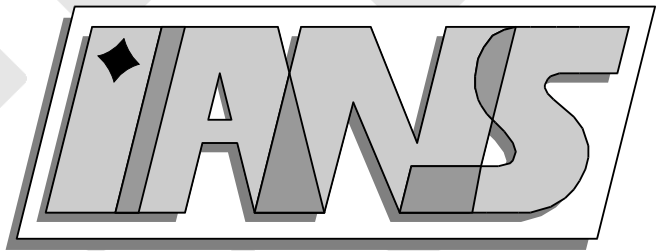


**Universität  
Stuttgart**



---

Proseminar Funktionenräume  
Wintersemester 2002/2003

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Seminararbeit 2003/015



# Universität Stuttgart

---

Proseminar Funktionenräume  
Wintersemester 2002/2003

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Seminararbeit 2003/015

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)  
Fakultät Mathematik und Physik  
Fachbereich Mathematik  
Pfaffenwaldring 57  
D-70 569 Stuttgart

**E-Mail:** [ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de)  
**WWW:** <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN **1611-4176**

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.  
IANS-Logo: Andreas Klimke.  $\LaTeX$ -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

## Vorwort

Der vorliegende Bericht entstand im Rahmen des Proseminars “Funktionenräume”, das im Wintersemester 2002/03 am Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS) der Universität Stuttgart veranstaltet wurde. Es nahmen 14 Studenten aus dem 3. Semester teil; davon 10 aus dem Studiengang Mathematik-Lehramt und 4 aus dem Studiengang Mathematik-Diplom: CHRISTIAN BEUG, BORIS DALLINGER, KATRIN GRAU, ANDREAS GRIESER, KRISTIN HESS, CHRISTOPH KOBER, MARIANNE KÖTZLE, SABINE LORIS, ACHIM MEYER, ANDREA POHLNER, ANIKA REIMANN, DORIT SCHÄUFFELE, MARITA THOMAS, HEIKE TSCHESCHNER.

Das Proseminar war als Einführung in die Theorie der Funktionenräume gedacht. Es wurden zunächst metrische und normierte Räume sowie Hilberträume eingeführt. In diesen Raumklassen wurden Grundbegriffe, wie Dichte, Separabilität, Schauderbasis, kompakte Mengen, Einbettungen, Isomorphismen und Vervollständigungen behandelt. Danach wurden Räume stetiger, Hölder-stetiger, stetig differenzierbarer und Hölder-stetig differenzierbarer Funktionen untersucht.

Der zweite Teil des Proseminars war den Räumen integrierbarer Funktionen  $L_p(\Omega)$  sowie den Sobolevräumen  $W^{m,p}(\Omega)$  gewidmet. Hierbei wurden folgende Fragen behandelt: Approximation von Elementen aus  $W^{m,p}(\Omega)$  durch glatte Funktionen, geometrische Eigenschaften des Gebiets  $\Omega$ , Fortsetzungen und Einbettungen, Multiplikation von Elementen aus Sobolevräumen und Spurräume. Als Literaturquellen wurden hauptsächlich die Bücher von Adams [2], John & Nirenberg [16] und Wloka [31] benutzt.

Die Studenten haben mit viel Einsatz die Vorträge vorbereitet, sich über didaktische und methodische Fragen Gedanken gemacht, sowie schriftliche Ausarbeitungen in Latex erstellt. Wenn es auch nicht immer einfach war (Formulieren und Latex mussten gelernt sein), stellt dieser Proseminar-Bericht eine gute Einführung in die Problematik dar und zeichnet sich durch illustrative Beispiele aus.

Das Erstellen und Einbinden der Dateien erforderte große Arbeit, die nur dank der unermüdlichen und qualifizierten Hilfe von Frau Iris Pflieger, Studentin der Fachrichtung Mathematik-Diplom, zustande kommen konnte. Ich möchte ihr an dieser Stelle, auch im Namen der Studenten, dafür herzlich danken.

Weiterhin gilt mein Dank Frau Diplommathematikerin Dorothee Knees, die einige Studenten mitbetreut und auch ein Proseminar geleitet hat.

Stuttgart, im Juli 2003

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische und normierte Räume</b>	<b>11</b>
1.1	Metrische Räume . . . . .	11
1.1.1	Beispiele . . . . .	12
1.1.2	Konvergenz im metrischen Raum . . . . .	13
1.2	Normierte Räume . . . . .	14
1.2.1	Beispiele . . . . .	14
1.2.2	Konvergenz im normierten Raum . . . . .	16
1.2.3	Vollständigkeit . . . . .	17
1.2.4	Beispiele für vollständige und unvollständige Räume . . . . .	17
1.3	Zur Geschichte der normierten Räume . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Hilberträume</b>	<b>19</b>
2.1	Prähilbert- und Hilberträume . . . . .	19
2.2	Bsp. Prähilbert- und Hilberträume . . . . .	21
2.2.1	Beispiele für Innenprodukträume . . . . .	21
2.2.2	Beispiel für einen Innenproduktraum . . . . .	24
2.2.3	Beispiel für einen Banachraum, der kein Innenproduktraum ist . . . . .	24
2.2.4	Beispiel für einen Hilbertraum . . . . .	24
2.2.5	Beispiel für einen unvollständigen Innenproduktraum . . . . .	24
2.3	Eigenschaften . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen</b>	<b>29</b>
3.1	Dichte . . . . .	29
3.2	Separabilität . . . . .	29
3.3	Schauderbasis . . . . .	30
3.4	Kompakte Menge . . . . .	31
3.5	Einbettung . . . . .	31
3.6	Isomorphismus . . . . .	32
3.7	Vervollständigung . . . . .	32
3.7.1	Vervollständigung im metrischen Raum . . . . .	32
3.7.2	Vervollständigung im normierten Raum . . . . .	33
3.7.3	Vervollständigung im prähilbertschen Raum . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Räume stetiger Funktionen I</b>	<b>35</b>
4.1	Allgemeines . . . . .	35
4.1.1	Definitionen und Sätze . . . . .	35
4.2	Einführung der zu untersuchenden Funktionenräume . . . . .	36
4.2.1	Der Raum der auf $\Omega$ stetigen Funktionen $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ . . . . .	36
4.2.2	Der Raum der auf $\Omega$ gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen $C^0(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ . . . . .	37
4.2.3	Der Raum der auf $\bar{\Omega}$ hölderstetigen Funktionen $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ . . . . .	38
4.2.4	Betrachtungen auf Hölderräumen . . . . .	39

