linear ist.
- A ist stetig, denn für alle $u \in V_1$ gilt:

$$\sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |(A u, v)_{V_2}| = \|A u\|_{V_2} = \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u, v)| \stackrel{(i)}{\leq} c_1 \|u\|_{V_1}.$$

- Der Nullraum von A besteht nur aus dem Nullelement. Betrachten wir ein Element u aus dem Nullraum, d.h. $A u = 0$. Dann ist:

$$0 = \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |(A u, v)_{V_2}| = \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u, v)| \stackrel{(ii)}{\geq} c_2 \|u\|_{V_1} \geq 0,$$

woraus $u = 0$ folgt.

3. Schritt: Wir zeigen, dass $\text{Im}(A) = A(V_1) = V_2$ ist.

Aus den Eigenschaften von A , die wir im zweiten Schritt gezeigt haben, folgt, dass $\text{Im}(A)$ abgeschlossen in V_2 ist (Satz vom abgeschlossenen Graphen, z.B. [10, S. 241-243]). Wir nehmen nun an, dass ein Element $v_0 \neq 0$ aus V_2 existiert, das nicht im Bild $\text{Im}(A)$ enthalten ist, $v_0 \perp \text{Im}(A)$.

Da

$$a(u, v_0) = (A u, v_0)_{V_2} = 0 \quad \forall u \in V_1,$$

ist auch

$$\sup_{\|u\|_{V_1} \leq 1} a(u, v_0) = \sup_{\|u\|_{V_1} \leq 1} (A u, v_0)_{V_2} = 0 \stackrel{(iii)}{\geq} c_3 \|v_0\|_B \geq 0.$$

Damit ist $v_0 = 0$ in B . Da $V_2 \subset B$, ist v_0 auch das Nullelement in V_2 . Dies widerspricht der Annahme, d.h. A ist eine Abbildung von V_1 auf V_2 .

4. Schritt: Wir zeigen, dass die Behauptung gilt. Aus den Schritten 2 und 3 folgt, dass A eine eindeutige, stetige Abbildung von V_1 auf V_2 ist und daher eine stetige Inverse A^{-1} besitzt.

Wir betrachten nun die Relation

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_2.$$

Es ist

$$a(u, v) = (A u, v)_{V_2} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_2,$$

d.h. nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist $A u = J f$, wobei J den Rieszschen Isomorphismus von V_2' auf V_2 bezeichnet. Damit ist $u = u^* = A^{-1}(J f)$ die gesuchte, eindeutig bestimmte Lösung in V_1 .

Die Abschätzung (3.10) folgt aus (ii):

$$\|u^*\|_{V_1} = \|A^{-1}(J f)\|_{V_1} \leq \frac{1}{c_2} \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u^*, v)| = \frac{1}{c_2} \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} (J f, v) = \frac{1}{c_2} \|f\|_{V_2'}. \quad \blacksquare$$

Beispiele für das Paar von Räumen V_1 und V_2 sind:

- $V_1 = W^{m,p}(\Omega)$, $V_2 = W^{m,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
- $V_1 = \overset{\circ}{W}^{m,2}(\Omega)$, $V_2 = W^{-m,2}(\Omega)$,
- $V_1 = W_{\delta_1}^{m,p}(\Omega)$, $V_2 = W_{\delta_2}^{m,p}(\Omega)$,

wobei δ_1 und δ_2 Gewichte sind und V_1, V_2 entsprechende gewichtete Sobolevräume bezeichnen.

Übungsaufgaben

Ü32 Der Beweis des Satzes von Lax-Milgram für Bilinearformen auf $V_1 \times V_2$ ist zu vervollständigen.

a) Sei V ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_V$. Man zeige, dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} |(w, v)_V| = \|w\|_V.$$

b) Man zeige direkt, dass $\text{Im}(A)$ in V abgeschlossen ist.

Ü33 Sei V ein Hilbertraum und $a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische stetige Bilinearform auf $V \times V$. Auf einem Teilraum $V_0 \subset V$ sei $a(\cdot, \cdot)_{V_0}$ -elliptisch. Man zeige, dass $(V_0, a(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum ist.

Ü34 Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\text{div}(a(x)\nabla u(x)) + \vec{b}(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{in } \Omega, \\ u(x) &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Unter welchen Bedingungen an $a(\cdot)$, $\vec{b}(\cdot)$ und $c(\cdot)$ ist die zugehörige Bilinearform beschränkt und V -elliptisch?

3.3 Elliptische Randwertprobleme

Wir beginnen, die in den Abschnitten 3.1 und 3.2 entwickelte Theorie auf Beispiele von Randwertproblemen anzuwenden.

3.3.1 Das Dirichletproblem für die Poissongleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, d.h. $\Omega \in C^{0,1}$. So kann Ω z.B. ein Polygon sein.

Klassische Formulierung

Die klassische Formulierung des Dirichletproblems für die Poissongleichung lautet:

Für $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ finde ein $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so dass:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.12)$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.13)$$

gilt. Dieses Problem hat nicht immer eine Lösung in $C^2(\overline{\Omega})$.

Schwache Formulierung

Wir wollen eine schwache Formulierung für das Randwertproblem (3.12), (3.13) angeben. Dazu überführen wir zunächst (3.12), (3.13) in ein Randwertproblem mit homogenen Dirichletdaten in geeigneten Sobolevräumen. Sei $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$. Nach dem Fortsetzungssatz in Abschnitt 3.1.8 existiert ein $\hat{g} \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass die Spur von \hat{g} auf $\partial\Omega$ mit g übereinstimmt. Wir stellen für die Funktion $w = u - \hat{g}$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ein neues Randwertproblem auf:

Finde ein $w \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt:

$$-\Delta w = -\Delta(u - \hat{g}) = f + \Delta\hat{g} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.14)$$

$$w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.15)$$

Hierbei ist die Ableitung im Distributionensinn zu verstehen. Das heißt, die Differentialgleichung (3.14) ist folgendermaßen zu lesen:

$$\langle -\Delta w, v \rangle = \langle f + \Delta\hat{g}, v \rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.16)$$

Nach partieller Integration können wir (3.16) schreiben als:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla \hat{g} \cdot \nabla v \, dx,$$

da w und $\hat{g} \in W^{1,2}(\Omega)$ sind.

Wir betrachten den Raum $V = \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$. Da die Elemente $v \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ auf dem Rand $\partial\Omega$ im Spursinn verschwinden, wird die Randbedingung (3.15) durch Elemente aus $\mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ realisiert.

Eine schwache Formulierung von (3.12), (3.13) lautet: Für ein $f \in V' = W^{-1,2}(\Omega)$ finde ein $w \in V$, so dass gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, w \rangle - \int_{\Omega} \nabla \hat{g} \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (3.17)$$

Um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit Hilfes des Satzes von Lax-Milgram nachweisen zu können, müssen wir uns überzeugen, dass durch den Ausdruck

$$- \int_{\Omega} \nabla \hat{g} \cdot \nabla v \, dx = \langle G, v \rangle$$

ein Element $G \in V'$ definiert wird. Offensichtlich ist G ein lineares Funktional und wir müssen nur die Stetigkeit nachweisen.

Es gilt nach wiederholter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} |\langle G, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \nabla \hat{g} \cdot \nabla v \, dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \right| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lemma 18

Das schwache Randwertproblem, für $f \in W^{-1,2}(\Omega)$, $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ finde ein $w \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle - a(\hat{g}, v) \quad \forall v \in V$$

ist, besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Hierbei ist $\hat{g} \in W^{1,2}(\Omega)$ eine Fortsetzung von $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.

Beweis

Wir überzeugen uns, dass die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram erfüllt sind.

$a(\cdot, \cdot)$ ist eine Bilinearform auf $V \times V$, $V = \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$. Sie ist stetig mit der Konstanten $C_1 = 1$. Dies folgt analog zur Abschätzung (3.18).

Es bleibt noch übrig, die V -Elliptizität zu zeigen. Diese folgt unmittelbar aus der Friedrichs-Poincaré Ungleichung (3.6)

$$a(w, w) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx = |w|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{((2R)^2 + 1)} \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2. \quad \blacksquare$$

Folgerung

Die Funktion $u = w + \hat{g} \in W^{1,2}(\Omega)$ ist eine eindeutig bestimmte Distributionenlösung (bzw. schwache Lösung) des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f \in W^{-1,2}(\Omega)$ und $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ sind.

Die Ableitung ist im Distributionensinn zu verstehen, die Randwerte werden im Spürsinn angenommen.

3.3.2 Das Neumannproblem für die Poissongleichung

Wir beginnen mit der klassischen Formulierung: Gesucht ist ein $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so dass für $f \in C(\overline{\Omega}), g \in C(\partial\Omega)$

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.20)$$

gilt.

Wir wissen nach (2.5), dass dieses Problem nur lösbar ist, falls:

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, d\sigma(x) = 0. \quad (3.21)$$

Weiterhin gilt: falls eine Lösung aus $C^2(\overline{\Omega})$ existiert, so ist diese nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Diese Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen werden auch bei der Untersuchung des schwach formulierten Problems eine Rolle spielen.

Schwache Formulierung

Sei $f \in (W^{1,2}(\Omega))'$, $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) = (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$, $\Omega \in C^{0,1}$.

Die schwache Formulierung lautet: *Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega). \quad (3.22)$$

Hierbei ist $T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ der Spuroperator und $\langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega}$ ist als Anwendung des Funktioals $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ auf $Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ zu verstehen. Die rechte Seite ist insgesamt durch ein lineares und stetiges Funktional aus $(W^{1,2}(\Omega))'$ darstellbar.

Man beachte, dass nach dem Spursatz (Satz 17)

$$|\langle G, v \rangle_{\Omega}| := |\langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega}| \leq \|g\|_{(W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'} \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \leq c \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

gilt.

Die Bilinearform ist stetig auf $V \times V$, $V = W^{1,2}(\Omega)$ (vgl. Abschätzung (3.18)). Sie ist jedoch nicht V -elliptisch. Um dies zu sehen, betrachte man $u = c \equiv \text{const} \neq 0$. Es ist:

$$a(c, c) = \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla c \, dx = 0 \not\geq c_2 \|c\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = c_2 \int_{\Omega} |c|^2 \, dx > 0.$$

Um die V -Elliptizität retten zu können, muss der Raum $W^{1,2}(\Omega)$ durch den Faktorraum $W^{1,2}(\Omega)/\{\mathbb{R}\} = V$ ersetzt werden.

Die Elemente aus V sind Äquivalenzklassen, deren Elemente sich durch konstante Funktionen $c(x) \equiv c, c \in \mathbb{R}$, unterscheiden, d.h. $v(x) \sim u(x) \Leftrightarrow u(x) = v(x) + c$.

Lemma 19

- a) In den Äquivalenzklassen aus V gibt es genau einen Vertreter v , so dass $\int_{\Omega} v(x) dx = 0$ ist.
- b) Jede Äquivalenzklasse aus V enthält genau einen Vertreter w , so dass $\int_{\partial\Omega} w(x) d\sigma = 0$ ist.

Beweis

- a) Wir betrachten eine Äquivalenzklasse aus V und greifen ein Element v_0 heraus. Es gibt eine Konstante c , so dass gilt

$$\int_{\Omega} v_0(x) dx = c\mu(\Omega).$$

Die Funktion $v = v_0 - c$ hat die Eigenschaft

$$\int_{\Omega} (v_0 - c) dx = 0.$$

- b) Diese Aussage kann analog zu a) gezeigt werden. ■

Wir können also den Faktorraum V wie folgt charakterisieren:

- a) $V_{\Omega} = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} v dx = 0\}$,
- b) $V_{\partial\Omega} = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\partial\Omega} v d\sigma = 0\}$.

Lemma 20

In V_{Ω} und $V_{\partial\Omega}$ gilt: Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass:

$$\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c|v|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Beweis [25, S. 382], [14, S. 298, 382 ff]

Es gelten folgende Poincarésche Ungleichungen: Sei $\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|\leq k-1} \left| \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x) dx \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq c \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|\leq k-1} \left| \int_{\partial\Omega} D^{\alpha}u(x) d\sigma \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Daher folgt für $k = 1, p = 2$

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \left| \int_{\Omega} u^2 dx \right| \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \left| \int_{\partial\Omega} u(x) d\sigma \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

Folgerung

Das schwach formulierte Neumannproblem:

Finde ein $u \in V_{\Omega}$, bzw. $u \in V_{\partial\Omega}$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega} \quad (3.23)$$

für alle $v \in V_{\Omega}$ (bzw. für alle $v \in V_{\partial\Omega}$), für jedes Paar $f \in V'_{\Omega}$, $g \in (TV_{\Omega})'$ bzw. $f \in V'_{\partial\Omega}$, $g \in (TV_{\partial\Omega})'$ eine eindeutige Lösung besitzt. Hier ist T der Spuroperator.

Bemerkung

Für $v \equiv 1$ würde aus (3.23) folgen

$$0 = \langle f, 1 \rangle_{\Omega} + \langle g, 1 \rangle_{\partial\Omega},$$

was der Lösbarkeitsbedingung (3.21) entspricht.

3.3.3 Das Robinproblem (3. Randwertproblem) für die Poissongleichung

Das klassische Robin-Problem (auch Newton-Problem genannt) lautet:

Finde ein $u \in C^2(\bar{\Omega})$, so dass für ein $f \in C(\bar{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega)$ gilt

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.24)$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}(x) + \beta u(x) = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.25)$$

Wir nehmen an, dass α und β positive reelle Zahlen sind und geben eine schwache Formulierung für das Problem (3.24), (3.25) an. Dazu nehmen wir an, dass $f \in (W^{1,2}(\Omega))'$ und $g \in (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$ sind. Nach skalarer Multiplikation von (3.24) mit Elementen aus $W^{1,2}(\Omega)$ und partieller Integration sowie unter Beachtung der Randbedingung (3.25) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} Tv d\sigma + \langle f, v \rangle_{\Omega} \\ &= \left\langle \frac{g}{\alpha}, Tv \right\rangle_{\partial\Omega} + \langle f, v \rangle_{\Omega} - \int_{\partial\Omega} \frac{\beta}{\alpha} uv d\sigma. \end{aligned}$$

Die schwache Formulierung von (3.24), (3.25) lautet daher:

Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma = \langle f, v \rangle_{\partial\Omega} + \left\langle \frac{g}{\alpha}, Tv \right\rangle_{\partial\Omega}$$

für alle $v \in W^{1,2}(\Omega)$ ist.

Wir überprüfen, ob die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ stetig und $W^{1,2}(\Omega)$ -elliptisch ist.

- Die Bilinearform ist beschränkt. Wir haben nur zu zeigen, dass

$$\left| \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma \right| \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} uv \, d\sigma \right| &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\stackrel{\text{Def.27}}{\leq} \|u\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \|v\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Wir sehen uns jetzt die V -Elliptizität an:

$$\begin{aligned} |a(u, u)| &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \\ &= |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \frac{\beta}{\alpha} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \\ &\stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung folgt aus einer Poincaré-Ungleichung ([25, S. 385, 386]).

Bemerkung

Haben α und β unterschiedliche Vorzeichen, z.B. $\alpha > 0, \beta < 0$, dann existieren Konstanten $C_2 > 0$ und $C_3 > 0$, so dass:

$$a(u, u) = |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{|\beta|}{\alpha} \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\sigma \geq C_2 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - C_3 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.26)$$

(siehe [27, S. 338/303/282]) ist.

Die Abschätzung (3.26) besagt, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ $W^{1,2}(\Omega)$ -koerziv ist, d.h. eine Fredholmeigenschaft ist gesichert.

3.3.4 Das gemischte Randwertproblem für die Poissongleichung

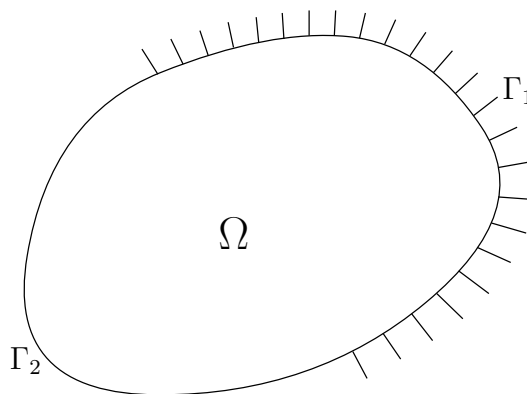
Sei $\Omega \in C^{0,1}$. Das gemischte Randwertproblem für die Poissongleichung lautet: Es ist eine Funktion u zu finden, so dass

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \tag{3.27}$$

$$u(x) = g_1(x) \quad \text{auf } \Gamma_1 \subset \partial\Omega, \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g_2(x) \quad \text{auf } \Gamma_2 \subset \partial\Omega, \tag{3.29}$$

wobei Γ_1 und Γ_2 offene Randstücke von $\partial\Omega$ sind, so dass $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$ ist.



Grafik 22 Das Gebiet Ω

Zunächst transformieren wir die Dirichlet-Randbedingung (3.28) in eine homogene Randbedingung. Dazu müssen wir Spurräume auf Teilstücken des Randes einführen.

Definition 30

Es sei

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = W^{\frac{1}{2},2}(\Gamma_1) = \{u = Tv|_{\Gamma_1}, Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \inf_{\substack{Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) \\ u = Tv|_{\Gamma_1}}} \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}.$$

Weiterhin sei

$$\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{u \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) : \text{supp } u \subset \bar{\Gamma}_1\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \|\tilde{u}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)},$$

wobei \tilde{u} die Null-Fortsetzung von u auf $\partial\Omega$ ist.

Die Dualräume seien

$$\begin{aligned}\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &= (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))', \\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) &= (\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))' .\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ und $g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ sind. Zu g_1 gibt es eine Fortsetzung $G_1 \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass $TG_1|_{\Gamma_1} = g_1$ ist. Für die Funktion $w = u - G_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt, dass $Tw|_{\Gamma_1} = 0$ ist. Ein geeigneter Raum V , in dem die schwache Lösung w gesucht wird, ist daher:

$$V = \{w \in W^{1,2}(\Omega) : Tw|_{\Gamma_1} = 0\} . \quad (3.30)$$

Wir formulieren jetzt das Randwertproblem (3.27), (3.28) und (3.29) für die Funktion $w = u - G_1$:

Finde ein $w \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass:

$$-\Delta w(x) = f(x) - \Delta G_1(x) \quad \text{in } \Omega , \quad (3.31)$$

$$w(x) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 , \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = g_2 - \frac{\partial G_1}{\partial n} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (3.33)$$

ist, wobei $\frac{\partial G_1}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$, $g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ und $f \in V'$ sein sollen und die Anwendung des Laplace Operators im Distributionensinn zu verstehen ist.

In der schwachen Formulierung lautet (3.31), (3.32), (3.33):

Finde ein $w \in V$, so dass:

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} - a(G_1, v) + \langle g_2, v \rangle_{\Gamma_2} \quad \forall v \in V$$

ist.

Hierbei haben wir benutzt, dass die Summe der auftretenden Rand-Neumannterme von G_1 verschwindet.

Wir überprüfen die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram:

- (1) $a(\cdot, \cdot)$ ist beschränkt über $V \times V \subset W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$.
- (2) $a(\cdot, \cdot)$ ist V -elliptisch, da nach der Poincaréschen Ungleichung ([25, S. 385/386])

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma + |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

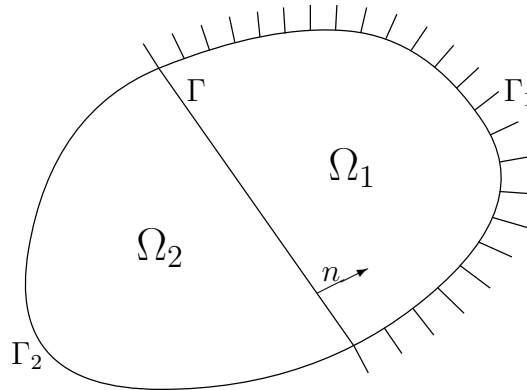
gilt, falls $\mu(\Gamma_1) > 0$ ist. Daraus folgt:

$$a(w, w) = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w \, dx = |w|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \geq \tilde{C} \|w\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 \quad \forall w \in V . \quad (3.34)$$

3.3.5 Ein Transmissionsproblem für die Poissongleichung

Sei Ω ein Gebiet des \mathbb{R}^n , das aus zwei Teilgebieten $\Omega_1 \in C^{0,1}$ und $\Omega_2 \in C^{0,1}$ besteht, welche im Allgemeinen aus unterschiedlichen Materialien sind und es gilt:

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$



Grafik 23 Das zusammengesetzte Gebiet

Es sei $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ die Grenzlinie (interface) zwischen Ω_1 und Ω_2 und $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \bar{\Gamma}$, $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \bar{\Gamma}$ die äußeren Randstücke von Ω_1 bzw. Ω_2 .

Wir suchen Lösungen $u_i \in W^{1,2}(\Omega_i)$, so dass

$$-a_i \Delta u_i = f_i \quad \text{in } \Omega_i, \quad (3.35)$$

$$u_1 = g_1 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (3.36)$$

$$a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = g_2 \quad \text{auf } \Gamma_2, \quad (3.37)$$

$$u_1 - u_2 = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.38)$$

$$a_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.39)$$

wobei a_1 und a_2 positive Konstanten sind.

Zunächst überführen wir das obige Rand-Transmissionsproblem in ein Problem mit homogenen Dirichletdaten auf Γ_1 . Dazu nehmen wir an, dass $g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ ist, und damit eine Fortsetzung $G \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ besitzt. G befindet sich auch in $W^{1,2}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$, und G genügt der Bedingung (3.38). Weiterhin bezeichnen wir mit u die Funktion

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{in } \Omega_1, \\ u_2 & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Wegen (3.38) befindet sich u in $W^{1,2}(\Omega)$.

Sei $w = u - G$. Die Funktion $w \in W^{1,2}(\Omega)$ genügt folgendem Rand-Transmissionsproblem (formale Rechnung unter der Annahme, dass die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial n}$ auf Γ_2 bzw. Γ erklärt sind und Elemente aus $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bzw. $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ erzeugen):

$$-a\Delta w = f + a\Delta G \quad \text{in } \Omega, \quad (3.40)$$

$$w = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (3.41)$$

$$a_2 \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = a_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} - a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = g_2 - a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2}, \quad (3.42)$$

$$Tw_1 - Tw_2 = -TG_1|_{\Gamma} + TG_2|_{\Gamma} = 0, \quad (3.43)$$

$$a_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - a_2 \frac{\partial w_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -a_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} + a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (3.44)$$

Hierbei ist:

$$G = \begin{cases} G_1 & \text{in } \Omega_1 \\ G_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad w = \begin{cases} w_1 & \text{in } \Omega_1 \\ w_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}, \quad a = \begin{cases} a_1 & \text{in } \Omega_1 \\ a_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}.$$

Wir führen nun den Raum V ein

$$V = \{v \in W^{1,2}(\Omega) : Tv|_{\Gamma_1} = 0\},$$

und geben eine schwache Formulierung des Problems (3.40) - (3.44) an. Hierzu multiplizieren wir (3.40) mit einem Element $v \in V$, integrieren über Ω und führen eine partielle Integration aus:

$$\begin{aligned} -\langle a\Delta w, v \rangle_{\Omega} &= -a_1 \langle \Delta w_1, v_1 \rangle_{\Omega_1} - a_2 \langle \Delta w_2, v_2 \rangle_{\Omega_2} \\ &= +a_1 \int_{\Omega_1} \nabla w_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + a_2 \int_{\Omega_2} \nabla w_2 \cdot \nabla v_2 \, dx \\ &\quad - a_1 \left\langle \frac{\partial w_1}{\partial n}, Tv_1 \right\rangle_{\partial\Omega_1} - a_2 \left\langle \frac{\partial w_2}{\partial n}, Tv_2 \right\rangle_{\partial\Omega_2} = \langle f, v \rangle_{\Omega} + a \langle \Delta G, v \rangle_{\Omega}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1 \int_{\Omega_1} \nabla w_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + a_2 \int_{\Omega_2} \nabla w_2 \cdot \nabla v_2 \, dx &= \langle f, v \rangle_{\Omega} + \left\langle a_1 \frac{\partial w_1}{\partial n} - a_2 \frac{\partial w_2}{\partial n}, Tv_1 \right\rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \left\langle a_2 \frac{\partial w_2}{\partial n}, Tv_2 \right\rangle_{\Gamma_2} + a \langle \Delta G, v \rangle_{\Omega} \\ &= \langle f, v \rangle_{\Omega} + \left\langle -a_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} + a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}, Tv_1 \right\rangle_{\Gamma} - \left\langle a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}, Tv_2 \right\rangle_{\Gamma_2} + \langle g_2, Tv_2 \rangle_{\Gamma_2} \\ &\quad - a \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla v \, dx + \left\langle a_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}, Tv_1 \right\rangle_{\Gamma} + \left\langle a_2 \frac{\partial G_2}{\partial n}, Tv_2 \right\rangle_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

Kurz geschrieben:

$$a \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} - a \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla v \, dx + \langle g_2, Tv_2 \rangle_{\Gamma_2} = \langle F, v \rangle$$

wobei F aus V' ist.

Die Bilinearform

$$a_{\Omega}(w, v) = a_1 \int_{\Omega_1} \nabla w_1 \cdot \nabla v_1 \, dx + a_2 \int_{\Omega_2} \nabla w_2 \cdot \nabla v_2 \, dx$$

ist stetig auf $V \times V$ und V -elliptisch (siehe (3.34)).

Damit besitzt das Ausgangsproblem (3.35) - (3.39) eine schwache Lösung für jedes $f \in V', g_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1), g_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$.

Wir müssen noch überlegen, wie $\frac{\partial w}{\partial n}$ als Element aus $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bzw. $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ eindeutig definiert werden kann. Wir folgen Ideen aus [9, S. 59 ff]. Wir nehmen vereinfacht an, dass $a_1 = 1$ und $\Omega = \Omega_1$ ist. Der Raum V war durch (3.30) definiert worden. Wir führen nun einen Raum $E_{\Delta}(V, V')$ ein, für dessen Elemente w das Neumanndatum $\frac{\partial w}{\partial n}$ im obigen Sinn definiert werden kann.

Definition 31

Es sei

$$E_{\Delta}(V, V') = \{w \in V : \Delta w \in V'\},$$

versehen mit der Graphen-Norm

$$\|w\|_{E_{\Delta}} = \|w\|_V + \|\Delta w\|_{V'}. \quad (3.45)$$

Weiterhin führen wir den linearen Raum glatter Funktionen ein, die auf Γ_1 verschwinden:

$$C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1) = \{w \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \text{supp } w \in \overline{\Omega} \setminus \Gamma_1\}.$$

Für $w \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ ist das Neumanndatum mit Hilfe der Greenschen Formel ausdrückbar

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} T v \, d\sigma = \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} T v \, d\sigma = \int_{\Omega} \Delta w \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V \quad (3.46)$$

und es gilt:

Lemma 21

Für $w \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ ist $\frac{\partial w}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und für ein $c > 0$ gilt die Abschätzung

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|w\|_{E_{\Delta}}. \quad (3.47)$$

Beweis

Zu jedem $v \in V$ betrachten wir die Spur Tv und eine stetige Fortsetzung \tilde{v} der Spur in das Gebiet Ω (siehe Fortsetzungssatz). Das heißt, es gibt ein $c > 0$, so dass gilt:

$$\|\tilde{v}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c \|Tv\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad \forall Tv \in \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (3.48)$$

Für diese \tilde{v} gilt ebenfalls (3.46) und damit

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} T v \, d\sigma \right| = \left| \int_{\Omega} \Delta w \cdot \tilde{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \tilde{v} \, dx \right|$$

$$\leq (\|\Delta w\|_{V'} + \|w\|_V) \|\tilde{v}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq c_2 \|T v\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)}.$$

Hieraus folgt:

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2 \leq c (\|\Delta w\|_{V'} + \|w\|_V) = c \|w\|_{E_{\Delta}}. \quad \blacksquare$$

Um jetzt die Relation (3.46) auch auf Elemente aus $E_{\Delta}(V, V')$ eindeutig auszuweiten, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 22

$C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ ist dicht in $E_{\Delta}(V, V')$.

Beweis

Wir betrachten ein beliebiges lineares Funktional $L \in E'_{\Delta}(V, V')$. Es gibt Elemente $f \in V'$ und $g \in V$, so dass:

$$L(u) = \langle f, u \rangle + \langle \Delta u, g \rangle \quad \forall u \in E$$

ist.

Insbesondere gilt für $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1) \subset E_{\Delta}(V, V')$:

$$L(u) = \langle f, u \rangle + \int_{\Omega} \Delta u g \, dx.$$

Wir nehmen jetzt an, dass $L = L_0$ das Nullfunktional auf $C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ ist. Wir betrachten ein $f_0 \in V'$ und $g_0 \in V$, so dass

$$L_0(u) = \langle f_0, u \rangle + \int_{\Omega} \Delta u g_0 \, dx = 0 \quad \forall u \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$$

ist. Für Fortsetzungen $U \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ von u gilt:

$$L_0(u) = L_0(U) = \langle f_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U \tilde{g}_0 \, dx = 0, \quad (3.49)$$

wobei

$$\tilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.50)$$

und f_0 als Element von $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } f_0 \subset \overline{\Omega}$ aufgefasst wird. Die Relation (3.49) kann im Distributionensinne geschrieben werden als

$$\langle f_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \Delta \tilde{g}_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

woraus $-f_0 = \Delta \tilde{g}_0$ folgt.

Die Elliptizität von Δ sichert, dass $\tilde{g}_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ist. Aus (3.50) folgt, dass $g_0 \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ ist.

Wir zeigen nun, dass L_0 auch auf $E_\Delta(V, V')$ verschwindet. Dazu betrachten wir eine Folge von Elementen $(g_n), g_n \in C_0^\infty(\Omega), g_n \xrightarrow{W^{1,2}(\Omega)} g_0$. Der folgende Grenzwert ist wohl definiert für ein $u \in E_\Delta(V, V')$

$$L_0(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle -\Delta g_n, u \rangle + \langle \Delta u, g_n \rangle) = 0.$$

Der folgende Satz der Funktionalanalysis über die ausreichende Anzahl von Funktionalen [10, S. 232, Satz 36.3] besagt:

Sei $\hat{u} \in E_\Delta(V, V'), \hat{u} \notin \overline{C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)}^{\| \cdot \|_{E_\Delta}}, \delta = \text{dist}(\hat{u}, \overline{C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)}^{\| \cdot \|_{E_\Delta}}) > 0$.

Dann gibt es eine stetige Linearform L auf $E_\Delta(V, V')$, so dass:

$$L(u) = 0 \quad \forall u \in \overline{C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)}^{\| \cdot \|_{E_\Delta}}, \quad L(\hat{u}) = \delta, \quad \|L\| = 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptergebnis zu beweisen.

Satz 21

Sei $w \in E_\Delta(V, V')$. Dann ist $\frac{\partial w}{\partial n} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ durch den Grenzwert einer approximierenden Folge $w_n \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ eindeutig definiert:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial w}{\partial n}, Tv \right\rangle_\Gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\Gamma \frac{\partial w_n}{\partial n} Tv \, d\sigma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega \Delta w_n v \, dx + \int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx \right) \\ &= \langle \Delta w, v \rangle_\Omega + \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Beweis

Lemma 21 sichert, dass

$$\begin{aligned} N : C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ Nw &= \frac{\partial w}{\partial n} \end{aligned}$$

eine lineare stetige Abbildung des Teilraumes $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1) \subset E_\Delta(V, V')$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ist. Da nach Lemma 22 $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \Gamma_1)$ dicht in $E_\Delta(V, V')$ ist, lässt sich N eindeutig auf $E_\Delta(V, V')$ fortsetzen. ■

3.3.6 Allgemeine elliptische Gleichungen

Wir hatten zu Beginn des dritten Kapitels lineare Differentialoperatoren in „Divergenz-Form“ betrachtet

$$A(x, Dx) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) D^\beta). \quad (3.51)$$

Definition 32

A ist gleichmäßig elliptisch in Ω , falls eine Konstante C existiert, so dass

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha\beta} \geq C |\xi|^{2m} \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

ist.

Lemma 23

Sei Ω eine beschränkte Menge im \mathbb{R}^n . Wir nehmen an, dass die Koeffizienten des Operators (3.51) konstant sind für $|\alpha| = |\beta| = m$, verschwinden für $0 < |\alpha| + |\beta| \leq 2m - 1$ und dass $a_{00}(x) \geq 0$ ist. Falls A gleichmäßig elliptisch ist, dann ist die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta} D^\beta u(x) D^\alpha v(x) + a_{00}(x) u(x) v(x) \right) dx$$

$\mathring{W}^{m,2}(\Omega)$ -elliptisch.

Beweis

Die Beschränktheit der Bilinearform kann analog zu (3.18) nachgewiesen werden.

Wir zeigen die V -Elliptizität für $V = \mathring{W}^{m,2}(\Omega)$. Die Elemente $u \in \mathring{W}^{m,2}(\Omega)$ können durch Null auf den gesamten \mathbb{R}^n fortgesetzt werden. Wir bezeichnen die Fortsetzungen mit U .

Damit wird:

$$a(u, u) = a(U, U) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} D^\beta U(x) D^\alpha U(x) + a_{00}(x) U^2(x) \right) dx.$$

Wir wenden die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}[U] = \hat{U}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} U(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

an.

Es gilt nach (1.39)

$$\mathcal{F}[D^\alpha U] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[U]$$

und die Parsevalidentität [27, S. 38]

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{U} \overline{\hat{V}} \, d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} U \overline{V} \, dx.$$

Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned} a(U, U) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} (-i\xi)^\beta \hat{U}(\xi) \overline{(-i\xi)^\alpha \hat{U}(\xi)} \, d\xi + \int_{\Omega} a_{00}(x) u^2(x) \, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} |\hat{U}(\xi)|^2 \, d\xi + \int_{\Omega} a_{00}(x) u^2 \, dx \\ &\geq C \int |\xi|^{2m} |\hat{U}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$|\xi|^{2m} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)^m \geq \sum_{|\alpha|=m} \xi_1^{2\alpha_1} \xi_2^{2\alpha_2} \dots \xi_n^{2\alpha_m} = \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha|^2.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} a(u, u) = a(U, U) &\geq C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{U}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} (-i\xi)^\alpha \hat{U}(\xi) \overline{(-i\xi)^\alpha \hat{U}(\xi)} \, d\xi \\ &= (2\pi)^n C \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha U \overline{D^\alpha U} \, dx = \tilde{C} \|u\|_{W^{m,2}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

■

Musterlösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zur Aufgabe Ü1

Aufgabenstellung

Im Quadrat $\Omega = \{(x, y) : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ sei die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 < x < 0, \quad -1 < y < 1, \\ -1 & \text{für } 0 \leq x < 1, \quad -1 < y < 1 \end{cases}$$

gegeben. Existieren die schwachen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$?

Musterlösung

Zuerst wird das Quadrat Ω in zwei Gebiete zerlegt:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) : -1 < x < 0, -1 < y < 1\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) : 0 \leq x < 1, -1 < y < 1\}. \end{aligned}$$

Nach Definition muss für die schwache α -te Ableitung $w = D^\alpha u$ von u gelten:

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v \, dx =: (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v \, dx, \quad \forall v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega).$$

Existiert die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$?