4.3	Einführung von Normen . . . . .	42
4.3.1	$\ \cdot\ _{\mathcal{F}}$ auf $C(\bar{\Omega})$ . . . . .	42
4.3.2	Normierung von $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ . . . . .	43
4.3.3	Der Problemfall $C(\Omega)$ . . . . .	44
4.3.4	Untersuchung der Hilbertraumeigenschaft von $C(\bar{\Omega})$ und $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ . . . . .	46
4.3.5	Allgemeines über Normen . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Räume stetiger Funktionen II</b> . . . . .	<b>49</b>
5.1	Separabler Raum: $C^0(\bar{\Omega})$ . . . . .	49
5.1.1	Vorbereitungen . . . . .	49
5.1.2	Der Raum $C^0(\bar{\Omega})$ ist separabel . . . . .	53
5.2	Nicht separabler Raum: $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ . . . . .	53
5.2.1	Vorbereitungen . . . . .	53
5.2.2	Der Raum $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ ist nicht separabel . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Räume stetig differenzierbarer Funktionen</b> . . . . .	<b>57</b>
6.1	Motivation und Hinführung zum Thema . . . . .	57
6.1.1	Wiederholung . . . . .	58
6.2	Lineare Strukturen . . . . .	58
6.2.1	Einführung grundlegender Funktionenräume . . . . .	58
6.2.2	Mengentheoretische Aussagen . . . . .	62
6.3	Banachräume und Separabilität . . . . .	62
6.3.1	Banachräume . . . . .	62
6.3.2	Abhängigkeit der Separabilität von dem Gebiet, auf dem der Funktionenraum definiert ist . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Der Raum <math>L_p(\Omega)</math></b> . . . . .	<b>65</b>
7.1	Grundlagen . . . . .	65
7.2	Der Raum $L_p(\Omega)$ . . . . .	66
7.3	Eigenschaften von $L_p(\Omega)$ . . . . .	66
7.3.1	Der Vektorraum $L_p(\Omega)$ . . . . .	66
7.3.2	Der normierte Raum $L_p(\Omega)$ . . . . .	67
7.3.3	Konvergenz in $L_p(\Omega)$ . . . . .	71
7.3.4	Einbettung von $L_p(\Omega)$ . . . . .	71
7.4	Der Raum $L_\infty(\Omega)$ . . . . .	72
7.5	Henri Lebesgue . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Weitere Eigenschaften von <math>L_p(\Omega)</math>-Räumen</b> . . . . .	<b>75</b>
8.1	Vollständigkeit von $L_p(\Omega)$ . . . . .	75
8.2	Separabilität von $L_p(\Omega)$ . . . . .	77
8.3	Beweisskizze zu: $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L_p(\Omega)$ . . . . .	80
<b>9</b>	<b>Sobolevräume</b> . . . . .	<b>83</b>
9.1	Einführung . . . . .	83
9.2	Schwache Ableitung . . . . .	84
9.2.1	Beispiele zur schwachen Ableitung . . . . .	86
9.3	Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ und $H^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	87
9.3.1	Der Raum $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	87
9.3.2	Einbettung von $W^{m,p}(\Omega)$ in $W^{m,q}(\Omega)$ für $p > q$ . . . . .	90
9.3.3	$W^{m,\infty}(\Omega)$ . . . . .	90
9.3.4	Einbettung von $W^{m,\infty}(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	90
9.3.5	Der Raum $H^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	91



<b>10 Approximation durch glatte Funktionen</b>	<b>93</b>
10.1 Allgemeines . . . . .	93
10.2 Hilfssätze . . . . .	93
10.3 Approximation durch glatte Funktionen in $\Omega$ . . . . .	97
10.4 Approximation durch glatte Funktionen in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	100
<b>11 Geometrische Eigenschaften von Gebieten <math>\Omega</math></b>	<b>103</b>
11.1 Geometrische Eigenschaften . . . . .	103
11.1.1 $C^{k,\lambda}$ -Eigenschaft (Spezialfall: $C^{0,1}$ -Eigenschaft = Lipschitz-stetiger Rand) . . . . .	104
11.1.2 Zusammenfassung . . . . .	106
11.2 Poincaré-Friedrichs Ungleichung . . . . .	106
<b>12 Fortsetzungen und Einbettungen von Sobolevräumen</b>	<b>109</b>
12.1 Fortsetzungen von Funktionen . . . . .	109
12.2 Einbettungen von Funktionen . . . . .	115
<b>13 Multiplikation und äquivalente Normen</b>	<b>117</b>
13.1 Wann ist $W^{m,p}(\Omega)$ eine Banach-Algebra? . . . . .	117
13.1.1 Die Multiplikation in $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	117
13.1.2 Der Raum $W^{m,p}(\Omega)$ ist eine Banach-Algebra. . . . .	121
13.1.3 Weitere Möglichkeiten der Multiplikation. . . . .	121
13.2 Äquivalente Normen . . . . .	122
13.2.1 Drei äquivalente Normen . . . . .	123
<b>14 Spurräume</b>	<b>125</b>
14.1 Motivation . . . . .	125
14.2 Begriffsklärung . . . . .	125
14.3 Spuren von Elementen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$ . . . . .	126
14.4 Der Raum $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ . . . . .	126
14.4.1 Definition der Räume . . . . .	126
14.4.2 Einbettung . . . . .	127
14.4.3 Normen . . . . .	127
14.5 Spursatz . . . . .	127
14.6 Die Umkehrung des Spursatzes . . . . .	129
14.7 Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	129



# Kapitel 1

## Metrische und normierte Räume

AUSGEARBEITET VON DORIT SCHÄUFFELE

### 1.1 Metrische Räume

Für diesen Vortrag wurde folgende Literatur verwendet [3, 12, 16, 30].