Betrachte:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_{\Omega_1} 1 \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy + \int_{\Omega_2} (-1) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 1 \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy + \int_{-1}^1 \int_0^1 (-1) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy \\
 &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 0 v(x, y) dx dy - \int_{-1}^1 \int_0^1 0 v(x, y) dx dy \\
 &\quad + \int_{\partial\Omega_1} v(x, y) \cos(n_1, x) ds + \int_{\partial\Omega_2} -v(x, y) \cos(n_2, x) ds \\
 &= \int_{\partial\Omega_1} v(x, y) \cos(n_1, x) ds + \int_{\partial\Omega_2} -v(x, y) \cos(n_2, x) ds ,
 \end{aligned}$$

wobei n_1, n_2 die nach außen gerichteten Normalenvektoren sind. Da $v(x, y)$ auf $\partial\Omega$ ver-

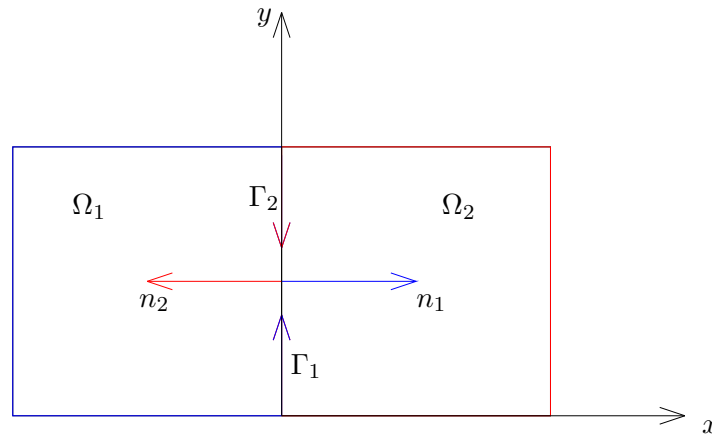


Abbildung 1: Gebietszerlegung

schwindet, bleibt

$$\int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma_1} v(x, y) \cos(n_1, x) ds + \int_{\Gamma_2} -v(x, y) \cos(n_2, x) ds.$$

Der Winkel zwischen n_1 und der positiven x -Achse beträgt 0° und zwischen n_2 und der x -Achse 180° (siehe Abbildung 1). Somit folgt:

$$\int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dx dy = 2 \int_{\Gamma} v(x, y) ds ,$$

wobei $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ ist.

Damit die schwache Ableitung existiert, muss es eine integrierbare Funktion w geben, so dass

$$2 \int_{\Gamma} v(x, y) \, ds = \int_{\Omega} w(x, y) v(x, y) \, dx \, dy$$

gilt, für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und somit auch für $x \cdot v(x, y)$.

Da die Testfunktionen auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwinden und $x = 0$ auf Γ ist, gilt

$$\int_{\Gamma} xv(x, y) \, ds = 0.$$

Somit würde $\int_{\Omega} w(x, y) xv(x, y) \, dx \, dy = 0$ und damit $w(x, y) = 0$ fast überall gelten, was nicht sein kann. Daher existiert die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ nicht.

Existiert die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$?

Betrachte:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy &= \int_{\Omega_1} 1 \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} (-1) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 1 \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy + \int_{-1}^1 \int_0^1 (-1) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy \\ &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 0 v(x, y) \, dx \, dy - \int_{-1}^1 \int_0^1 0 v(x, y) \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\partial\Omega_1} v(x, y) \cos(n_1, y) \, ds + \int_{\partial\Omega_2} -v(x, y) \cos(n_2, y) \, ds . \end{aligned}$$

In diesem Fall verschwinden die beiden Randintegrale, da der Winkel zwischen den Normalenvektoren und der y -Achse jeweils $\pm 90^\circ$ beträgt und der Cosinus somit Null wird.

Damit erhält man

$$\int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 0 v(x, y) \, dx \, dy - \int_{-1}^1 \int_0^1 0 v(x, y) \, dx \, dy .$$

Somit existiert die schwache Ableitung $\frac{\partial u}{\partial y}$ und ist Null in Ω .

Dieses Ergebnis zeigt, dass die Differentiation nach x nicht existiert, da wir an der Stelle $x = 0$ einen Sprung haben. Dies war zu erwarten, da in der Vorlesung gezeigt wurde, dass im Fall $n = 1$ Sprungfunktionen keine schwachen Ableitungen besitzen.

Lösung zur Aufgabe Ü2

Aufgabenstellung

Wir betrachten das Intervall (a_1, a_5) mit der Zerlegung $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Auf diesem Intervall sei eine *Hutfunktion* u definiert, d.h. u ist eine stückweise lineare Funktion, so dass $u(a_1) = u(a_2) = u(a_4) = u(a_5) = 0$, $u(a_3) = 1$ ist. Man berechne die schwache Ableitung.

Musterlösung

Zuerst stellen wir eine Funktionsgleichung für die gegebene Funktion $u(x)$ auf. Die Funktion u ist nur für $a_2 \leq a_4 \neq 0$. In diesen Bereichen soll u linear sein, d.h. sie kann stückweise durch Geraden dargestellt werden. Durch ansetzen der allgemeinen Geradengleichung $u(x) = mx + b$ und einsetzen der gegebenen Punkte kann man die Funktionsgleichung von u bestimmen. Man erhält für u :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-a_2}{a_3-a_2} & \text{für } a_2 \leq x < a_3, \\ \frac{x-a_4}{a_3-a_4} & \text{für } a_3 \leq x < a_4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man berechne nun die schwache Ableitung (mit Hilfe der partiellen Integration). Nach Definition muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x) \cdot v(x) \, dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \cdot v'(x) \, dx, \quad \forall v \in C_0^1([a_1, a_5]).$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} - \int_{a_1}^{a_5} u(x) \cdot v'(x) \, dx &= - \left(\int_{a_2}^{a_3} \frac{x-a_2}{a_3-a_2} v'(x) \, dx + \int_{a_3}^{a_4} \frac{x-a_4}{a_3-a_4} v'(x) \, dx \right) \\ &= - \left(\frac{x-a_2}{a_3-a_2} v(x) \Big|_{a_2}^{a_3} - \int_{a_2}^{a_3} \frac{1}{a_3-a_2} v(x) \, dx \right) \\ &\quad - \left(\frac{x-a_4}{a_3-a_4} v(x) \Big|_{a_3}^{a_4} - \int_{a_3}^{a_4} \frac{1}{a_3-a_4} v(x) \, dx \right) \\ &= + \int_{a_2}^{a_3} \frac{1}{a_3-a_2} v(x) \, dx - 1 + \int_{a_3}^{a_4} \frac{1}{a_3-a_4} v(x) \, dx + 1 \\ &= + \int_{a_2}^{a_3} \frac{1}{a_3-a_2} v(x) \, dx + \int_{a_3}^{a_4} \frac{1}{a_3-a_4} v(x) \, dx. \end{aligned}$$

Somit erhält man für die schwache Ableitung von u :

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{1}{a_3-a_2} & \text{für } a_2 \leq x < a_3, \\ \frac{1}{a_3-a_4} & \text{für } a_3 \leq x < a_4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung zur Aufgabe Ü3

Aufgabenstellung

Beweisen Sie, dass für ein $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die folgende Relation gilt:

$$\forall K \text{ kompakt, } K \subset \Omega, \exists C = C(K) > 0, \exists k = k(K) \in \mathbb{N}: \\ |\langle F, v \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_K |D^\alpha v(x)| \quad \forall v \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega). \quad (1)$$

Hinweis: Man zeige indirekt, dass die Behauptung gilt, indem man eine Folge $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ konstruiert, für die die Ungleichung

$$|\langle F, v_j \rangle| \geq j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |D^\alpha v_j(x)|$$

erfüllt ist.

Musterlösung

Wir nehmen an es gäbe eine kompakte Teilmenge K von Ω , so dass für alle $C > 0$ und alle k die Behauptung (1) nicht erfüllt ist, insbesondere auch nicht für $C = k = j$.

Es existiert also ein $v_j \in \mathcal{D}_K^\infty(\Omega)$, so dass

$$\left| \langle F, v_j \rangle \right| \geq j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha v_j(x)|$$

gilt. Setzen wir $w_j = \frac{v_j}{|\langle F, v_j \rangle|}$, so erhalten wir

$$|\langle F, w_j \rangle| = \left| \left\langle F, \frac{v_j}{|\langle F, v_j \rangle|} \right\rangle \right| = \frac{1}{|\langle F, v_j \rangle|} |\langle F, v_j \rangle|$$

und somit

$$1 \geq j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in K} |D^\alpha w_j(x)|.$$

Damit die obige Ungleichung erfüllt ist, muss

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha w_j(x)| \leq \frac{1}{j}$$

für alle $j \geq |\alpha|$ gelten. Da $\text{supp } w_j \subset \text{supp } v_j \subset \Omega$ ist, gilt

$$D^\alpha w_j(x) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}_K^\infty(\Omega)$$

für alle α .

Andererseits gilt jedoch für alle j

$$|\langle F, w_j \rangle| = 1,$$

was zu einem Widerspruch und somit zur behaupteten Ungleichung führt.

Lösung zur Aufgabe Ü4

Aufgabenstellung

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle F, v \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(n) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

eine Distribution unendlicher Ordnung definiert.

Hinweis: Betrachten Sie, unter der Annahme F sei von der Ordnung k , die Folge $\{v_\varepsilon\}$ mit $v_\varepsilon = v\left(\frac{x-k-1}{\varepsilon}\right)$, wobei $v \in \mathcal{D}([-1,1])$ ist.

Musterlösung

Zu zeigen ist, dass die Abbildung

$$\langle F, v \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(n) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (2)$$

eine Distribution unendlicher Ordnung ist.

Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung eine Distribution ist und anschließend mit einem Widerspruchsbeweis, dass ihre Ordnung unendlich ist.

1. F ist eine Distribution:

Die Testfunktion $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ hat kompakten Träger und es kann ein $N(v) \in \mathbb{N}$ gefunden werden, so dass

$$\text{supp } v \subset \{|x| \leq N(v)\}$$

gilt. Da $\text{supp } D^\alpha v \subset \text{supp } v$ für alle α gilt, folgt $v^{(n)}(n) = 0$ für $n > N(v)$. Daher können wir (2) schreiben als

$$\langle F, v \rangle := \sum_{n=0}^{N(v)} v^{(n)}(n).$$

Hier wird v , bzw. die Ableitung von v an einer bestimmten Stelle ausgewertet. Die Summe wird größer, wenn über das Supremum von v , bzw. das Supremum der Ableitung summiert wird. Wir erhalten

$$\langle F, v \rangle \leq \sum_{n=0}^{N(v)} \sup_{x \in \mathbb{R}} |v^{(n)}(x)| \leq \sum_{|\alpha| \leq N(v)} \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^\alpha v|.$$

Die Beschränktheitsrelation aus Aufgabe Ü3 ist erfüllt und somit ist F eine Distribution.

2. F hat unendliche Ordnung:

Wir nehmen an, dass F die endliche Ordnung k hat.

Wir wählen $v \in \mathcal{D}((-1, 1))$, so dass $v^{(k+1)}(0) = 1$ ist und setzen für $\varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(x) = v\left(\frac{x - k - 1}{\varepsilon}\right).$$

Es gilt $\text{supp } v \subset (-1, 1)$ da $v \in \mathcal{D}((-1, 1))$ ist.

Für $\varepsilon < 1$ gilt $\text{supp } v_\varepsilon \subset (k + 1 - \varepsilon, k + 1 + \varepsilon) \subset (k, k + 2) = K$.

Wir erhalten damit $v_\varepsilon^{(n)}(n) = 0$ für alle $n \neq k + 1$ und es gilt

$$\langle F, v_\varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} v_\varepsilon^{(n)}(n) = v_\varepsilon^{(k+1)}(k + 1).$$

Mit Hilfe der Kettenregel können wir die k -te Ableitung von $v_\varepsilon(x)$ berechnen:

$$v_\varepsilon^{(k)}(x) = \left(v\left(\frac{x - k - 1}{\varepsilon}\right) \right)^{(k)} = \frac{1}{\varepsilon^k} v^{(k)}\left(\frac{x - k - 1}{\varepsilon}\right).$$

Es folgt somit

$$\langle F, v_\varepsilon \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} v^{(k+1)}(0) = \frac{1}{\varepsilon^{k+1}}. \quad (3)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha v_\varepsilon| &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sup_{x \in K} \left| v^{(\alpha)}\left(\frac{x - k - 1}{\varepsilon}\right) \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sup_{y \in \mathbb{R}} |v^{(\alpha)}(y)| \leq \frac{c_1}{\varepsilon^k}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei c_1 unabhängig von ε ist.

F hat eine endliche Ordnung k und somit gilt

$$\langle F, v_\varepsilon \rangle \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v_\varepsilon(x)|.$$

Aufgrund der Gleichungen (3) und (4) erhalten wir

$$\frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v_\varepsilon(x)| \leq c_2 \frac{c_1}{\varepsilon^k} = \frac{c_3}{\varepsilon^k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \leq \frac{c_3}{\varepsilon^k}$$

und somit

$$1 \leq c_3 \varepsilon$$

für alle $\varepsilon \in (0, 1)$, was für hinreichend kleines ε nicht erfüllt sein kann.

Die Annahme, dass die Distribution F eine endliche Ordnung hat, hat zu einem Widerspruch geführt und folglich muss F unendliche Ordnung haben.

Lösung zur Aufgabe Ü5

Aufgabenstellung

Man berechne die Distributionenableitung von

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^\lambda & \text{für } x > 0. \end{cases} .$$

Hierbei ist $-1 < \lambda < 0$.

Musterlösung

Es ist

$$\begin{aligned} ((x_+^\lambda)', v(x)) &= (-1)^1 \int_{\mathbb{R}} x_+^\lambda v'(x) \, dx \\ &= - \int_0^\infty x_+^\lambda v'(x) \, dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty x^\lambda v'(x) \, dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(x^\lambda (v(x) + c) \Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1} (v(x) + c) \, dx \right) . \end{aligned}$$

Wähle $c = -v(0)$. Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x^\lambda (v(x) - v(0)) \Big|_\varepsilon^\infty) = 0 ,$$

und somit folgt:

$$\begin{aligned} ((x_+^\lambda)', v(x)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1} (v(x) - v(0)) \, dx \\ &= \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1} v(x) \, dx - \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1} v(0) \, dx \\ &= \int_0^\infty \lambda x^{\lambda-1} v(x) \, dx - (\lambda x_+^{\lambda-1} \delta_0, v(x)) . \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Distributionenableitung von x_+^λ :

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1} (1 - \delta_0) .$$

Lösung zur Aufgabe Ü6

Aufgabenstellung

Man bestimme Distributionenlösungen folgender Differentialgleichungen:

- a) $xu' = 1$,
 b) $u'' + au' + b = \delta_0$.

Musterlösung

- a) Aus der Vorlesung ist die Lösung von $xu' = 1$ bekannt und lautet $u(x) = c_1 + c_2H(x) + \ln|x|$. Wir werden nun zeigen, dass dies eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist. Dazu berechnen wir $\langle xu', v \rangle$ für alle $v \in \mathcal{D}'((-a, a))$:

$$\begin{aligned}
 \langle xu', v \rangle &= \langle u', xv \rangle = - \langle u, (xv)' \rangle \\
 &= - \left(\int_{-a}^a c_1 (xv)' dx + \int_{-a}^a c_2 H(x) (xv)' dx + \int_{-a}^a \ln|x| (xv)' dx \right) \\
 &= - \left(\underbrace{c_1 xv|_{-a}^a}_{=0} - \underbrace{\int_{-a}^a c_1' xv dx}_{=0, \text{ da } c_1'=0} + \int_0^a c_2 (xv)' dx + \int_{-a}^a \ln|x| (xv)' dx \right) \\
 &= - \left(c_2 xv|_0^a - \int_0^a c_2' xv dx + \ln|x||_{-a}^a - \int_{-a}^a \frac{1}{x} xv dx \right) \\
 &= \int_{-a}^a v dx \\
 &= \langle 1, v \rangle.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $u(x) = c_1 + c_2H(x) + \ln|x|$ Lösung der Differentialgleichung ist.

- b) Wir bestimmen zunächst die Fundamentallösung E der Differentialgleichung $u'' + au' = \delta$. Nach dem Hauptsatz (S. 34) kann die Fundamentallösung einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in der Form $E = H(x)u_0(x)$ dargestellt werden, wobei $u_0(x)$ folgender Differentialgleichung genügen muss

$$\begin{aligned}
 u_0''(x) + au_0'(x) &= 0, \\
 u_0(0) &= 0, \\
 u_0'(0) &= 1.
 \end{aligned}$$

In unserem Fall ist

$$u_0(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}e^{-ax}$$

und $E = H(x)u_0(x)$ ist Distributionenlösung der Gleichung

$$u_0''(x) + au_0'(x) = \delta.$$

Wir suchen dann eine allgemeine Lösung u_a von

$$\begin{aligned} u''(x) + au'(x) &= -b, \\ u_a &= c_0 + c_1e^{-ax} - \frac{x}{a}b. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u = H(x)u_0(x) + u_a = H(x)\frac{1}{a}(1 - e^{-ax}) + c_0 + c_1e^{-ax} - \frac{x}{a}b.$$

Somit ergibt sich für die partikuläre Lösung $u_{0p}(x) = -\frac{b}{a}x$. Schließlich erhalten wir

$$u_0(x) = -\frac{b}{a}x + c_0 + c_1e^{-ax}.$$

Die Konstanten c_0 und c_1 werden mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt.

Es gilt

$$u_0(0) = c_0 + c_1 = 0, \tag{5}$$

$$u_0'(0) = -\frac{b}{a} - ac_1 = 1. \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Aus (5) folgt $c_0 = -c_1$ und aus (6) folgt $c_1 = -\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}$ und für die Lösung gilt

$$u_0(x) = -\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\right)(1 - e^{-ax}).$$

Die Fundamentallösung kann angegeben werden und es gilt:

$$E(x) = H(x) \left(-\frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\right)(1 - e^{-ax}) \right).$$

Lösung zur Aufgabe Ü7

Aufgabenstellung

Man berechne folgende Distributionsableitung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta \frac{1}{|x|} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \frac{1}{|x|}.$$

Musterlösung

Nach Definition für die Distributionenableitung soll gelten:

$$\left\langle \Delta \frac{1}{|x|}, v(x) \right\rangle = (-1)^2 \left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta v(x) \right\rangle.$$

Berechne nun $\left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta v(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|} \cdot \Delta v(x) \, dx$.

Nach der 2. Greenschen Formel gilt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|} \cdot \Delta v(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \Delta \frac{1}{|x|} \cdot v(x) + \int_{|x|=\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|} \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x|} \right) d\sigma.$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass $\Delta \frac{1}{|x|} = 0$ ist und somit bleibt für den obigen Ausdruck

$$\left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta v(x) \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{|x|=\varepsilon} \left(\frac{1}{|x|} \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x|} \right) d\sigma \right].$$

Um die Integrale besser berechnen zu können wird ein Übergang zu den Kugelkoordinaten mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$ gemacht:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{|x|}, \Delta v(x) \right\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial r} v(r, \phi, \theta) \Big|_{r=\varepsilon} + v(\varepsilon, \phi, \theta) \underbrace{\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}}_{=-\frac{1}{\varepsilon^2}} \Big|_{r=\varepsilon} \right) \cdot \varepsilon^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\underbrace{-\varepsilon \frac{\partial}{\partial r} v(r, \phi, \theta) \Big|_{r=\varepsilon}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} - v(\varepsilon, \phi, \theta) \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi -v(\varepsilon, \phi, \theta) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \sin \theta \left(\int_0^{2\pi} -v(\varepsilon, \phi, \theta) d\phi \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sin \theta \left(\underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} -v(\varepsilon, \phi, \theta) d\phi}_{=-2\pi\delta_0} \right) d\theta \\
&= - \int_0^{\pi} 2\pi\delta_0 \sin \theta d\theta = -2\pi\delta_0 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \\
&= -2\pi\delta_0 (-\cos \theta|_0^{\pi}) = -2\pi\delta_0 (1 + 1) = -4\pi\delta_0.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Distributionenableitung von $\Delta \frac{1}{|x|}$:

$$\left(\Delta \frac{1}{|x|} \right)' = -4\pi\delta_0.$$

Lösung zur Aufgabe Ü8

Aufgabenstellung

Es sei $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit Träger in $[-1, 1]$. Beschreiben Sie den Träger von $v(x+y) = v(x, y)$ im \mathbb{R}^2 .

Musterlösung

Da $v(x)$ seinen Träger in $[-1, 1]$ hat, wissen wir, dass $v(x) \neq 0$ für $|x| \leq 1$ gilt. Betrachten wir nun $v(x, y) = v(x+y) \in \mathbb{R}^2$ dann gilt

$$v(x+y) \neq 0 \quad \text{für } |x+y| \leq 1.$$

Somit gilt für den Träger von $v(x, y)$:

$$\text{supp } v(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x-1 \leq y \leq -x+1\}.$$

Dieses Gebiet ist keine kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^2 .

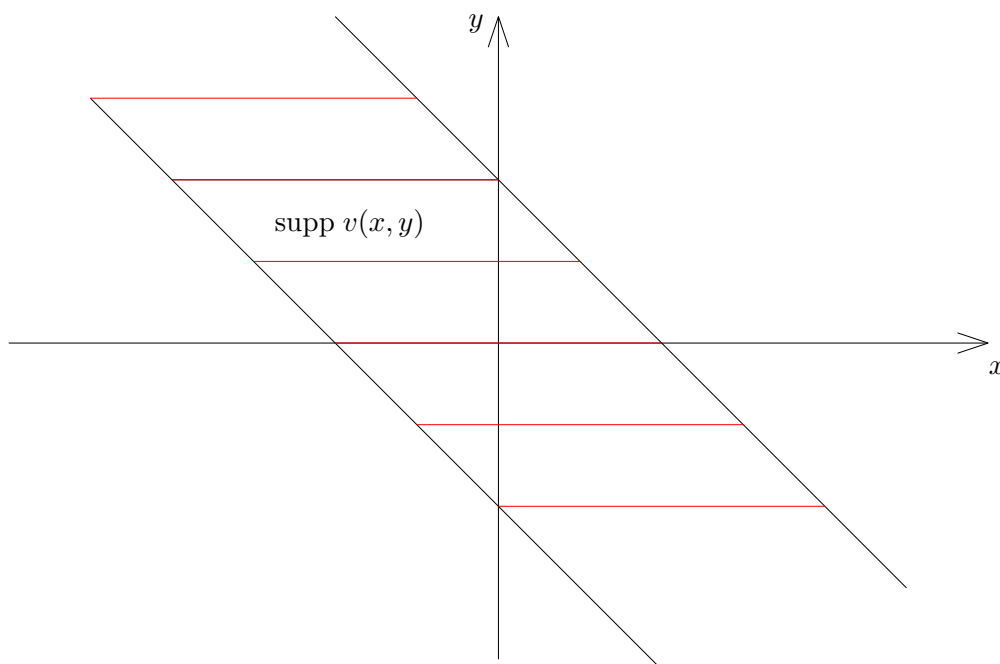


Abbildung 2: Träger von $v(x, y)$

Lösung zur Aufgabe Ü9

Aufgabenstellung

Finde eine Folge $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen auf \mathbb{R} , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $(\delta_n)_n$ konvergiert gegen δ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und
- $(\delta_n(x))_n$ konvergiert fast überall gegen Null.

Musterlösung

Wir suchen eine Folge von Funktionen, die gegen die Delta-Distribution konvergiert. Wenn man sich ein Schaubild der Delta-Distribution zeichnet, erkennt man, was für Eigenschaften die Funktionenfolge haben sollte. Der Träger der Funktion sollte für $n \rightarrow \infty$ nur noch den Nullpunkt enthalten und im Nullpunkt sollte die Funktionenfolge gegen unendlich streben.

Wir betrachten die Funktionenfolge

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n}, \\ n - n^2x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ n + n^2x & \text{für } -\frac{1}{n} < x \leq 0. \end{cases}$$

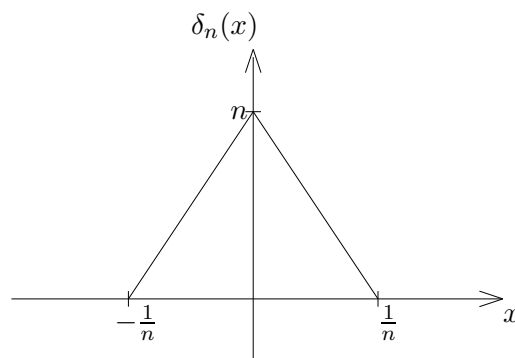


Abbildung 3: Schaubild von $\delta_n(x)$

Wir zeigen nun, dass die gewählte Funktionenfolge $\delta_n(x)$ gegen δ_0 konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \phi(x) dx = \phi(0).$$

Betrachte zuerst

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \phi(x) dx = \int_{-\frac{1}{n}}^0 (n + n^2x) \phi(x) dx + \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2x) \phi(x) dx.$$

Wir substituieren $y = nx$, $dy = n dx$ und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \phi(x) dx = \int_{-1}^0 (1+y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy + \int_0^1 (1-y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy.$$

Da

$$|(1+y) \phi\left(\frac{y}{n}\right)| \leq 2|\phi\left(\frac{y}{n}\right)| \leq 2 \sup |\phi\left(\frac{y}{n}\right)| \quad \forall y \in [-1, 1]$$

gilt, existiert eine integrierbare Majorante auf $[-1, 1]$ und somit kann der Satz von Lebesgue (bzw. der Satz von der majorisierten Konvergenz) angewandt werden, der eine Vertauschung von Integration und Grenzübergang zulässt.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) \phi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-1}^0 (1+y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy + \int_0^1 (1-y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \right] \\ &= \int_{-1}^0 \lim_{n \rightarrow \infty} (1+y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy + \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} (1-y) \phi\left(\frac{y}{n}\right) dy \\ &= \int_{-1}^0 (1+y) \phi(0) dy + \int_0^1 (1-y) \phi(0) dy \\ &= \phi(0) \int_{-1}^0 (1+y) dy + \phi(0) \int_0^1 (1-y) dy \\ &= \phi(0) \left(y + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-1}^0 + y - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1 \right) \\ &= \phi(0) \left(1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \phi(0). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\delta_n \rightarrow \delta_0$ gilt. Die Forderung, die im b)-Teil der Aufgabe gestellt ist, ist ersichtlich, da der Träger der Funktion für $n \rightarrow \infty$ nur noch den Nullpunkt enthält und somit fast überall Null ist.

Ein weiteres Beispiel für eine Funktionfolge, die die gewünschten Eigenschaften besitzt wäre $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-n^2 x^2}{2}\right)$.

Lösung zur Aufgabe Ü10

Aufgabenstellung

Seien S und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $S * T$ existiere. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x^k(S * T) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (x^j S) * (x^{k-j} T).$$

Musterlösung

Wir berechnen folgenden Ausdruck, wobei die erste Umformung möglich ist, da $x^k \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist:

$$\begin{aligned} \langle x^k(S * T), v \rangle &= \langle S * T, x^k v \rangle \\ &= \langle S, \langle T, (x + y)^k v(x + y) \rangle \rangle \\ &= \left\langle S_y, \left\langle T_x, \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} y^j x^{k-j} \right) v(x + y) \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Da S, T lineare Funktionale sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle x^k(S * T), v \rangle &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \langle y^j S_y, \langle x^{k-j} T, v(x + y) \rangle \rangle \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \langle (y^j S_y) * (x^{k-j} T), v \rangle. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe Ü11

Aufgabenstellung

Man beweise: Falls die Fouriertransformierte

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u] = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i(\xi, x)} dx$$

sich in $L^1(\mathbb{R}^n)$ befindet, dann gilt die Umkehrformel

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{-i(\xi, x)} d\xi.$$

Musterlösung

Hier sei nur eine Beweisskizze angegeben. Ein detaillierter Beweis findet sich in [27, S. 37/38, Beweis Satz 1.21.]

Für den Beweis benötigt man die Funktion $\psi(x) = \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right)$ welche ein Element von S ist und für die folgendes gilt:

$$\hat{\psi}(y) = \mathcal{F}[\psi](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|y|^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(y) dy = (2\pi)^n.$$

Weiterhin ist bekannt, dass für jedes $\varphi \in S$

$$\hat{\varphi}(\varepsilon x)(y) = \frac{1}{\varepsilon^n} \hat{\varphi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

gilt.

Nun wird das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{i(y, \xi)} dy dx$ für ein beliebiges $\varphi \in S$ betrachtet.

Die Funktion unter dem Integralzeichen gehört nicht zu $L_1(\mathbb{R}^n) \times L_1(\mathbb{R}^n)$ und daher kann der Satz von Fubini nicht angewendet werden. Multipliziert man jedoch das Integral mit der Funktion $\psi(\xi)$ ist die Funktion unter dem Integralzeichen absolut integrierbar und die Integrationsreihenfolge kann beliebig vertauscht werden. Man erhält die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) e^{-i(x, \xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(y) \varphi(x + y) dy.$$

In obiger Gleichung wird $\psi(\xi)$ durch $\psi(\varepsilon\xi)$ ersetzt. Da φ und ψ beschränkt und stetig sind, wird unter dem Integralzeichen der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ gemacht und man erhält

$$\psi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} e^{-i(x, \xi)} d\xi = \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi} dy.$$

Da $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(y) dy = (2\pi)^n$ gilt folgt die Inversionsformel.

Lösung zur Aufgabe Ü12

Aufgabenstellung

Man berechne die Fouriertransformierten im \mathbb{R}^1 von:

a) $u(x) = (H(R - |x|)),$

b) $u(x) = e^{-a^2x^2},$

c) $u(x) = e^{ix^2}.$

Musterlösung

a)

$$u(x) = H(R - |x|) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < R, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnung der Fouriertransformierten:

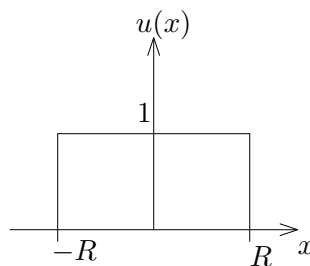


Abbildung 4: $u(x) = H(R - |x|)$

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} H(R - |x|) \cdot e^{ix\xi} dx \\ &= \int_{-R}^R 1 \cdot e^{ix\xi} dx \\ &= \frac{1}{i\xi} e^{ix\xi} \Big|_{-R}^R = \frac{1}{i\xi} (e^{iR\xi} - e^{-iR\xi}) \\ &= \frac{1}{i\xi} (2i \sin(R\xi)) \\ &= \frac{2 \sin(R\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

b) **1.Lösungsmöglichkeit:**

$$u(x) = e^{-a^2x^2}.$$

Wir betrachten die Funktion $v(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, welche die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v'(x) + xv(x) = 0 \quad (8)$$

löst.

Wir zeigen nun, dass auch die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[v(x)](\xi) = \hat{v}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\xi x} dx \text{ die Differentialgleichung (8) erfüllt.}$$

Dazu betrachten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{F}[v'(x) + xv(x)](\xi) \\ &= \mathcal{F}[v'(x)](\xi) + \mathcal{F}[xv(x)](\xi). \end{aligned} \quad (9)$$

Den ersten Summanden können wir mit Hilfe der folgenden Relation umschreiben

$$\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi).$$

In unserem Fall ergibt sich somit:

$$\mathcal{F}[v'(x)](\xi) = i\xi \mathcal{F}[v(x)](\xi). \quad (10)$$

Zur Umformung des zweiten Summanden wenden wir

$$D^\alpha(\mathcal{F}[f(x)](\xi)) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha f(x)](\xi)$$

an und wir können Term 2 schreiben als

$$\mathcal{F}[xv(x)](\xi) = \left(-\frac{1}{i} \mathcal{F}[v(x)](\xi) \right)'. \quad (11)$$

Einsetzen von (10) und (11) in (9) ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= i\xi \mathcal{F}[v(x)](\xi) + \left(-\frac{1}{i} \mathcal{F}[v(x)](\xi) \right)' \\ &= i\xi \mathcal{F}[v(x)](\xi) - \frac{1}{i} (\mathcal{F}[v(x)](\xi))' \\ &= \xi \mathcal{F}[v(x)](\xi) + (\mathcal{F}[v(x)](\xi))'. \end{aligned}$$

Es gilt daher:

$$-\xi \mathcal{F}[v(x)](\xi) = (\mathcal{F}[v(x)](\xi))',$$

und somit löst die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[v(x)](\xi)$ die gewöhnliche Differentialgleichung (8) mit dem Anfangswert $\hat{v}(0) = \sqrt{2\pi}$.

Da diese Lösung eindeutig ist, erhalten wir:

$$\hat{v}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Wir zeigen nun, dass für $v_b(x) = v(bx)$

$$\mathcal{F}[v_b(x)](\xi) = \frac{1}{b} \mathcal{F}[v(x)]\left(\frac{\xi}{b}\right)$$

gilt.

Beweis

Betrachte:

$$\mathcal{F}[v_b(x)](\xi) = \hat{v}_b(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-b^2 x^2} \cdot e^{ix\xi} dx.$$

Mit der Substitution $y = bx$ und $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{b}$ erhalten wir:

$$\hat{v}_b(\xi) = \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{iy\tilde{\xi}} dy = \frac{1}{b} \mathcal{F}[v(x)] \left(\frac{\xi}{b} \right).$$

Auf Grund dieser Überlegungen kann nun die Fouriertransformierte von $u(x) = e^{-a^2 x^2}$ mit $b = \sqrt{2}a$ berechnet werden:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}a} \sqrt{2\pi} \exp \left(-\frac{\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}a} \right)^2}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left(-\frac{\xi^2}{4a^2} \right).$$

2.Lösungsmöglichkeit:

$$u(x) = e^{-a^2 x^2}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^1} u(x) e^{i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x - a^2 x^2} dx \\ &= e^{\frac{i^2 \xi^2}{(2a)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \left(x^2 - \frac{i\xi x}{a^2} \cdot \frac{2}{2} + \frac{i^2 \xi^2}{(2a)^2} \right)} dx. \end{aligned}$$

Substituiton: $y = x - \frac{i\xi}{2a^2}$ und $\frac{dy}{dx} = 1$

$$\hat{u}(\xi) = e^{\frac{i^2 \xi^2}{(2a)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 y^2} dy.$$

Substituiton: $z = a\sqrt{2}y$ und $\frac{dz}{dy} = a\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{\frac{i^2 \xi^2}{(2a)^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left(-\frac{\xi^2}{4a^2} \right). \end{aligned}$$

c) Analog zur ersten Lösungsmöglichkeit aus dem b)-Teil erhält man mit der Substitution $b = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$:

$$\mathcal{F}[e^{ix^2}](\xi) = \hat{u}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{i}{4}(\xi^2 - \pi)}.$$

Lösung zur Aufgabe Ü13

Aufgabenstellung

Man berechne die Fouriertransformierte im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, von

$$u(x) = e^{-(Ax, x)},$$

wobei die quadratische Form (Ax, x) positiv definit ist, das heißt, es existiert eine positive Konstante α , so dass

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j \geq \alpha \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

ist.