Im Jahr 1906 wurden die metrischen Räume von Frechet eingeführt. Für den Begriff des metrischen Raums benötigen wir eine Menge  $E$ . Als Beispiel dient hier die Menge  $E$  der stetigen Funktionen über dem Intervall  $[a, b]$ . Auf dieser Menge  $E$  mit den Elementen  $f, g$  und  $h$  können wir einen Abstand zwischen Elementen von  $E$ , zum Beispiel den Elementen  $f$  und  $g$ , einführen. Dieser Abstand wird als Metrik bezeichnet, und wir schreiben:

$$d(f, g) = \text{nichtnegative reelle Zahl.}$$

Den Abstand zwischen  $f$  und  $g$  können wir hier als Integral über  $|f - g|$  zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  berechnen.

**Definition 1.1 (Metrik).** Eine allgemeine Metrik  $d$  von  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  ist folgendermaßen definiert

- (M<sub>1</sub>)  $d(x, y) \geq 0$ , wobei  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,
- (M<sub>2</sub>)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (M<sub>3</sub>)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Das Axiom  $M_1$  wird als positive Definitheit, das Axiom  $M_2$  als Symmetrie und das Axiom  $M_3$  als Dreiecksungleichung bezeichnet.

Hier gilt selbstverständlich auch die verallgemeinerte Dreiecksungleichung  $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + \dots + d(w, y)$ .

Nachdem der Begriff der Metrik eingeführt wurde, gilt für einen metrischen Raum folgende Definition.

**Definition 1.2 (Metrischer Raum).** Ein metrischer Raum  $(E, d)$  ist eine nichtleere Menge  $E$ , auf der eine Metrik  $d$  definiert ist.

Wichtig für die Definition des metrischen Raumes  $(E, d)$  ist, dass die Menge  $E$  beliebig ist. Sie kann diskret, endlichdimensional, abzählbar, überabzählbar, usw. sein.

### 1.1.1 Beispiele

**Beispiel 1.3.** Auf einer Menge  $E$  können wir verschiedene Metriken definieren. Zum einen die euklidische Metrik

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

zum anderen die Maximumsmetrik

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Des Weiteren ist noch die Metrik über die Summe der Beträge der Differenzen zu nennen

$$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Hier können wir Abschätzungen vornehmen. Es gilt  $d_3 \geq d_1 \geq d_2$ .

**Beispiel 1.4.** Ein weiteres Beispiel für einen metrischen Raum ist die diskrete Metrik auf einer nichtleeren Menge  $E$ . Sie ist definiert durch

$$d_4(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

für  $x, y \in E$ .

Anhand dieses Beispiels wollen wir zeigen, dass die Menge  $E$  zusammen mit der diskreten Metrik  $d_4(x, y)$  ein metrischer Raum  $(E, d_4)$  ist.

*Beweis.* Wir müssen die Axiome  $M_1, M_2$  und  $M_3$  zeigen. Das Axiom  $M_1$  ist erfüllt, da laut Definition  $d_4(x, y)$  nie negativ werden kann, sondern immer gleich 1 und 0 genau dann, wenn  $x = y$  ist. Für das Axiom  $M_2$  gibt es zwei Untersuchungen, die wir durchführen müssen

$$\begin{aligned} x = y : \quad d(x, y) = d(y, x) &= 0, \\ x \neq y : \quad d(x, y) = d(y, x) &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass auch das zweite Axiom, die Symmetrie, erfüllt ist.

Nun kommen wir zum dritten und letzten Axiom  $M_3$ , welches wir anhand von Fallunterscheidungen beweisen wollen.

Es gibt vier mögliche Fälle:

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y), \\ x = y = z : \quad &0 \leq 0 + 0 = 0, \\ x = y \neq z : \quad &0 \leq 1 + 1 = 2, \\ x \neq y = z : \quad &1 \leq 1 + 0 = 1, \\ x \neq y \neq z : \quad &1 \leq 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Diese vier Fälle lassen sich ganz leicht nachrechnen und somit sind alle Metrikaxiome erfüllt. Als Schlussfolgerung können wir festhalten, dass  $(E, d_4)$  ein metrischer Raum ist.  $\square$

### 1.1.2 Konvergenz im metrischen Raum

Wir führen nun die Konvergenz im metrischen Raum ein.

**Definition 1.5 (Konvergenz im metrischen Raum).** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im metrischen Raum  $E$ .  $x \in E$  ist Grenzwert der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann, wenn die Folge  $(d(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  gegen 0 konvergiert.

Dieser Konvergenzbegriff stammt von Cauchy. Allerdings ist er auch sehr früh bei Archimedes in ähnlicher Weise zu finden, der ihn jedoch nicht so präzise formulierte wie Cauchy.

Der Konvergenzbegriff ist das Kernstück der Analysis. In diesem Zusammenhang tritt auch der Begriff der Cauchy-Folge auf.

**Definition 1.6 (Cauchy-Folge).** Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge im metrischen Raum  $E$ . Diese Folge ist Cauchy-Folge in  $E$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \forall m, n > n_0$$

gilt.

Als Spezialfall betrachten wir zusätzlich die Konvergenz in  $\mathbb{R}$ .