Musterlösung

Da die quadratische Form positiv definit ist, existiert eine Matrix B , für die $x = By$, $A^{-1} = BB^T$ und $\det A \cdot (\det B)^2 = 1$ gilt. Somit ist eine Transformation des Problems in Diagonalform möglich $(Ax, x) = (AB y, B y) = (B^T A B y, y) = |y|^2$. Wir berechnen die Fouriertransformierte von $u(x)$:

$$\mathcal{F}[u(x)](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Ax, x)} e^{i(\xi, x)} dx.$$

Die Koordinatentransformation $x = By$ und $dx = |\det B| dy$ liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x)](\xi) &= |\det B| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(AB y, B y) + i(\xi, B y)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y_1^2 + \dots + y_n^2) + i(B^T \xi, y)} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{y_1=-\infty}^{\infty} e^{-y_1^2} \int_{y_2=-\infty}^{\infty} e^{-y_2^2} \dots \int_{y_n=-\infty}^{\infty} e^{-y_n^2} e^{i(B^T \xi)_j y_j} dy_n \dots dy_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{j=1}^n \int_{y_j=-\infty}^{\infty} e^{-y_j^2 + i(B^T \xi)_j y_j} dy_j. \end{aligned}$$

Die hergeleitete Formel $\mathcal{F}[e^{-a^2 x^2}](\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2}\right)$ aus Ü12 wird nun n -mal angewendet und man erhält:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(x)](\xi) &= \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (B^T \xi)_j^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{4} |B^T \xi|^2\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{4} (\xi, B B^T \xi)\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}^n}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{4} (\xi, A^{-1} \xi)\right). \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe Ü14

Aufgabenstellung

Gegeben sei folgendes Neumannproblem für die Funktion $u = u(x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

- a) Beweisen Sie die Lösbarkeitsbedingung.
b) Sind folgende Probleme lösbar?

$$\begin{aligned} \Delta u = \text{const} \neq 0 \quad \text{in } \Omega, & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \text{const} \neq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \\ \Delta u = c_1 \quad \text{in } \Omega, & \quad \frac{\partial u}{\partial n} = c_2 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- c) Zeigen Sie: Falls das Neumannproblem lösbar ist, ist die Lösung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Musterlösung

- a) Beweis der Lösbarkeitsbedingung:

Die Lösbarkeitsbedingung folgt aus der 1. Greenschen Formel
 $\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$, wobei hier $v = 1$ gewählt wird

$$\int_{\Omega} 1 \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} 1 \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma - \underbrace{\int_{\Omega} \underbrace{\nabla 1}_{=0} \cdot \nabla u \, dx}_{=0}.$$

Daraus folgt

$$\int_{\Omega} f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma.$$

- b) 1) Hier ist $f = c_1, g = 0$. Damit die Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist, müsste folgendes gelten:

$$\int_{\Omega} c_1 \, dx - 0 = 0.$$

Dies ist nicht erfüllbar für $c_1 \neq 0$.

- 2) In diesem Fall ist $f = 0$ und $g = c_2$. Damit hier die Lösbarkeitsbedingung erfüllt wäre, müsste wiederum gelten:

$$0 - \int_{\partial\Omega} c_2 \, d\sigma = 0.$$

Dies ist nicht lösbar für $c_2 \neq 0$.

- 3) Im letzten Fall ist $f = c_1$ und $g = c_2$. Wenn das Problem lösbar sein soll, muss gelten

$$\int_{\Omega} c_1 dx - \int_{\partial\Omega} c_2 d\sigma = 0$$

$$c_1 V(\Omega) - c_2 \mu(\partial\Omega) = 0.$$

Dieses Problem ist lösbar, falls gilt

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mu(\partial\Omega)}{V(\Omega)},$$

wobei $V(\Omega)$ das Volumen über Ω ist und $\mu(\partial\Omega)$ das Maß des Randes von Ω bezeichnet.

- c) Seien u_1 und $u_2 \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ Lösungen des Neumannproblems.

Zu zeigen ist, dass $u_1 = u_2 + c$ gilt.

Beweis

Da u_1 und u_2 Lösungen sind gilt für $v = u_1 - u_2$:

$$\Delta v = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Durch anwenden der 1. Greenschen Formel erhält man

$$\underbrace{\int_{\Omega} w \Delta v dx}_{=0} = - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma}_{=0}.$$

Daraus folgt:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v dx = 0 \quad \forall w \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (12)$$

Gleichung (12) gilt für alle $w \in C^1(\bar{\Omega})$ und somit auch für $w = v$. Wir erhalten

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = 0$$

und es folgt $\nabla v = \nabla u_1 - \nabla u_2 = 0$ in Ω , d.h. $\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Jetzt kann gefolgert werden, dass $u_1 = u_2 + c$ gilt.

Bemerkung:

Die Argumentation, dass $g = \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n}$ gilt, wenn u_1 und u_2 Lösungen sind, reicht nicht aus, da man aus der Gleichheit der Normalenableitungen nicht auf $u_1 = u_2 + c$ schließen kann. Die Gleichheit folgt nur aus $\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_i}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Lösung zur Aufgabe Ü15

Aufgabenstellung

Man berechne das Potential der doppelten Schicht mit konstanter Dichte für einen glatt berandeten, beschränkten Körper.

Musterlösung

Zu berechnen ist das Potential der doppelten Schicht mit konstanter Dichte für einen glatt berandeten Körper. Das Potential der doppelten Schicht lässt sich nach dem Darstellungssatz wie folgt darstellen:

$$\int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n} d\sigma = pu(y) - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Hier liegt der Fall vor, dass $u(x) = c$ ist. Somit verschwinden die beiden hinteren Integralterme. Für das Potential der doppelten Schicht mit konstanter Dichte bleibt

$$\begin{aligned} w(y) &= \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n} d\sigma \\ &= pu(y) = pc = \begin{cases} 1c & \text{falls } y \in \Omega, \\ \frac{1}{2}c & \text{falls } y \in \partial\Omega, \\ 0 & \text{falls } y \notin \bar{\Omega}. \end{cases} \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe Ü16

Aufgabenstellung

Man berechne das Potential der einfachen Schicht mit konstanter Dichte für die Einheitskugel.

Musterlösung

Die Berechnung des Potentials der einfachen Schicht mit konstanter Dichte kann nicht so einfach durchgeführt werden, wie die Berechnung des Potentials der doppelten Schicht. Konstante Dichte beim Potential der einfachen Schicht würde im Darstellungssatz bedeuten, dass $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{const}$ gilt. Daraus kann man aber nicht folgern, dass die anderen Integralterme verschwinden. Das Potential der einfachen Schicht muss explizit berechnet werden.

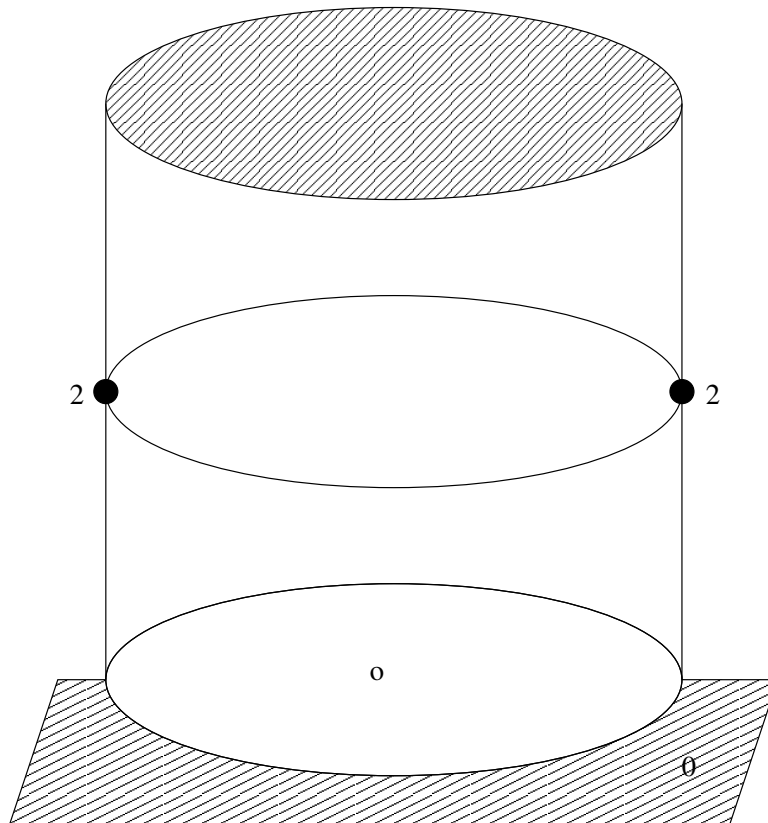


Abbildung 5: Potential der doppelten Schicht; unstetiges Verhalten am Rand

Das Potential der einfachen Schicht ist gegeben durch:

$$V(y) = \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) c \, d\sigma_x.$$

Das Potential soll für die Einheitskugel berechnet werden, d.h. $R = 1$, $n = 3$ und $E_3 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$. Wir berechnen nun

$$V(y) = V(y_1, y_2, y_3) = \int_{\partial\Omega} -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} d\sigma_x.$$

Aus Symmetriegründen ist V nur von $r = |y|$ abhängig und es reicht $V(0, 0, r)$ mit $r \geq 0$ zu berechnen. Dazu führen wir Kugelkoordinaten ein:

$$x = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Bevor wir das Integral berechnen, beachten wir, dass aus einer Nebenrechnung folgt

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= (\cos \phi)^2 (\sin \theta)^2 + (\sin \phi)^2 (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 - 2r \cos \theta + r^2 \\ &= 1 - 2r \cos \theta + r^2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Potential der einfachen Schicht

$$\begin{aligned} V(0,0,r) &= -\frac{c}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}} d\phi d\theta \\ &= -\frac{2\pi c}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}} d\theta. \end{aligned}$$

Für $r = 0$ bleibt:

$$\begin{aligned} V(0,0,0) &= -\frac{c}{2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{c}{2} (-\cos \theta|_0^\pi) \\ &= -\frac{c}{2} (1+1) = -c. \end{aligned}$$

Für $r > 0$ substituiert man $\cos \theta = \xi$ mit $\frac{d\xi}{d\theta} = -\sin \theta$ und es bleibt zu berechnen

$$\begin{aligned} V(0,0,r) &= +\frac{c}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-2r\xi+r^2}} d\xi \\ &= -\frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-2r\xi+r^2}} d\xi \\ &= +\frac{c}{2r} \sqrt{1-2r\xi+r^2} \Big|_{-1}^1 \\ &= +\frac{c}{2r} (|1-r| - |1+r|). \end{aligned}$$

Auf Grund des Betrages, wird eine Fallunterscheidung durchgeführt:

- $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} V(0,0,r) &= \frac{c}{2r} (-1+r - 1-r) \\ &= \frac{c}{2r} (-2) \\ &= -\frac{c}{r} \end{aligned}$$

- $r < 1$:

$$\begin{aligned} V(0,0,r) &= \frac{c}{2r} (1-r - 1-r) \\ &= -c \end{aligned}$$

Das Potential der einfachen Schicht lautet

$$V(y) = \begin{cases} -\frac{c}{r} & \text{für } r \geq 1 \\ -c & \text{für } 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Lösung zur Aufgabe Ü17

Aufgabenstellung

Gegeben seien folgende Neumannprobleme für die Funktion $H = H(x, y)$:

$$\Delta_x H(x, y) = 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega,$$

$$(a) \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega,$$

$$(b) \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.$$

Überprüfen Sie die Lösbarkeitsbedingung.

Musterlösung

- a) Zu überprüfen ist die Lösbarkeitsbedingung für die gegebene Randbedingung $\frac{\partial H(x,y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x}$ für $x \in \partial\Omega$ und $y \in \Omega$.

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \, dx - \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma &= 0 + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} \, d\sigma_x \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} \cdot 1 \, d\sigma_x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Die 1 ergibt sich nach dem Greenschen Darstellungssatz, da $y \in \Omega$ ist. Man erkennt sofort, dass die Lösbarkeitsbedingung nicht erfüllt ist.

- b) Im Vergleich zum Aufgabenteil a), ist nun die Randbedingung durch $\frac{\partial H(x,y)}{\partial n_x} = -\frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)}$ gegeben, wobei $\mu(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} 1 \, d\sigma$ das Maß des Randes ist.

Wir überprüfen die Lösbarkeitsbedingung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \, dx - \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma &= 0 + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} \, d\sigma_x - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \, d\sigma_x \\ &= 1 - \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} 1 \, d\sigma_x \\ &= 1 - \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \mu(\partial\Omega) \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösbarkeitsbedingung ist somit erfüllt.

Lösung zur Aufgabe Ü18

Aufgabenstellung

Gegeben sei ein glatt berandetes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\partial\Omega$ sei sein Rand.

Mit $E_n(\cdot)$ bezeichnen wir die (in der Vorlesung hergeleitete) Fundamentallösung des Laplace-Operators $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ im \mathbb{R}^n .

Die Funktion $G_D(x, y) = E_n(x - y) + h(x, y)$, die den Relationen

$$\begin{aligned}\Delta_x G_D(x, y) &= \delta(x - y) && \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ G_D(x, y) &= 0, && \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega\end{aligned}$$

genügt, bezeichnet man als Greensche Funktion des Dirichletproblems für den Laplace-Operator.

Man berechne $G_D(x, y)$ für:

- (a) $\Omega =$ Kreisscheibe $K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ (R bezeichne den Radius),
 (b) $\Omega =$ Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ (R Radius).

Musterlösung

Zu bestimmen ist die Greensche Funktion $G_D(x, y)$ im Aufgabenteil a) für die Kreisscheibe $K_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ und im Aufgabenteil b) für die Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Die Greensche Funktion hat allgemein die Gestalt $G_D(x, y) = E_n(x - y) + h(x, y)$, wobei $E_n(x - y)$ die Fundamentallösung des Laplace-Operators ist und für $h(x, y)$ gilt

$$\Delta_x h(x, y) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega, y \in \Omega, \quad (13)$$

$$h(x, y) = -E_n(x - y) \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega, y \in \Omega. \quad (14)$$

Wir bestimmen $h(x, y)$ mit der Spiegelungsmethode. Die Grundidee dieser Methode ist, dass wir $h(x, y) = -E_n(x' - y)$ setzen, wobei x' der an $\partial\Omega$ gespiegelte Punkt x ist. Diese Wahl erfüllt offensichtlich die Gleichung (13), da $x' \notin \Omega$ ist und Gleichung (14), da die Punkte auf dem Rand bei einer Spiegelung an $\partial\Omega$ Fixpunkte sind.

Die Spiegelung an einem Kreis ist definiert durch:

$$\begin{aligned}x' &= cx, \\ |x'| |x| &= R^2.\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$x' = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

- a) Mit der Fundamentallösung $E_2(x - y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right)$ können wir nun die Greensche Funktion angeben:

$$\begin{aligned}G_D(x, y) &= E_2(x - y) + h(x, y) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|x' - y|} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right) - \ln \left(\frac{1}{\left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right|} \right) \right).\end{aligned}$$

- b) Die Greensche Funktion lässt sich für die Kugel ganz analog berechnen. Die Fundamentallösung lautet $E_3(x - y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$ und somit die Greensche Funktion:

$$\begin{aligned} G_D(x, y) &= E_3(x - y) + h(x, y) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x' - y|} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{\left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right|} \right). \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe Ü19

Aufgabenstellung

Man bestimme die Funktion G_D für den Halbraum

$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$, wobei hier gelten soll $\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_D(x) = 0$.

Musterlösung

Das Vorgehen ist analog zur Aufgabe Ü18, in der allgemein die Spiegelungsmethode und die allgemeine Gestalt von G_D erklärt wurde.

Der Rand von H kann beschrieben werden durch $\partial H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ und es ist $E_3(x - y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} G_D(x, y) &= E_3(x - y) + h(x, y) \\ &= E_3(x - y) - E_3(x' - y) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x' - y|} \right), \end{aligned}$$

wobei $x' = (x_1, x_2, -x_3)$ ist.

Weiterhin gilt wie gefordert $\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_D(x, y) = 0$.

Lösung zur Aufgabe Ü20

Aufgabenstellung

Gegeben sei das Cauchysche Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0+) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Die Distributionen bzw. Funktionen u und f sind für $t > 0$ definiert und können durch 0 für $t < 0$ fortgesetzt werden, indem Sie $\tilde{u}(x, t) = H(t)u(x, t)$ und $\tilde{f}(x, t) = H(t)f(x, t)$ setzen. Welcher Differentialgleichung genügt \tilde{u} und wie kann \tilde{u} berechnet werden?

Musterlösung

Wir setzen u und f für $t < 0$ fort und erhalten:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) &= H(t)u(x, t), \\ \tilde{f}(x, t) &= H(t)f(x, t),\end{aligned}$$

wobei

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

ist. Falls u und f integrierbare Funktionen sind, sind \tilde{u} und \tilde{f} wohl definierte reguläre Distributionen.

Betrachten wir nun im Distributionensinne folgendes:

$$\begin{aligned}& \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_x \right) \tilde{u}(x, t), v(x, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_x \right) H(t)u(x, t), v(x, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (H(t)u(x, t)) - a^2 \Delta_x (H(t)u(x, t)), v(x, t) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (H(t)u(x, t)), v(x, t) \right\rangle - \langle a^2 \Delta_x (H(t)u(x, t)), v(x, t) \rangle.\end{aligned}\quad (15)$$

Wir formen den ersten Summanden um, in dem wir zuerst die Ableitung auf die Testfunktion übertragen und anschließend partiell integrieren

$$\begin{aligned}& \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (H(t)u(x, t)), v(x, t) \right\rangle \\ &= - \left\langle H(t)u(x, t), \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) \right\rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} H(t)u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) dt dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} u(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, t) dt dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left[- \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) v(x, t) dt + u(x, t) v(x, t) \Big|_0^{\infty} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) v(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} u(x, 0) v(x, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) v(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{u(x, 0)}_{g(x)} v(x, 0) dx \\ &= \left\langle H(t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), v(x, t) \right\rangle + \langle g(x) \delta_0(t), v(x, t) \rangle.\end{aligned}\quad (16)$$

Setzen wir nun (16) in (15) ein, erhalten wir, dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_x \right) \tilde{u}(x, t), v(x, t) \right\rangle \\
 &= \left\langle H(t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t), v(x, t) \right\rangle + \langle g(x) \delta_0(t), v(x, t) \rangle - \langle a^2 \Delta_x (H(t) u(x, t)), v(x, t) \rangle \\
 &= \left\langle H(t) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a^2 \Delta_x (H(t) u(x, t)), v(x, t) \right\rangle + \langle g(x) \delta_0(t), v(x, t) \rangle \\
 &= \left\langle H(t) \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - a^2 \Delta_x u(x, t) \right)}_{=f(x,t)}, v(x, t) \right\rangle + \langle g(x) \delta_0(t), v(x, t) \rangle \\
 &= \left\langle \tilde{f}(x, t), v(x, t) \right\rangle + \langle g(x) \delta_0(t), v(x, t) \rangle.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine neue Differentialgleichung der $\tilde{u}(x, t)$ genügen muss

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta_x \right) \tilde{u}(x, t) = \tilde{f}(x, t) + g(x) \delta_0(t). \quad (17)$$

Dies ist eine Differentialgleichung, bei der die Anfangsbedingungen in der rechten Seite enthalten sind. Daher kann diese mit Hilfe des Hauptsatzes gelöst werden und die Lösung lässt sich darstellen durch

$$\tilde{u}(x, t) = E_n * \left(\tilde{f}(x, t) + g(x) \delta_0(t) \right),$$

wobei

$$E_n = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp\left(-\frac{|x|^2}{4a^2 t}\right)$$

die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Gleichung (17) wird auch als verallgemeinertes Cauchy-Problem bezeichnet.

Lösung zur Aufgabe Ü21

Aufgabenstellung

Zeigen Sie, dass in einem einseitig begrenzten Stab die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(x, t) = 0, \quad x > 0, t > 0, \\
 & u(x, 0+) = g(x) \quad \text{für } x > 0, \quad u(0+, t) = 0 \quad \text{für } t > 0
 \end{aligned}$$

lautet:

$$u(x, t) = E(x, t) * \tilde{g}(x),$$

wobei $\tilde{g}(x)$ eine ungerade Fortsetzung von $g(x)$ auf die gesamte Zahlengerade ist.

Musterlösung

Da $\tilde{g}(x)$ eine ungerade Fortsetzung von $g(x)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &= g(x) && \text{für } x \geq 0, \\ \tilde{g}(x) &= -g(-x) && \text{für } x < 0.\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}(\partial_t - a^2 \Delta_x)v(x, t) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} v(x, t) &= g(x) && \text{in } \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

bekannt.

Sie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}v(x, t) &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \\ &= E(x, t) * g(x).\end{aligned}$$

Somit müssen wir nur $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0$ zeigen.

Wir betrachten dazu $u(x, t)$ und verwenden, dass $\tilde{g}(x)$ die ungerade Fortsetzung von $g(x)$ ist

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^0 -g(-\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^{\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \right].\end{aligned}$$

Wir führen im ersten Integral eine Variablensubstitution $\xi = -\eta$ durch und erhalten:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_{-\infty}^0 g(\eta) \exp\left(-\frac{|x + \eta|^2}{4a^2 t}\right) d\eta + \int_0^{\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{\infty} -g(\eta) \exp\left(-\frac{|x + \eta|^2}{4a^2 t}\right) d\eta + \int_0^{\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{\infty} -g(\xi) \exp\left(-\frac{|x + \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi + \int_0^{\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} g(\xi) \left[-\exp\left(-\frac{|x + \xi|^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) \right] d\xi.\end{aligned}$$

Auf Grund dieser Umformungen können wir $\lim_{x \rightarrow 0+} u(x, t)$ berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} g(\xi) \lim_{x \rightarrow 0+} \left[-\exp\left(-\frac{|x + \xi|^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2 t}\right) \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} g(\xi) \left[-\exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4a^2 t}\right) \right] d\xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Lösung $u(x, t) = E(x, t) * \tilde{g}(x)$ den Anfangs- und Randwerten genügt.

Lösung zur Aufgabe Ü22

Aufgabenstellung

Überlegen Sie, dass das in Aufgabe Ü21 formulierte Problem mit der allgemeineren Randbedingung

$$u(0+, t) = h(t)$$

die Lösung

$$u(x, t) = E(x, t) * \tilde{g}(x) - 2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} * h(t)$$

besitzt.

Musterlösung

Dazu wird die Lösung u als Summe zweier Funktionen geschrieben:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

mit

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= E(x, t) * \tilde{g}(x) \\ u_2(x, t) &= -2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} * h(t) \\ E(x, t) &= \frac{H(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \end{aligned}$$

In Ü21 wurde gezeigt, dass u_1 der homogenen Wärmeleitungsgleichung, der Anfangsbedingung und der homogenen Randbedingung genügt. Es bleibt zu zeigen, dass u_2 der homogenen Wärmeleitungsgleichung, den homogenen Anfangsbedingungen und der allgemeinen Randbedingung genügt. Der Nachweis dieser Eigenschaften gliedert sich in drei Schritte:

1. u_2 genügt der homogenen Wärmeleitungsgleichung,
2. $u_2(x, 0+) = 0$,
3. $u_2(0+, t) = h(t)$.

Grundlage für die nachfolgenden Rechnungen ist stets, dass die Faltung $\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t)$ existiert. Dies ist der Fall für $h(t) = 0$ für $t \leq 0$.

1. u_2 genügt der homogenen Wärmeleitungsgleichung:

Zum Nachweisen dieser Eigenschaft wird

$$\left\langle \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, v(x,t) \right\rangle$$

für alle $v(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ berechnet:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t) \right) - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t) \right), v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} * h(t) \right) - a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} * h(t) \right), v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} \right) * h(t) \right], v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} [\delta_0(x,t) * h(t)], v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle -[\delta_0(x,t) * h(t)], \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) \right\rangle \\ &= 2a^2 \left\langle h(t), \left\langle \delta_0(y,\tau), \frac{\partial}{\partial x} v(y+x,\tau+t) \right\rangle \right\rangle \\ &= 2a^2 \left\langle h(t), \frac{\partial}{\partial x} v(x,t) \right\rangle \\ &= -2a^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} h(t), v(x,t) \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. $u_2(x, 0+) = 0$:

Es wird

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \left\langle \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t), \psi(x) \right\rangle$$

für alle $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ berechnet:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \left\langle \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t), \psi(x) \right\rangle &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\langle E(x,t) * \frac{\partial}{\partial x} h(t), \psi(x) \right\rangle \\ &= \langle E(x,t) * 0, \psi(x) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. $u_2(0, t) = h(t)$:

Zu zeigen ist, dass gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left\langle -2a^2 \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} * h(t), \psi(t) \right\rangle = \langle h(t), \psi(t) \rangle$$

Dazu wird

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = \delta_0(t)$$

nachgewiesen.

Für $t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} -2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} &= -2a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \right) \\ &= -2a^2 \frac{H(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{-2x}{4a^2 t} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \\ &= \frac{H(t)x}{2a\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \\ &= \frac{x}{t} E(x, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Es wird die Funktion

$$L(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi$$

eingeführt und die Relation

$$-2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} = -H(t) \frac{\partial}{\partial t} L(x, t) \quad (19)$$

gezeigt.

Aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{2a \cdot 2t^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= -\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \end{aligned}$$

folgt:

$$-H(t) \left(-\frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \right) = \frac{x}{t} E(x, t)$$

und mit Gleichung (18) folgt Relation (19). Im Folgenden wird die Funktion $L(x, t)$ näher betrachtet.

Es gilt:

$$L(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1, \quad (20)$$

sowie für $t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-\xi^2} d\xi = 0. \quad (21)$$

Nun wird $\lim_{x \rightarrow 0^+} u_2(x, t) = h(t)$ gezeigt. Es gilt für alle $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ unter Beachtung von (19)

$$\begin{aligned} \left\langle -2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x}, \psi(t) \right\rangle &= - \left\langle H(t) \frac{\partial}{\partial t} L(x, t), \psi(t) \right\rangle \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} L(x, t) \cdot \psi(t) dt \\ &= \int_0^\infty L(x, t) \frac{d}{dt} \psi(t) dt - L(x, t) \psi(t) \Big|_0^\infty \\ &= \int_0^\infty L(x, t) \frac{d}{dt} \psi(t) dt + L(x, 0) \psi(0). \end{aligned}$$

Daraus folgt unter Beachtung von (20) und (21), dass

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-2a^2 \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \right) = \delta_0(t)$$

und damit erhält man

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u_2(x, t) = h(t).$$

Lösung zur Aufgabe Ü23

Aufgabenstellung

Man zeige, dass für die Fundamentallösungen der Wellengleichung $E_1(x, t)$ und $E_2(x, t)$ folgende Grenzwerte in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $n = 1, 2$, angenommen werden:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E_n(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial E_n(x, t)}{\partial t} = \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 E_n(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

Musterlösung

Fall 1: $n = 1$

Die Fundamentallösung lautet in diesem Fall $E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|)$.

Wir betrachten

$$\langle E_1(x, t), v(x) \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} H(at - |x|) v(x) dx.$$

Da $H(at - |x|) = 0$ ist für $at - |x| < 0$ gilt

$$\langle E_1(x, t), v(x) \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} v(x) dx.$$

Wir substituieren $x = aty$ und erhalten

$$\begin{aligned}\langle E_1(x, t), v(x) \rangle &= \frac{1}{2a} \int_{-1}^1 v(aty) at \, dy \\ &= \frac{t}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy.\end{aligned}\tag{22}$$

Für die Ableitung gilt nach Lemma 13

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial E_1(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \langle E_1(x, t), v(x) \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{t}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy.\end{aligned}\tag{23}$$

Die zweite Ableitung berechnen wir ganz analog und wenden ebenfalls Lemma 13 an

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^2 E_1(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial E_1(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{t}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \\ &\quad + \frac{t}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \\ &= \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{t}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy.\end{aligned}\tag{24}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (22), (23) und (24) können die Grenzwerte berechnet werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} E_1(x, t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\partial E_1(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{t}{2} \frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v(0) \, dy = v(0) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy \\ &= v(0) = \langle \delta_0(x), v(x) \rangle. \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\partial^2 E_1(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{d}{dt} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy + \frac{t}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int_{-1}^1 v(aty) \, dy \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 ay v'(aty) \, dy = a v'(0) \int_{-1}^1 y \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fall 2: $n = 2$

$E_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}$ ist Fundamentallösung für $n = 2$.

Es gilt

$$\langle E_2(x, t), v(x) \rangle = \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{H(at - |x|) v(x)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} \, dx.$$

Wie im Fall $n = 1$ gilt hier $H(at - |x|) = 0$ für $at - |x| < 0$ und somit

$$\langle E_2(x, t), v(x) \rangle = \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}} \frac{v(x)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \, dx,$$

wobei K_{at} der Kreis mit dem Radius at um den Mittelpunkt 0 ist.

Durch die Substitution $x = aty$, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle E_2(x, t), v(x) \rangle &= \frac{1}{2\pi a} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{a^2 t^2 - (at)^2 y_1^2 - (at)^2 y_2^2}} (at)^2 \, dy \\ &= \frac{1 \cdot (at)^2}{2\pi a \cdot at} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} \, dy \\ &= \frac{t}{2\pi} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1 - |y|^2}} \, dy. \end{aligned} \tag{25}$$

Für die Ableitungen gilt (analog zum Fall $n = 1$)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E_2(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \\ &+ \frac{t}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 E_2(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \\ &+ \frac{t}{2\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy. \end{aligned} \quad (27)$$

Für den ersten Grenzwert folgt aus Gleichung (25)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} E_2(x, t) = 0.$$

Auf Grund von Gleichung (26) erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\partial E_2(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{K_1} \frac{v(0)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy.$$

Transformation des Integrals mit Hilfe der Polarkoordinaten $y_1 = r \cdot \cos \phi$, $y_2 = r \cdot \sin \phi$ und $dy = r dr d\phi$ ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\partial E_2(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} v(0) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr d\phi \\ &= v(0) \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= v(0) \left(-\sqrt{1-r^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= v(0). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial E_2(x, t)}{\partial t} = \delta(x).$$

Vertauschung von Differentiation und Integration in Gleichung (27), sowie Polarkoordinatentransformation liefert

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{\partial^2 E_2(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d}{dt} \int_{K_1} \frac{v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{K_1} \frac{ay \cdot \nabla_y v(aty)}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{c_1 r \cos \phi + c_2 r \sin \phi}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\phi \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei $c_1 = \frac{\partial}{\partial y_1} v(aty)$ und $c_2 = \frac{\partial}{\partial y_2} v(aty)$ ist.

Lösung zur Aufgabe Ü24

Aufgabenstellung

Das Cauchyproblem für die zeitabhängige Schwingungsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} u''(t) + a^2 u(t) &= f(t) \quad \text{für } t > 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \\ u'|_{t=0} &= u_1. \end{aligned}$$

Man bestimme die Auslenkung (Schwingung) $u(t)$ mit traditionellen Methoden und mit Hilfe von Fundamentallösungen.

(Hinweis: Man setze f und u durch Null für $t < 0$ fort, formuliere das obige Problem als Differentialgleichung im \mathbb{R}^1 und stelle die Lösung als Faltung mit der Fundamentallösung dar.)

Musterlösung

1. Bestimmung der Lösung mit Hilfe von Fundamentallösungen

Nach Beispiel 1 (S. 34) kann die Fundamentallösung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit $E(t) = H(t)u_0(t)$ bestimmt werden, wobei $u_0(t)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} u_0''(t) + a^2 u_0(t) &= 0, \\ u_0(0) &= 0, \\ u_0'(0) &= 1 \end{aligned}$$

löst.

Als Lösung dieser Gleichung erhalten wir

$$u_0(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at.$$

Setzen wir die Anfangsbedingungen ein können wir c_1 und c_2 bestimmen

$$\begin{aligned} u_0(0) = c_1 &= 0, \\ u_0'(0) = c_2 a &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_0(t) = \frac{1}{a} \sin at$ und die Fundamentallösung lautet

$$E(t) = H(t) \frac{1}{a} \sin at.$$

Um nun mit Hilfe der Fundamentallösung die Lösung des Cauchyproblems der Schwingungsgleichung zu bestimmen, setzen wir zuerst $u(t)$ und $f(t)$ durch $U(t) = H(t)u(t)$ und $F(t) = H(t)f(t)$ auf ganz \mathbb{R} fort und stellen eine neue Differentialgleichung für $U(t)$ auf.

Wir betrachten zuerst

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} U(t), v(t) \right\rangle &= \left\langle H(t)u(t), \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) dt. \end{aligned}$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2}{dt^2} U(t), v(t) \right\rangle &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} v(t) dt + u(t) \frac{d}{dt} v(t) \Big|_0^{\infty} \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} v(t) dt - u(0) \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=0} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} u(t) v(t) dt - \frac{d}{dt} u(t) v(t) \Big|_0^{\infty} - u(0) \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=0} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} u(t) v(t) dt + \frac{d}{dt} u(t) \Big|_{t=0} v(0) - u(0) \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=0} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d^2}{dt^2} u(t) v(t) dt + u_1 v(0) - u_0 \frac{d}{dt} v(t) \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle H(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t), v(t) \right\rangle + \langle u_1 \delta(t), v(t) \rangle + \langle u_0 \delta'(t), v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine neue Differentialgleichung für $U(t)$

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} + a^2 \right) U(t), v(t) \right\rangle &= \left\langle H(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) + a^2 u(t) \right), v(t) \right\rangle + \langle u_1 \delta(t), v(t) \rangle + \langle u_0 \delta'(t), v(t) \rangle \\ &= \langle H(t) f(t), v(t) \rangle + \langle u_1 \delta(t), v(t) \rangle + \langle u_0 \delta'(t), v(t) \rangle \\ &= \langle F(t), v(t) \rangle + \langle u_1 \delta(t), v(t) \rangle + \langle u_0 \delta'(t), v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung, kann als Faltung mit der Fundamentallösung dargestellt werden, wobei $U(t) = u(t)$ gilt für $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= E(t) * (F(t) + u_0 \delta'(t) + u_1 \delta(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t - \tau) F(\tau) d\tau + E(t) * (u_0 \delta'(t)) + E(t) * (u_1 \delta(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) \frac{1}{a} \sin(a(t-\tau)) H(\tau) f(\tau) \, d\tau + u_0(E'(t) * \delta) + u_1(E(t) * \delta(t)) \\
&= \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) \sin(a(t-\tau)) \, d\tau + u_0 E'(t) + u_1 E(t) \\
&= \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) \sin(a(t-\tau)) \, d\tau + u_0 \cos at + \frac{u_1}{a} \sin at.
\end{aligned}$$

2. Bestimmung der Lösung mittels traditioneller Methoden

Die Lösung einer inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung

$$u(t) = u_p(t) + u_h(t).$$

Bestimmung der homogenen Lösung:

Wir betrachten dazu die homogene Differentialgleichung

$$u''(t) + a^2 u(t) = f(t), \quad (28)$$

$$u(0) = u_0, \quad (29)$$

$$u'(0) = u_1. \quad (30)$$

Als Ansatzfunktion zur Bestimmung der Lösung dient $e^{\lambda t}$. Einsetzen der Ansatzfunktion in (28) liefert

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + a^2) = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach t erhalten wir als Lösung

$$u_h(t) = e^{iat}.$$

Wenn wir eine komplexe Lösung einer Differentialgleichung erhalten, dann ist immer der Realteil, sowie der Imaginärteil eine Lösung der Differentialgleichung und wir erhalten als homogene Lösung

$$u_h(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at.$$

Setzen wir die Anfangsbedingungen ein, erhalten wir

$$u_h(t) = u_0 \cos at + \frac{u_1}{a} \sin at.$$

Die partikuläre Lösung wird mit Hilfe der Variation der Konstanten berechnet. Dazu wird

$$u_p(t) = \tilde{c}_1(t)y_1(t) + \tilde{c}_2(t)y_2(t) \quad (31)$$

gesetzt, wobei $y_1(t) = \cos at$ und $y_2 = \sin at$ ist.