**Definition 1.7 (Konvergenz in  $\mathbb{R}$ ).** Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent in  $\mathbb{R}$  genau dann, wenn ein Grenzwert  $x \in \mathbb{R}$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass Folgendes gilt

$$d(x_n, x) = |x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Im metrischen Raum gilt folgender Satz.

**Satz 1.8.** *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

*Beweis.* Wir nehmen zwei verschiedene Grenzwerte  $x$  und  $y$  an, d.h.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y) &= 0. \end{aligned}$$

Wir können mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgern, dass

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) < 2\varepsilon \quad \text{für } n > n_0(\varepsilon)$$

gilt. Somit ist  $d(x, y) = 0$  woraus folgt, dass  $x = y$  ist. Also ist der Grenzwert eindeutig.  $\square$

**Beispiel 1.9.** In einem Raum  $E$  mit diskreter Metrik

$$d_4(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

für  $x, y \in E$  sind nur Folgen konvergent, die ab einem gewissen Index stationär sind. Betrachten wir nämlich die Folge

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \quad \text{mit } x_i \in E,$$

dann ist

$$d_4(x_n, x_m) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_n \neq x_m, \\ 0 & \text{falls } x_n = x_m, \end{cases}$$

für  $x_n, x_m \in E$ .

Für  $\varepsilon < 1$  ist  $d_4(x_n, x_m) < \varepsilon$  nur falls  $d_4(x_n, x_m) = 0$  und somit  $x_n = x_m$  für  $n, m \geq N_0$ .

## 1.2 Normierte Räume

Nun gehen wir auf die normierten Räume ein. Dafür wiederholen wir den Begriff des linearen Raumes. Wir wissen, dass ein linearer Raum immer über einem Körper  $K$  definiert wird.

**Definition 1.10 (Linearer Raum).** Man spricht von einem linearen Raum, wenn eine Menge  $X$  folgende Eigenschaften besitzt: Auf  $X$  wird eine Addition und eine skalare Multiplikation definiert. Für  $f, g \in X$ ,  $\lambda \in K$  gilt

$$\begin{aligned} f + g &\in X, \\ \lambda f &\in X. \end{aligned}$$

Als Beispiele können wir uns notieren

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &:= \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad x_i \in \mathbb{R} \}, \\ C[a, b] &:= \{ f \mid f \text{ stetig in } [a, b] \}. \end{aligned}$$

Jetzt können wir die Definition des normierten Raumes aufschreiben.

**Definition 1.11 (Norm).** Eine Norm ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} (N_1) \quad &\|x\| \geq 0, \quad \text{wobei} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ (N_2) \quad &\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ (N_3) \quad &\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in K$ .

Falls die Abbildung  $\|\cdot\|$  die Bedingung  $\|x\| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  nicht erfüllt, so sprechen wir von einer Seminorm. Diese wird mit  $|\cdot|$  bezeichnet.

**Definition 1.12 (Normierter Raum).** Sei  $X$  ein linearer Raum.

Das Paar  $(X, \|\cdot\|)$  heißt normierter Raum, falls die Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  die Normbedingungen erfüllt.

### 1.2.1 Beispiele

Hier seien einige Normen im  $\mathbb{R}^2$  genannt:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + |x_2| &= d_3(x, 0), \\ \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} &= d_1(x, 0), \\ \|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, |x_2|\} &= d_2(x, 0). \end{aligned}$$

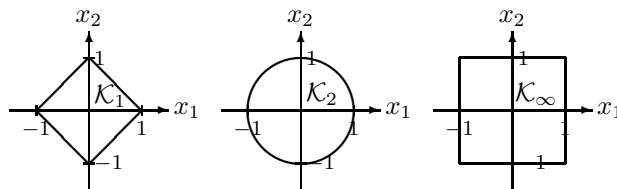
Wir betrachten dazu die Einheitskugeln der Normen, wobei

$$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 \leq 1\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\} \text{ und}$$

$$\mathcal{K}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\} \text{ ist.}$$

Die Einheitskugeln bestehen aus dem Inneren und dem Rand des folgenden Kreises bzw. folgender Vierecke:



**Satz 1.13.** *Jeder normierte lineare Raum ist zusammen mit einer Metrik  $d$  ein metrischer Raum.*

*Beweis.* Man überprüfe die Axiome  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ , wobei die Metrik  $d$  durch

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

definiert wird. □

Allgemein gilt, dass normierte Räume echte Teilmenge von metrischen Räumen sind, d.h. alle Aussagen, die im metrischen Raum gelten, lassen sich auf den normierten Raum übertragen.

**Satz 1.14.** *Der normierte Raum  $(X, \|\cdot\|)$  ist mit obiger Metrik  $d$  ein metrischer Raum.*

*Beweis.* Es sind die Metrixiome  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  zu zeigen.

$M_1$ : Wir prüfen, dass  $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$  ist.

Zuerst nehmen wir an, dass  $d(x, y) = 0$  gilt. Daraus folgt  $\|x - y\| = 0$  und aufgrund der Normaxiome ist  $x - y = 0$  bzw.  $x = y$ .

Weiterhin müssen wir zeigen, dass  $d(x, y) = 0$  aus  $x = y$  folgt.

Für  $x = y$  gilt  $\|x - y\| = 0$  und schließlich  $d(x, y) = 0$ .

Der Fall  $x \neq y$  liefert uns  $d(x, y) > 0$ , da nach Normaxiom  $N_1$   $\|x - y\| > 0$  gilt und somit  $d(x, y) > 0$  ist.

$M_2$ : Wir zeigen  $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ :

$$\|x - y\| = \| -1(-x + y) \| = | -1 | \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

$M_3$ : Zu zeigen ist  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ :

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Somit ist Axiom  $M_3$  erfüllt und damit ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum. □

**Satz 1.15.** *Nicht immer kann in einem metrischen Raum  $E$  eine Norm definiert werden, so dass  $d(x, 0) := \|x\|$  ist.*

*Beweis.* (Anhand eines Gegenbeispiels)

Es sei  $\|x\| = d(x, 0)$  und die diskrete Metrik ist gegeben durch

$$d(x, 0) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

für  $x \in E$ .

Zu zeigen sind die Normaxiome  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$ .

Da  $\|x\| = d(x, 0) \geq 0$  und nach Definition genau dann 0 ist, wenn  $x = 0$  gilt, ist das Axiom  $N_1$  erfüllt.

Wir zeigen nun, dass  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  nicht erfüllt ist.

Wir wählen uns  $\lambda = 10$  und  $x \neq 0$ . Für die linke Seite  $\|\lambda x\|$  ergibt sich  $\|10x\| = d(10x, 0) = 1$ .

Für die rechte Seite  $|\lambda| \|x\|$  erhalten wir  $10 \|x\| = 10 d(x, 0) = 10$ . Dies führt zum Widerspruch und somit ist  $N_2$  nicht erfüllt. □

**Satz 1.16.** *Wenn wir jedoch zwei zusätzliche Axiome*

$$(M_4) \quad d(x, y) = d(x + z, y + z), \quad (\text{Transitivität})$$

$$(M_5) \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y), \quad (\text{Homogenität})$$

im metrischen linearen Raum  $(E, d)$  einführen, dann ist durch  $\|x\| := d(x, 0)$  eine Norm definiert.

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass aus den Axiomen  $M_1$  bis  $M_5$  die Normaxiome folgen.

$N_1$ : Dieses Axiom ist, wie oben bereits gezeigt, erfüllt.

$N_2$ : Hier ist zu zeigen  $\|\lambda x\| = |\lambda|d(x, 0)$ .

Um dies zu zeigen benötigen wir die Homogenität ( $M_5$ ):

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= d(\lambda x, 0) \\ &= d(\lambda x, \lambda \cdot 0) \\ &= |\lambda|d(x, 0). \end{aligned}$$

Somit ist Axiom  $N_2$  erfüllt.

$N_3$ : Als letztes zeigen wir  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Für den Beweis der Dreiecksungleichung ist die Transitivität ( $M_4$ ) erforderlich:

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= d(x + y, 0) \\ &\leq d(x + y, y) + d(y, 0) \\ &= d(x + y, 0 + y) + d(y, 0) \\ &= d(x, 0) + d(y, 0) \\ &= \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

□

## 1.2.2 Konvergenz im normierten Raum

**Definition 1.17 (Konvergenz im normierten Raum).** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im normierten Raum  $X$  konvergiert gegen  $x \in X$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

ist.

**Folgerung 1.18.** Wenn für  $n \rightarrow \infty$  folgendes gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad \text{der Norm nach,}$$

dann folgt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y \quad \text{der Norm nach.}$$

*Beweis.* Wir zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n + y_n - (x + y)\| = 0.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x + y_n - y\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0.$$

□



### 1.2.3 Vollständigkeit

**Definition 1.19.** Ein metrischer Raum  $(E, d)$  heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in  $E$  gegen ein Element von  $E$  konvergiert, also einen Grenzwert in  $E$  besitzt.

In vollständigen Räumen gilt offensichtlich das Cauchysche Konvergenzkriterium.

**Satz 1.20.** Eine Folge konvergiert dann und nur dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

### 1.2.4 Beispiele für vollständige und unvollständige Räume

Ein Beispiel für einen vollständigen Raum ist der

$$\mathbb{R}^n \text{ bezüglich der Norm } \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ein Beispiel für einen unvollständigen Raum ist der Raum der stetigen Funktionen

$$C[a, b] \text{ mit der Metrik } d_5(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt}.$$

Weiterhin sei  $f_n(x) = x^n$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  gegeben, wobei Folgendes gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, dass  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist.

Betrachten wir dazu

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|^2 &= \int_0^1 |f_n - f_m|^2 dx = \int_0^1 |x^n - x^m|^2 dx \\ &= \int_0^1 x^{2n} - 2x^{n+m} + x^{2m} dx \\ &= \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{2x^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \right]_0^1 \\ &\leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} \leq \frac{1}{2n_0+1} + \frac{1}{2n_0+1} = \frac{2}{2n_0+1} \stackrel{!}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies ist eine Cauchy-Folge für  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$ .

Die Funktionenfolge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert also punktweise gegen  $f$ , d.h. sie konvergiert gegen eine nichtstetige Funktion.

Damit haben wir gezeigt, dass  $C[a, b]$  mit obiger Metrik  $d_5$  ein unvollständiger Raum ist.

**Definition 1.21 (Banachraum).** Vollständig normierte Räume nennt man Banachräume.

**Beispiel 1.22.** Wir betrachten den normierten Raum  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$  mit der Norm  $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j^2}$ .

Da der  $\mathbb{R}^3$  ein linearer Raum und bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  vollständig ist, haben wir einen Banachraum vorliegen.

**Beispiel 1.23.** Der lineare Raum  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  ist bezüglich der Norm  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$  vollständig und somit ein Banachraum.

### 1.3 Zur Geschichte der normierten Räume

Der Begriff des normierten Raumes hat sich Anfang der zwanziger Jahre gebildet. Entwickelt wurde er in Arbeiten von Helly, Wiener, Hahn und durch Banachs Dissertation.

Der wichtige Mathematiker Stefan Banach lebte von 1892-1945. Er wurde in Krakau geboren und verbrachte sein wissenschaftliches Leben in Lemberg, das in der heutigen Ukraine liegt. Mit dem Einmarsch der deutschen Truppen im Jahr 1941 kam es zum Ende der Lemberger Schule. Viele ihrer Mitglieder wurden von der SS oder der Gestapo ermordet. Stefan Banach selbst starb kurz nach Kriegsende an Lungenkrebs.