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\tilde{c}'_1(t)y_1(t) + \tilde{c}'_2(t)y_2(t) &= 0, \\ \tilde{c}'_1(t)y'_1(t) + \tilde{c}'_2(t)y'_2(t) &= f(t),\end{aligned}$$

welches wir mittels des Cramerschen Verfahrens (Wronski-Determinante) lösen werden. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\tilde{c}'_1(t) &= \frac{W_1(t)}{W(t)}, \\ \tilde{c}'_2(t) &= \frac{W_2(t)}{W(t)},\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a \sin at & a \cos at \end{vmatrix} = a, \\ W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y'_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin at \\ f(t) & \cos at \end{vmatrix} = -f(t) \sin at, \\ W_2 &= \begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y'_1(t) & f(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos at & 0 \\ -a \sin at & f(t) \end{vmatrix} = f(t) \cos at\end{aligned}$$

ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{c}'_1(t) &= \frac{-f(t) \sin at}{a}, \\ \tilde{c}'_2(t) &= \frac{f(t) \cos at}{a}.\end{aligned}$$

Für $\tilde{c}_1(t)$ und $\tilde{c}_2(t)$ ergibt sich daraus

$$\tilde{c}_1(t) = \int_0^t \frac{-f(\tau) \sin a\tau}{a} d\tau, \quad (32)$$

$$\tilde{c}_2(t) = \int_0^t \frac{f(\tau) \cos a\tau}{a} d\tau. \quad (33)$$

Setzen wir (32) und (33) in (31) ein können wir die partikuläre Lösung berechnen

$$u_p(t) = \left(\int_0^t \frac{-f(\tau) \sin a\tau}{a} d\tau \right) \cos at + \left(\int_0^t \frac{f(\tau) \cos a\tau}{a} d\tau \right) \sin at.$$

Somit können wir jetzt die Lösung berechnen

$$\begin{aligned}u(t) &= u_p(t) + u_h(t) \\ &= \left(\int_0^t \frac{-f(\tau) \sin a\tau}{a} d\tau \right) \cos at + \left(\int_0^t \frac{f(\tau) \cos a\tau}{a} d\tau \right) \sin at + u_0 \cos at + \frac{u_1}{a} \sin at.\end{aligned}$$

Mit $\sin(b-a) = \cos a \sin b - \sin a \cos b$ folgt

$$u(t) = \frac{1}{a} \int_0^t f(\tau) \sin(a(\tau-t)) d\tau + u_0 \cos at + \frac{u_1}{a} \sin at.$$

Lösung zur Aufgabe Ü25

Aufgabenstellung

Das Cauchyproblem für die Wärmeleitungsgleichung (nur zeitabhängig) lautet:

$$\begin{aligned}u'(t) + a u(t) &= f(t), \\ u|_{t=0} &= u_0.\end{aligned}$$

Man bestimme die Temperatur u zum Zeitpunkt t . Man zeige weiter, durch ein analoges Vorgehen wie in Aufgabe Ü24, dass die Lösung mit Hilfe der Fundamentallösung in der Form

$$u(t) = \int_0^t f(\tau) e^{-a(t-\tau)} d\tau + u_0 e^{-at}$$

dargestellt werden kann.

Musterlösung

Zu bestimmen ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u'(t) + au(t) &= f(t), \\ u|_{t=0} &= u_0.\end{aligned}$$

Zuerst setzen wir $u(t)$ und $f(t)$ für $t < 0$ fort durch

$$\begin{aligned}U(t) &= H(t)u(t), \\ F(t) &= H(t)f(t).\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}U(t), v(t) \right\rangle &= (-1) \left\langle U(t), \frac{d}{dt}v(t) \right\rangle \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} H(t)u(t) \frac{d}{dt}v(t) dt \\ &= - \int_0^{\infty} u(t) \frac{d}{dt}v(t) dt.\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{d}{dt}U(t), v(t) \right\rangle &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}u(t)v(t) dt - u(t)v(t)|_0^{\infty} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \frac{d}{dt}u(t)v(t) dt + u(0)v(0) \\ &= \left\langle H(t) \frac{d}{dt}u(t), v(t) \right\rangle + u_0v(0) \\ &= \left\langle H(t) \frac{d}{dt}u(t), v(t) \right\rangle + \langle u_0\delta(t), v(t) \rangle.\end{aligned}$$

Diese Umformungen führen zu

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{d}{dt} + a \right) U(t), v(t) \right\rangle &= \left\langle H(t) \left(\frac{d}{dt} u(t) + au(t) \right), v(t) \right\rangle + \langle u_0 \delta(t), v(t) \rangle \\ &= \langle F(t), v(t) \rangle + \langle u_0 \delta(t), v(t) \rangle. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine neue Differentialgleichung für $U(t)$

$$\left(\frac{d}{dt} + a \right) U(t) = F(t) + u_0 \delta(t).$$

Von dieser Differentialgleichung lässt sich die Lösung berechnen nach dem Hauptsatz, der aus der Vorlesung bekannt ist

$$u(t) = E(t) * (F(t) + u_0 \delta(t)), \quad (34)$$

wobei $E(t)$ die Fundamentallösung der zeitabhängigen Wärmeleitungsgleichung ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich die Fundamentallösung von

$$u'(t) + au(t) = 0$$

darstellen lässt durch

$$E(t) = H(t)u_0(t),$$

wobei $u_0(t)$ die Differentialgleichung

$$u_0'(t) + au_0(t) = 0, \quad (35)$$

$$u_0(0) = 1 \quad (36)$$

löst.

Durch Einsetzen des Lösungsansatz $u_0(t) = e^{\lambda t}$ in Gleichung (35) erhalten wir

$$e^{\lambda t} (\lambda + a) = 0.$$

Daraus folgt $\lambda = -a$ und als Lösung erhält man $u_0(t) = ce^{-at}$.

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung (36) kann c bestimmt werden

$$u_0(0) = c = 1.$$

Die Lösung von Gleichung (35) lautet somit $u(t) = e^{-at}$ und für die Fundamentallösung erhalten wir

$$E(t) = H(t)e^{-at}.$$

Setzen wir $E(t)$ in (34) ein, erhalten wir für die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u(t) &= E(t) * F(t) + E(t) * (u_0 \delta(t)) \\ &= E(t) * F(t) + u_0 (E(t) * \delta(t)) \\ &= E(t) * F(t) + u_0 E(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau) e^{-a(t-\tau)} H(\tau) f(\tau) \, d\tau + u_0 e^{-at} \\ &= \int_0^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) \, d\tau + u_0 e^{-at}. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe Ü26

Aufgabenstellung

Man gebe schwache Formulierungen für folgende Randwertprobleme an:

a) $-\Delta u = f$ in Ω , $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$, wobei α und β nichtverschwindende Konstanten sind.

b) $-\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf Γ_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf Γ_2 .

Γ_1 und Γ_2 sind sich nicht überschneidende Randstücke, so dass $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$ ist.

Musterlösung

a) Gesucht ist die schwache Formulierung für folgendes Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (37)$$

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (38)$$

Multiplikation von Gleichung (37) mit einer Testfunktion (es ist noch nicht bekannt, aus welchem Raum wir diese zu wählen haben) und anschließende Integration ergibt

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Die linke Seite formen wir mit Hilfe der ersten Greenschen Formel um

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma.$$

Daraus folgt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Auf dem Rand $\partial\Omega$ gilt: $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$, bzw. $-\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\alpha}{\beta} u$. Mit Hilfe dieser Randbedingung können wir die schwache Formulierung aufschreiben.

Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_{\partial\Omega} u v \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega)$$

gilt.

b) Gesucht ist die schwache Formulierung für folgendes Randwertproblem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (39)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_2. \quad (41)$$

Um die schwache Formulierung aufstellen zu können, ist das Vorgehen ganz analog wie im Aufgabenteil b). Wir multiplizieren Gleichung (39) zuerst mit einer Testfunktion v , integrieren anschließend und wenden die erste Greensche Formel an

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} f v \, dx. \end{aligned}$$

Auf Grund der Randbedingung (41) verschwindet das Randintegral über Γ_2 . Wir wählen uns nun die Testfunktion v so, dass das Randintegral über Γ_1 verschwindet. Dazu wählen wir uns v aus $W^{1,2}(\Omega, \Gamma_1)$, wobei

$$W^{1,2}(\Omega, \Gamma_1) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\Gamma_1} = 0\}$$

ist.

Wählen wir u ebenfalls aus diesem Raum, ist die Randbedingung (40) erfüllt. Wir können nun die schwache Formulierung aufschreiben.

Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega, \Gamma_1)$, so dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega, \Gamma_1)$$

gilt.

Lösung zur Aufgabe Ü27

Aufgabenstellung

Die Durchbiegung u einer dünnen fest eingespannten Platte wird durch folgendes Randwertproblem beschrieben (Kirchhoff Modell): Finde ein u , so dass gilt:

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ und } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Hierbei ist:

$$\Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}.$$

Man gebe eine schwache Formulierung dieses Randwertproblems an.

Musterlösung

Wir setzen $\Delta u = w$, multiplizieren mit einer Testfunktion und integrieren anschließend

$$\int_{\Omega} \Delta w v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Anwenden der zweiten Greenschen Formel liefert

$$\int_{\Omega} \Delta w v \, dx = \int_{\Omega} w \Delta v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} v \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Da der Laplace-Operator auf u und w angewandt wird und beide Randintegrale verschwinden sollen, wählen wir u und w aus $W_0^{2,2}(\Omega)$.

Die schwache Formulierung lautet:

Finde ein $u \in W_0^{2,2}(\Omega)$, so dass

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in W_0^{2,2}(\Omega)$$

gilt.

Lösung zur Aufgabe Ü28

Aufgabenstellung

Sei Ω ein beschränktes Intervall im \mathbb{R}^1 . Man zeige, dass $W_0^{1,p}(\Omega)$ echt in $W^{1,p}(\Omega)$ enthalten ist.

Musterlösung

Um dies zu zeigen, reicht es eine Funktion $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ zu finden, die nicht in $W_0^{1,p}(\Omega)$ liegt. Wir wählen $\Omega = (-1, +1)$ und $u_0(x) = (x + 1)^2$.

Es gilt allgemein: für Funktionen mit $u(-1) = 0$

$$u(x) = \int_{-1}^x \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi = \int_{-1}^x u'(\xi) d\xi$$

und daraus folgt

$$|u(x)| = \left| \int_{-1}^x u'(\xi) d\xi \right|.$$

Wir wenden die Höldersche Ungleichung an und erhalten

$$\left| \int_{-1}^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \|1\|_{L^q(\Omega)} \|u'(x)\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ist.

Somit können wir das Maximum von $u(x)$ abschätzen durch

$$\max_{x \in [-1, +1]} |u(x)| \leq c \|u'(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u(x)\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Nehmen wir an, es gäbe ein $v \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $\|u_0(x) - v(x)\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$ gilt, dann wäre

$$\max_{x \in [-1, +1]} \|u_0(x) - v(x)\| \leq \tilde{\varepsilon} = c\varepsilon.$$

Es gilt jedoch:

$$u_0(1) - v(1) = 4.$$

Daher muss gelten:

$$4 \leq \max_{x \in [-1, +1]} \|u_0(x) - v(x)\| \leq \tilde{\varepsilon},$$

was zu einem Widerspruch führt, da $\tilde{\varepsilon}$ beliebig klein werden kann.

Lösung zur Aufgabe Ü29

Aufgabenstellung

Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$. Die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist aus $W^{1,p}(\Omega)$. Es gibt jedoch keine Funktion $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, so dass $\|u - \varphi\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$ für ein hinreichend kleines ε ist.

Musterlösung

Gegeben ist die Funktion

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Zu zeigen ist, dass es kein $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ gibt, so dass

$$\|u - \phi\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon \quad (42)$$

gilt. Wir nehmen an, dass es ein $\phi \in C^1(\bar{\Omega})$ gäbe, welches Bedingung (42) erfüllt.

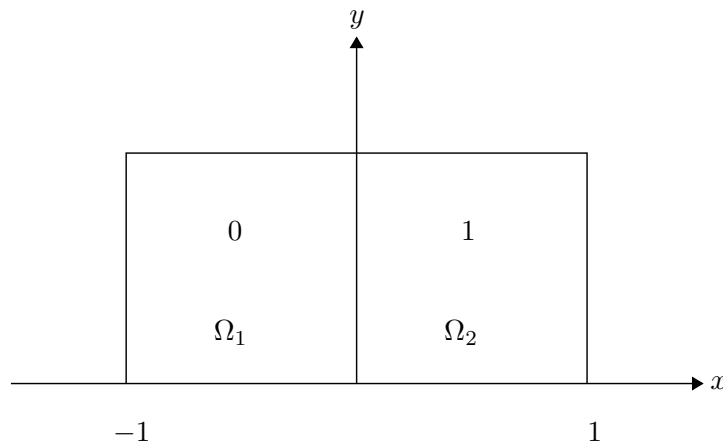


Abbildung 6: $u(x, y)$

Für dieses ϕ gilt

$$\begin{aligned} \|u - \phi\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &= \int_{\Omega_1} |u - \phi|^p \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} |u - \phi|^p \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial}{\partial x} (u - \phi) \right|^p \, dx \, dy + \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial}{\partial y} (u - \phi) \right|^p \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial}{\partial x} (u - \phi) \right|^p \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial}{\partial y} (u - \phi) \right|^p \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega_1} |\phi|^p \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} |1 - \phi|^p \, dx \, dy \\
&\quad + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} \phi \right|^p \, dx \, dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial y} \phi \right|^p \, dx \, dy \\
&< \varepsilon^p.
\end{aligned} \tag{43}$$

Allgemein gilt:

$$\|a\| = \|a + b - b\| \leq \|a - b\| + \|b\|$$

und daraus folgt

$$\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|. \tag{44}$$

Weiterhin gilt

$$\|1\|_{L^p(\Omega_2)} = \left(\int_0^1 \int_0^1 1 \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{45}$$

Aus (44), (45) und (42) folgt

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega_2)} = \|\phi - 1 + 1\|_{L^p(\Omega_2)} \geq \|1\|_{L^p(\Omega_2)} - \|\phi - 1\|_{L^p(\Omega_2)} > 1 - \varepsilon. \tag{46}$$

Wir zeigen nun die Gültigkeit folgender Gleichung

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega_2)} \leq c\varepsilon.$$

Für $\xi_0 \in [-1, 0)$ gilt

$$f(x, y) = \int_{\xi_0}^x \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y) \, d\xi + f(\xi_0, y).$$

Mit Hilfe dieser Gleichung folgt

$$|f(x, y)|^p \leq \left(\int_{\xi_0}^1 \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y) \right| \, d\xi + |f(\xi_0, y)| \right)^p.$$

Wir wenden die Hölderungleichung an und erhalten

$$|f(x, y)|^p \leq \left(\|1\|_{L^q(-1,1)} \left(\int_{\xi_0}^1 \left| \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y) \right|^p \, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} + |f(\xi_0, y)| \right)^p, \tag{47}$$

wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ gilt.

Um den obigen Ausdruck weiter abschätzen zu können benötigen wir folgende Ungleichung und nicht negative Zahlen a und b

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \quad (48)$$

Weiterhin gilt $\|1\|_{L_q(-1,1)} = 4^{\frac{1}{q}}$, da

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 2 \, dy = 4. \quad (49)$$

Mit Hilfe von (48) und (49) ergibt sich für (47)

$$\begin{aligned} |f(x, y)|^p &\leq 2^{p-1} \left(\left(4^{\frac{1}{q}}\right)^p \int_{\xi_0}^1 \left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y)\right|^p d\xi + |f(\xi_0, y)|^p \right) \\ &= 2^{p-1} \left(\left(4^{1-\frac{1}{p}}\right)^p \int_{\xi_0}^1 \left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y)\right|^p d\xi + |f(\xi_0, y)|^p \right) \\ &= 2^{p-1} \left(4^{p-1} \int_{\xi_0}^1 \left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y)\right|^p d\xi + |f(\xi_0, y)|^p \right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\int_0^1 |f(x, y)|^p dy \leq C \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, y)\right|^p d\xi dy + \int_0^1 |f(\xi_0, y)|^p dy \right). \quad (50)$$

Wir betrachten jetzt die Funktion $f = \phi$ und wählen ein $\xi_0 \in [-1, 0)$, so dass

$\int_0^1 |\phi(\xi_0, y)|^p dy < \varepsilon^p$ ist. Dies ist möglich, denn angenommen es gelte $\int_0^1 |\phi(x, y)|^p dy = g(x) \geq \varepsilon^p$ für alle $x \in (-1, 0)$ dann würde auch gelten

$$\int_{-1}^0 g(x) dx = \int_{\Omega_1} |\phi|^p dx dy \geq \varepsilon^p,$$

was im Widerspruch zu (43) steht.

Integration von (50) von 0 bis 1 nach x ergibt

$$\int_0^1 \int_0^1 |\phi(x, y)|^p dy dx = \int_{\Omega_2} |\phi|^p dy dx \leq C(2\varepsilon^p).$$

Daraus folgt, dass

$$\|\phi\|_{L_p(\Omega_2)} \leq c\varepsilon \quad (51)$$

ist. Aus (46) und (51) folgt

$$1 - \varepsilon < \|\phi\|_{L_p(\Omega_2)} \leq c\varepsilon,$$

was für ein genügend kleines ε nicht sein kann. Unsere Annahme führte zu einem Widerspruch und somit gibt es kein ϕ , welches Bedingung (42) erfüllt.