Ein Zitat über Banach von einem seiner Schüler:

„Teil seiner Exzentrizität war gewiß seine Vorliebe,  
im Schottischen Cafe zu arbeiten,  
wo er intensiv mit mir diskutierte,  
statt an der Universität.“

Zum Ärger des Personals schrieb man direkt auf Marmortische, bis der Kellner eine Kladde brachte. Diese Kladde wurde bekannt als das Schottische Buch, in dem viele Probleme der Funktionalanalysis diskutiert werden, zum Teil auch ohne Lösung.

# Kapitel 2

## Hilberträume

AUSGEARBEITET VON ANIKA REIMANN

Zunächst ein paar Worte zu dem Mathematiker nach dem die Hilberträume benannt wurden: David Hilbert.

Er wurde am 23.01.1862 in Königsberg geboren. Er nahm dann, nach erfolgreichem Schulabschluss, an der dortigen Universität sein Mathematikstudium auf, das er 1886 mit der Habilitation abschloss. 1895 wurde er von seinem Freund Professor Klein an die Universität Göttingen berufen, nachdem er schon in Königsberg Professor war. Aufgrund der damaligen stürmischen Entwicklung der Physik wandte sich David Hilbert unter anderem den Integralgleichungen zu. In dieser Zeit kristallisierte sich der Begriff des *Hilbertraumes* heraus. Am 14.02.1943 verstarb David Hilbert in Göttingen.

In diesem Kapitel werden wir uns zunächst mit den Begriffen des Prähilbert- und Hilbertraums befassen. Danach werden wir Beispiele für diese Räume kennen lernen und ein Beispiel für einen Banachraum, der kein Innenproduktraum ist. Am Schluss werden wir noch auf einige Eigenschaften in Prähilbert- und Hilberträumen eingehen. Folgende Literaturquellen wurden benutzt [7, 12, 16].

### 2.1 Prähilbert- und Hilberträume

Um den Begriff des Prähilbertraums (auch Innenproduktraum genannt) definieren zu können brauchen wir noch eine weitere Definition, und zwar die des Skalarprodukts (auch Innenprodukt genannt).

**Definition 2.1.** Sei  $E$  ein linearer Raum. Das Skalarprodukt ist eine Abbildung  $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  für die für alle  $x, y, z \in E, \alpha \in \mathbb{C}$  gilt

$$(x, z) + (y, z) = (x + y, z) \quad \text{Additivität,} \quad (2.1)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) \quad \text{Homogenität,} \quad (2.2)$$

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \text{Hermite-Symmetrie,} \quad (2.3)$$

$$(x, x) \geq 0 \text{ und } (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{Positive Definitheit.} \quad (2.4)$$

Das Skalarprodukt kann auch eine Abbildung  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  sein. In diesem Fall liegt eine gewöhnliche Symmetrieeigenschaft vor. Des Weiteren gilt stets für  $x \in E$ , dass  $(x, x) \in \mathbb{R}$  ist.

**Definition 2.2.** Ein Prähilbertraum (Innenproduktraum) ist ein linearer Raum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist.

**Satz 2.3.** *Im Prähilbertraum gilt die Schwarzsche Ungleichung*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \sqrt{(y, y)}. \quad (2.5)$$

*Beweis.* Für den Beweis ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. Wir betrachten  $y = 0$ :

In diesem Fall gilt die Gleichheit beider Seiten, da

$$|(x, 0)| = |(x, 0 \cdot 0)| = 0|(x, 0)| = 0,$$

und

$$\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(0, 0)} = \sqrt{(x, x)} \cdot 0 = 0$$

ist.

2. Wir betrachten  $y \neq 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x + \alpha y\|^2 \\ &= (x + \alpha y, x + \alpha y) \\ &= (x, x) + (x, \alpha y) + (\alpha y, x) + (\alpha y, \alpha y) \\ &= (x, x) + \overline{\alpha}(x, y) + \alpha \overline{(x, y)} + \alpha \overline{\alpha}(y, y). \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $\alpha = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$  und  $\overline{\alpha} = -\frac{\overline{(x, y)}}{\overline{(y, y)}}$ .

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) - \frac{(x, y)}{\overline{(y, y)}}\overline{(x, y)} + \frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)^2}(y, y) \\ &= (x, x) - \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(x, y) \leq (x, x).$$

Da für alle  $z \in \mathbb{C}$   $z\overline{z} = |z|^2$  gilt, folgt hieraus

$$\begin{aligned} |(x, y)|^2 &\leq (x, x)(y, y), \\ |(x, y)| &\leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung (2.5) lässt sich nun folgender Satz beweisen.

**Satz 2.4.** *In jedem Innenproduktraum  $E$  wird durch  $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$  eine Norm, die kanonische Norm definiert.*

*Beweis.* Es sind die einzelnen Normeigenschaften  $N_1, N_2, N_3$  (siehe Kapitel 1.2) nachzuweisen.

1. Positive Definitheit:

Da das Skalarprodukt positiv definit ist, ist auch seine Wurzel positiv definit.

2. Homogenität:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \overline{\alpha}(x, x)} = |\alpha| \|x\|.$$

3. Dreiecksungleichung: Wir betrachten

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y), \\ &= (x, x) + (x, y) + \overline{(x, y)} + (y, y), \\ &= (x, x) + 2\operatorname{Re}(x, y) + (y, y) \\ &\leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y).\end{aligned}$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung (2.5) folgt:

$$\|x + y\|^2 \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

□

Nun können wir den Hilbertraum definieren.

**Definition 2.5.** Ein Hilbertraum ist ein vollständiger Innenproduktraum.

Die Vollständigkeit eines gegebenen Innenproduktraums können wir mit Hilfe von Satz 2.4 und der Konvergenz bezüglich der Norm zeigen.