Lösung zur Aufgabe Ü30

Aufgabenstellung

Man zeige, dass in $W^{k,p}(\Omega)$ folgende Normen äquivalent sind:

$$(1) \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

$$(2) \|u\|_{k,p,max} = \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \},$$

$$(3) \|u\|_{k,p,1} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Musterlösung

Wir zeigen, dass die Normen $\|u\|_{k,p,1}$ und $\|u\|_{k,p,max}$, sowie die Normen $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ und $\|u\|_{k,p,max}$ äquivalent sind.

Es gilt

$$\|u\|_{k,p,max} = \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{k,p,1}.$$

Andererseits gilt

$$\|u\|_{k,p,1} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq d \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \} = d \|u\|_{k,p,max},$$

wobei d die Anzahl der Summanden ist. Somit ist $\|u\|_{k,p,1}$ äquivalent zu $\|u\|_{k,p,max}$.

Wir betrachten:

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,p,max}^p &= \left(\max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \} \right)^p \\ &= \max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p &= \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq d \left(\max_{|\alpha| \leq k} \{ \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \} \right)^p \\ &\leq d \|u\|_{k,p,max}^p. \end{aligned}$$

Damit sind alle Äquivalenzen gezeigt.

Lösung zur Aufgabe Ü31

Aufgabenstellung

Man zeige, dass $W^{k,p_1}(\Omega) \subset W^{k,p_2}(\Omega)$ für $p_1 > p_2 \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, ist. Weiterhin gebe man ein Beispiel an, das zeigt, dass $W^{k,p_1}(\Omega)$ eine echte Teilmenge von $W^{k,p_2}(\Omega)$ ist.

Musterlösung

Die Räume $W^{k,p_1}(\Omega)$ und $W^{k,p_2}(\Omega)$ sind wie folgt definiert:

$$W^{k,p_1}(\Omega) = \{u \in L^{p_1}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p_1}(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\},$$

$$W^{k,p_2}(\Omega) = \{u \in L^{p_2}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p_2}(\Omega) \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Wir wissen bereits, dass $L^{p_1}(\Omega) \subset L^{p_2}(\Omega)$, für $p_1 > p_2$. Daraus folgt, dass $W^{k,p_1}(\Omega) \subset W^{k,p_2}(\Omega)$ ist. Falls $D^\alpha u \in L^{p_1}(\Omega)$, dann gilt nach vorheriger Überlegung ebenfalls $D^\alpha u \in L^{p_2}(\Omega)$ für $p_1 > p_2$.

Beispiel, welches zeigt, dass $W^{k,p_1}(\Omega)$ eine echte Teilmenge von $W^{k,p_2}(\Omega)$ ist:

Wir wählen ein Beispiel aus \mathbb{R}^1 . Es sei $\Omega = (0, 1)$ und $u(x) = x^\alpha$.

Es gilt

$$\int_0^1 x^{\alpha p} dx < \infty$$

für $\alpha p > -1$ bzw. $\alpha > -\frac{1}{p}$, das heißt in diesem Fall ist $u(x) = x^\alpha \in L^p(\Omega)$.

Da $p_1 > p_2$ gilt $-\frac{1}{p_1} > -\frac{1}{p_2}$. Wählen wir nun α wie folgt

$$-\frac{1}{p_2} < \alpha < -\frac{1}{p_1},$$

dann ist $u(x)$ Element von $L^{p_2}(\Omega)$ aber nicht von $L^{p_1}(\Omega)$.

Für die k -te Ableitung von u ergibt sich

$$u^{(k)}(x) = x^{\alpha-k} \prod_{i=1}^k (\alpha - i)$$

Damit diese Element von $L^p(\Omega)$ ist, muss

$$\int_0^1 x^{(\alpha-k)p} dx < \infty$$

sein. Dies ist für $(\alpha - k)p > -1$ erfüllt und daraus folgt, dass $u^{(k)}(x) \in L^p(\Omega)$ für $\alpha > -\frac{1}{p} + k$.

Wählen wir α wie folgt:

$$-\frac{1}{p_2} - k < \alpha < -\frac{1}{p_1} - k,$$

dann ist u Element von $W^{k,p_2}(\Omega)$, aber nicht von $W^{k,p_1}(\Omega)$.

Lösung zur Aufgabe Ü32

Aufgabenstellung

Der Beweis des Satzes von Lax-Milgram für Bilinearformem auf $V_1 \times V_2$ ist zu vervollständigen. **a)** Sei V ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_V$. Man zeige, dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} |(w, v)_V| = \|w\|_V.$$

b) Man zeige direkt, dass $\text{Im}(A)$ in V abgeschlossen ist.

Musterlösung

a) Es gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} |(w, v)| \leq \sup_{\|v\|_V \leq 1} (\|w\|_V \cdot \|v\|_V) \leq \|w\|_V.$$

Andererseits gilt

$$\sup_{\|v\|_V \leq 1} |(w, v)| \geq \left(w, \frac{w}{\|w\|_V} \right) = \|w\|_V.$$

Aus diesen beiden Ungleichungen folgt $\sup_{\|v\|_V \leq 1} |(w, v)| = \|w\|_V$.

b) Zu zeigen ist, dass $\text{Im}(A)$ abgeschlossen ist, wobei $A : V_1 \rightarrow V_2$ eine lineare, stetige Abbildung ist, die durch $a(u, v) = (Au, v)_{V_2}$ gegeben ist.

Wir zeigen, dass der Grenzwert w einer Cauchy-Folge $w_n \in \text{Im}(A)$ Element von $\text{Im}(A)$ ist.

$a(u, v)$ ist definiert auf $V_1 \times V_2$, wobei V_1 und V_2 Hilberträume sind.

Da V_2 ein Hilbertraum ist, existiert der Grenzwert $w \in V_2$ der Cauchy-Folge w_n und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w\|_{V_2} = 0.$$

Wir wissen bereits, dass A stetig ist und A^{-1} existiert auf $\text{Im}(A)$. Weiterhin wissen wir aus dem Aufgabenteil a), dass gilt

$$\sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |(Au, v)_{V_2}| = \|Au\|_{V_2}.$$

Wir betrachten $u_n \in V_1$ mit $A^{-1}w_n = u_n$. Aufgrund der Voraussetzung $\sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u, v)_{V_2}| \geq c_2 \|u\|_{V_1}$ können wir zeigen, dass u_n eine Cauchy-Folge in V_1 ist:

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{V_1} &\leq \frac{1}{c_2} \sup_{\|v\|_{V_2} \leq 1} |a(u_n - u_m, v)_{V_2}| \\ &= \frac{1}{c_2} \|A(u_n - u_m)\|_{V_2} \\ &= \frac{1}{c_2} \|w_n - w_m\|_{V_2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da V_1 ein Hilbertraum ist, existiert ein $u \in V_1$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Außerdem gilt, da A stetig ist

$$Au_n \rightarrow Au = w.$$

Daraus folgt, dass $w \in \text{Im}(A)$ ist und somit haben wir die Abgeschlossenheit von $\text{Im}(A)$ gezeigt.

Lösung zur Aufgabe Ü33

Aufgabenstellung

Sei V ein Hilbertraum und $a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische stetige Bilinearform auf $V \times V$. Auf einem Teilraum $V_0 \subset V$ sei $a(\cdot, \cdot)$ V_0 -elliptisch. Man zeige, dass $(V_0, a(\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum ist.

Musterlösung

Wir weisen die Skalarprodukteigenschaften der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ nach. Die Symmetrie, die Homogenität und die Linearität folgen sofort aus der Definition der Bilinearform. Die Positivität folgt aus der V_0 -Elliptizität der Bilinearform.

Es bleibt zu zeigen:

$$a(u, u) = 0 \leftrightarrow u = 0.$$

Wir zeigen zuerst, dass aus $u = 0$ $a(u, u) = 0$ folgt:

$$a(0, 0) = a(0 \cdot 0, 0) = 0 \cdot a(0, 0) = 0.$$

Nun setzen wir voraus, dass $a(u, u) = 0$ ist:

$$0 = a(u, u) \geq c_1 \|u\|_{V_0}^2 \geq 0.$$

Somit folgt, dass $\|u\|_{V_0} = 0$ gelten muss. Da die Norm auf V_0 jedoch positiv definit ist, folgt hieraus $u = 0$.

Die Abgeschlossenheit von V_0 bezüglich dieses Skalarprodukts muss noch gezeigt werden.

Sei $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge, in $(V_0, \|\cdot\|_a)$, wobei $\|u\|_a = \sqrt{a(u, u)}$ ist. Wegen der V -Elliptizität ist $(u_n)_n$ auch Cauchy-Folge in $(V_0, \|\cdot\|)$, wobei $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ mit dem gegebenen Skalarprodukt u ist. V_0 ist Teilraum von V und daher abgeschlossen bezüglich der Norm $\|\cdot\|$. Damit existiert ein Grenzwert $u \in V_0$, so dass $\|u_n - u\| \rightarrow 0$. Wir folgern aus der Stetigkeit der Bilinearform, dass

$$\|u_n - u\|_a \leq c \|u_n - u\|$$

ist. Somit ist $u \in V_0$ auch Grenzwert der $C F(u_n)_n$ bezüglich der $\|\cdot\|_a$ -Norm.

Lösung zur Aufgabe Ü34

Aufgabenstellung

Gegeben sei das Randwertproblem

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla u(x)) + \vec{b}(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Unter welchen Bedingungen an $a(\cdot)$, $\vec{b}(\cdot)$ und $c(\cdot)$ ist die zugehörige Bilinearform beschränkt und V-elliptisch?

Musterlösung

Zuerst wird die zugehörige Bilinearform bestimmt, in dem man mit einer Testfunktion multipliziert und anschließend integriert. Man erhält

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)] v(x) \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n [b_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)] v(x) \, dx$$

$$+ \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Durch partielle Integration kann der erste Summand der Bilinearform in folgenderweise umgeformt werden

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x)] v(x) \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} v(x) \, dx,$$

wobei die Randterme verschwinden, da u, v aus dem Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ gewählt werden.

Für die Bilinearform folgt somit

$$d(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u(x) v(x) \, dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) \, dx.$$

Es ist zu beachten, dass $b(x)$ vektorwertig ist.

Zu untersuchen ist, unter welchen Bedingungen an $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ und $c(\cdot)$ die Bilinearform $d(\cdot, \cdot)$ beschränkt und V-elliptisch ist.

1. Beschränktheit:

Wir untersuchen, wann

$$|d(u, v)| \leq c \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

ist.

Dazu betrachtet man

$$\begin{aligned}
|d(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u(x) v(x) \, dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) \, dx \right| \\
&\leq \|a(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)} |u|_{W^{1,2}(\Omega)} |v|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|b(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)} |u|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + \|c(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \max\{\|a(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)}, \|b(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)}, \|c(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)}\} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Für obige Abschätzungen wurde die Hölderungleichung, sowie die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung verwendet. Man erkennt, dass unter der Voraussetzung, dass $a, b, c \in L_{\infty}(\Omega)$ sind, die Bilinearform $d(\cdot, \cdot)$ beschränkt ist.

2. V-elliptisch:

Damit $d(\cdot, \cdot)$ V-elliptisch ist, muss $d(u, u) \geq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2$ gelten.

Es gilt

$$\begin{aligned}
d(u, u) &= \int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) \, dx + \int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u(x) u(x) \, dx \\
&\quad + \int_{\Omega} c(x) u^2(x) \, dx.
\end{aligned} \tag{52}$$

Wir setzen voraus, dass $a(x) \geq a_0 > 0$ ist. Betrachtet man unter dieser Voraussetzung den ersten Summanden, dann erhält man folgende Abschätzung

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) \, dx \geq a_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_i u(x))^2 \, dx = a_0 |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2. \tag{53}$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u(x) u(x) \, dx \geq -\|b(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)} |u|_{W^{1,2}(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Mit Hilfe der Youngschen Ungleichung $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ für alle $\varepsilon > 0$ lässt sich obige Ungleichung weiter abschätzen

$$\int_{\Omega} b(x) \cdot \nabla u(x) u(x) \, dx \geq -\frac{1}{2} \|b(x)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \left(|u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \tag{54}$$

wobei $\varepsilon = 1$ gewählt wurde.

Wird für $c(x)$ ebenfalls vorausgesetzt, dass $c(x) \geq c_0 > 0$ ist, erhält man

$$\int_{\Omega} c(x) u^2(x) \, dx \geq c_0 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{55}$$

Setzt man die Beziehungen (53), (54) und (55) in die Gleichung (52) ein, erhält man

$$\begin{aligned} d(u, u) &\geq a_0 |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \left(|u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + c_0 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \left(a_0 - \frac{1}{2} \|b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) |u|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 + \left(c_0 - \frac{1}{2} \|b(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Gilt $a_0, c_0 > \frac{1}{2} \|b(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$ dann sind beide Faktoren positiv und es folgt

$$d(u, u) \geq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2.$$

Unter diesen Voraussetzungen erhält man die V -Elliptizität.

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. Academic Press. INC, Boston, 1978.
- [2] Al-Gwaiz, M. A. *Theory of Distributions*. New York: Marcel Dekker, 1992.
- [3] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt: Harri Deutsch, 1970.
- [4] Costabel, M. *Boundary integral operators on Lipschitz domains*. In: J. Math. Anal. 19, 1988, S. 613-626.
- [5] Ehrenpreis, L. *Solution of some problems of division I*. In: Am. J. Math. 76, 1954, S. 883-903.
- [6] Fichtenholz, G. M. *Kurs der Differential- und Integralrechnung II*. Moskau, 1969.
- [7] Friedrichs, K. *On differential operators in Hilbert spaces*. In: Am. J. Math. 61, 1939, S. 523-544.
- [8] Gelfand, I. M.; Šilov, G. E. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. Band I-IV. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964.
- [9] Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, 1985.
- [10] Heuser, H. *Funktionalanalysis*. Stuttgart: Teubner, 1986.
- [11] Hörmander, L. *Linear Partial Differential Operators*. Berlin: Springer, 1969.
- [12] Kadlec, J.; Kufner, A. *Fourier Series*. Prag: Academia, 1971.
- [13] Krein, S. G. *Linear Equations in Banach Spaces*. Birkhäuser, 1982.
- [14] Kufner, A.; John, O.; Fučík. *Function Spaces*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977.
- [15] McLean, W. *Strong Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [16] Meyers, V.; Serrin, J. $H=W$. In: Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51, 1964, S. 1055-1056.
- [17] Miranda, C. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. o.O: o.V, 1955.
- [18] Nečas, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Prag: Academia, 1967.

- [19] Plis, A. *A smooth linear elliptic differential equation without any solutions in a sphere.* In: Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, S. 599–617.
- [20] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* New York: McGraw–Hill, 1966.
- [21] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Vols. I–II. Paris, 1950–1951.
- [22] Schwartz, L. *Mathematische Methoden der Physik I.* Zürich: Bibliografisches Institut, 1974.
- [23] Schwartz, L. *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions.* In: C.R. Acad. Sci. Paris, 239, 1954, S.847–848.
- [24] Sobolev, S. L. *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales.* In: Math. Collection (Math. Sb), 1(43), 1936, S. 39–72.
- [25] Triebel, H. *Höhere Analysis.* Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.
- [26] Vladimirov, V. S. *Equations of Mathematical Physics.* New York: Marcel Dekker, 1971.
- [27] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen.* Stuttgart: Teubner Verlag, 1982.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn Dipl.-Ling. Jürgen Schulz für das Schreiben der Texte und Formeln in Latex, sowie für das Erstellen des gesamten Layouts und der Grafiken (in PostScript) bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Frau Iris Pflieger, die die Musterlösungen in druckreifer Form erstellt hat und beim Korrekturlesen behilflich war.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

E-Mail: saendig@ians.uni-stuttgart.de

WWW: <http://ians.uni-stuttgart.de/~saendig/>

Erschienene Preprints ab Nummer 2003/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2003/001 *Lamichhane, B. P., Wohlmuth, B. I.:* Mortar Finite Elements for Interface Problems.
- 2003/002 *Dryja, M., Gantner, A., Widlund, O. B., Wohlmuth, B. I.:* Multilevel Additive Schwarz Preconditioner For Nonconforming Mortar Finite Element Methods.
- 2003/003 *Klimke, A., Hanss, M.:* On the Reliability of the Influence Measure in the Transformation Method of Fuzzy Arithmetic.
- 2003/004 *Klimke, A.:* RANDEXPR: A Random Symbolic Expression Generator.
- 2003/005 *Klimke, A.:* How to Access Matlab from Java.
- 2003/006 *Merkle, T.:* Phase separation in solid mixtures under elastic loadings with application to solder materials.
- 2003/007 *Lamichhane, B. P., Wohlmuth, B. I.:* Second Order Lagrange Multiplier Spaces for Mortar Finite Elements in 3D.
- 2003/008 *Fritz, A., Hüber, S., Wohlmuth, B. I.:* A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity.
- 2003/009 *Klimke, A.:* An Efficient Implementation of the Transformation Method of Fuzzy Arithmetic
- 2003/010 *Steinbach, O.:* A Note on the Ellipticity of the Single Layer Potential in two-dimensional Linear Elastostatics
- 2003/011 *Steinbach, O.:* Artificial Multilevel Boundary Element Preconditioners
- 2003/012 *Bürger, R., Karlsen, K.H.:* On a diffusively corrected kinematic-wave traffic model with changing road surface conditions
- 2003/013 *Wohlmuth, B. I.:* A short note on: An optimal a priori estimate for non linear multibody contact problems.
- 2003/014 *Sändig, A.-M.:* Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Vorlesung im Wintersemester 2002/03.