## 2.2 Beispiele für Prähilbert- und Hilberträume

### 2.2.1 Beispiele für Innenprodukträume

**Beispiel 2.6.** Sei  $C[a, b]$  die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen über dem Intervall  $[a, b]$ . Das Skalarprodukt ist definiert durch  $(f, g) := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ . Zunächst wollen wir für dieses Skalarprodukt die einzelnen Eigenschaften nachweisen.

1. Additivität:

Wir berechnen

$$\begin{aligned}(f, h) + (g, h) &= \int_a^b f\bar{h} dx + \int_a^b g\bar{h} dx \\ &= \int_a^b (f\bar{h} + g\bar{h}) dx \\ &= \int_a^b (f + g)\bar{h} dx \\ &= (f + g, h).\end{aligned}$$

2. Homogenität:

Wir betrachten

$$\alpha(f, g) = \alpha \int_a^b f\bar{g} dx = \int_a^b \alpha f\bar{g} dx = (\alpha f, g).$$

## 3. Hermite-Symmetrie:

Wir überprüfen

$$(f, g) = \int_a^b f \bar{g} \, dx = \int_a^b \overline{\bar{g} f} \, dx = \int_a^b \overline{g \bar{f}} \, dx = \overline{(g, f)}.$$

## 4. Positive Definitheit:

$$\text{Es gilt } (f, f) = \int_a^b f \bar{f} \, dx = \int_a^b |f|^2 \, dx \geq 0.$$

$\int_a^b |f|^2 \, dx = 0$  ist nur dann erfüllt, wenn  $f = 0$  ist, da der Integrand nicht negativ und stetig ist.

Da die Menge der komplexwertigen Funktionen einen linearen Raum bilden und wir uns in diesem Raum ein Skalarprodukt definiert haben, liegt ein Innenproduktraum vor.

Im Weiteren wollen wir prüfen, ob in den Räumen, die in den Beispiele 1.22 und 1.23 aus Kapitel 1.2.4 eingeführt wurden, Skalarprodukte  $(\cdot, \cdot)_1$  bzw.  $(\cdot, \cdot)_2$  definiert werden können, so dass  $\|\cdot\|_1^2 = (\cdot, \cdot)_1$  bzw.  $\|\cdot\|_2^2 = (\cdot, \cdot)_2$  ist. Dazu beweisen wir zunächst folgende Sätze.

**Satz 2.7.** Für Elemente  $x, y \in E$  eines Innenproduktraums gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (2.6)$$

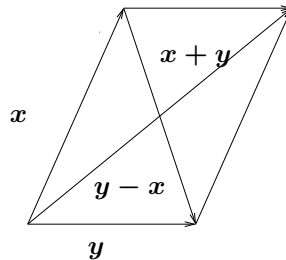


Abbildung 2.1: Die Parallelogrammgleichung im  $\mathbb{R}^2$

*Beweis.* Wir verifizieren (2.6) durch Ausrechnen für beliebige  $x, y \in E$ :

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y), \quad (2.7)$$

$$\|x - y\|^2 = (x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y). \quad (2.8)$$

Durch Addition von (2.7) und (2.8) ergibt sich

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(x, x) + 2(y, y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□

**Satz 2.8.** Genau diejenigen Räume in denen die Parallelogrammgleichung (2.6) gilt sind Innenprodukträume. Das Skalarprodukt (für eine Abbildung  $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ) kann folgendermaßen dargestellt werden

$$(x, y) = \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2.$$

*Beweis.* Es sind die einzelnen Skalarprodukteigenschaften nachzuweisen.

1. Additivität:

Wir berechnen

$$(x, z) + (y, z) = \frac{1}{2}(2\|\frac{x+z}{2}\|^2 + 2\|\frac{y+z}{2}\|^2 - 2\|\frac{x-z}{2}\|^2 - 2\|\frac{y-z}{2}\|^2).$$

Mit der Parallelogrammgleichung (2.6) folgt

$$\begin{aligned} (x, z) + (y, z) &= \frac{1}{2}(\|\frac{x+y}{2} + z\|^2 + \|\frac{x-y}{2}\|^2 - \|\frac{x+y}{2} - z\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\frac{x+y+2z}{2}\|^2 - \|\frac{x+y-2z}{2}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(x+y, 2z) \\ &= (x+y, z). \end{aligned}$$

2. Homogenität:

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= \frac{1}{4}\alpha(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\ &= \frac{1}{4}\alpha((x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) - (x, x) + (x, y) + (y, x) - (y, y)) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha(2(x, y) + 2(y, x))). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie, die noch gezeigt werden muss, gilt also

$$\frac{1}{4}(4\alpha(x, y)) = \alpha(x, y).$$

3. Symmetrieeigenschaft:

Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} (x, y) &= \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 \\ &= \|\frac{y+x}{2}\|^2 - \|\frac{-(y-x)}{2}\|^2 \\ &= \|\frac{y+x}{2}\|^2 - \|\frac{y-x}{2}\|^2 \\ &= (y, x). \end{aligned}$$

4. Positive Definitheit:

Da die Norm positiv definit ist und für das Skalarprodukt

$$(x, x) = \|\frac{x+x}{2}\|^2 - \|\frac{x-x}{2}\|^2 = \|\frac{2x}{2}\|^2 = \|x\|^2.$$

gilt, folgt sofort die positive Definitheit des Skalarprodukts.

□

Nun wollen wir mittels der Parallelogrammgleichung und Satz 2.8 prüfen, ob wir für Beispiel 1.22 aus Kapitel 1.2.4 ein Skalarprodukt einführen können.

### 2.2.2 Beispiel für einen Innenproduktraum

**Beispiel 2.9.** Wir betrachten den linearen Raum  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ . Zu prüfen ist die Parallelogrammgleichung (2.6):

$$\sum_{j=1}^3 (x_j + y_j)^2 + \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j)^2 = 2\left(\sum_{j=1}^3 x_j^2\right) + 2\left(\sum_{j=1}^3 y_j^2\right).$$

Wie man leicht sieht, ist diese erfüllt, da für die zusätzlichen Terme  $+2x_jy_j - 2x_jy_j = 0$  für  $j = 1, 2, 3$  gilt.

Das Skalarprodukt kann also folgendermaßen definiert werden

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^3 (x_j + y_j)^2}{2} - \frac{\sum_{j=1}^3 (x_j - y_j)^2}{2}.$$

Da  $+x_j^2 + y_j^2 - x_j^2 - y_j^2 = 0$  für  $j = 1, 2, 3$  gilt, folgt

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum_{j=1}^3 2x_jy_j}{2} = \sum_{j=1}^3 x_jy_j.$$

Auf diese Weise haben wir das bekannte euklidische Skalarprodukt erhalten.

### 2.2.3 Beispiel für einen Banachraum, der kein Innenproduktraum ist

**Beispiel 2.10.** Im Folgenden wird gezeigt, dass der Raum aus Beispiel 1.23 aus Kapitel 1.2.4 die Kriterien eines Banachraums erfüllt, aber nicht die eines Innenproduktraums.

Wäre  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  ein Innenproduktraum mit  $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ , so müsste die Parallelogrammgleichung für alle Vektoren  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  erfüllt sein, also auch für die Vektoren  $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)$  und  $\mathbf{y} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ . Da aber

$$2^2 + 2^2 \neq 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2$$

gilt, ist die Parallelogrammgleichung verletzt und es folgt, dass  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  kein Innenproduktraum ist.

### 2.2.4 Beispiel für einen Hilbertraum

**Beispiel 2.11.** Der  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$  ist, ein vollständiger linearer Raum mit Skalarprodukt und somit ein Hilbertraum.

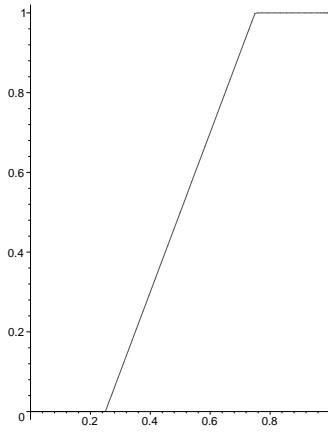
### 2.2.5 Beispiel für einen unvollständigen Innenproduktraum

Der Innenproduktraum  $C[a, b]$  ist nicht vollständig, was mit Hilfe des folgenden Beispiel gezeigt werden soll.

**Beispiel 2.12.** Wir wählen  $[a, b] = [0, 1]$  und eine Folge von Funktionen  $f_n(x)$  (siehe Abbildung 2.2), für die gilt

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ nx - \frac{1}{2n} & \text{falls } \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, \\ 1 & \text{falls } x > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{cases}$$



Abbildung 2.2:  $f_n(x)$  für  $n = 2$ 

Um zu sehen, dass diese Funktionenfolge eine Cauchy-Folge ist untersuchen wir

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_a^b |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

Man braucht nur das Intervall

$$\left(\frac{1}{2} - \max\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right), \frac{1}{2} + \max\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right)\right)$$

zu betrachten, da die Funktionen ansonsten identisch sind. Schätzt man dort den Abstand zwischen den beiden Funktionen mit 1 ab, so ergibt sich

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \rightarrow 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty.$$

Betrachtet man die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{falls } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so sieht man, dass diese bei  $\frac{1}{2}$  unstetig ist, d.h. die Cauchy-Folge konvergiert gegen eine Grenzfunktion, die nicht in  $C[1, 0]$  ist, weshalb der Raum  $C[a, b]$  nicht vollständig ist.

## 2.3 Eigenschaften

Im Innenproduktraum gelten einige besondere Eigenschaften, z.B. kann man mit Hilfe des Skalarprodukts einen Winkel definieren.

**Definition 2.13.** Sei  $E$  ein linearer Raum der mit einem Skalarprodukt versehen ist. Für zwei Elemente  $x, y \in E$  ist der Winkel  $\alpha$  zwischen  $x$  und  $y$  gegeben durch

$$\cos \alpha = \cos(x, y) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

**Definition 2.14.** Sei  $E$  ein linearer Raum der mit einem Skalarprodukt versehen ist und seien  $x, y \in E$ , dann heißen  $x$  und  $y$  orthogonal, falls  $(x, y) = 0$  ist. Dieser Sachverhalt wird mit  $x \perp y$  bezeichnet. Zwei nichtleere Teilmengen  $M$  und  $N$  von  $E$  heißen orthogonal, falls  $x \perp y$  für alle  $x \in M$  und  $y \in N$  gilt. Die Menge der zu  $M$  orthogonalen Elemente ist ein Unterraum von  $E$  und wird mit  $M^\perp$  bezeichnet.

Für orthogonale Elemente gilt der Satz des Pythagoras.

**Satz 2.15 (Pythagoras 1).** Seien  $x_1, \dots, x_n$  paarweise orthogonal mit  $x_i \in E$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

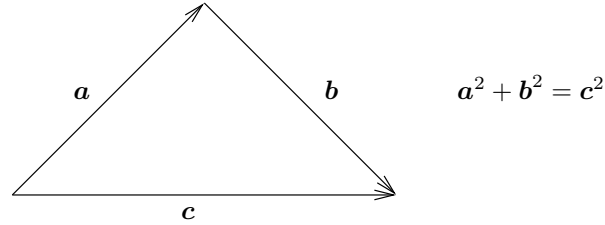


Abbildung 2.3: Satz des Pythagoras im  $\mathbb{R}^2$

*Beweis.* Wir betrachten

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \left( \sum_{j=1}^n x_j, \sum_{l=1}^n x_l \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n (x_j, x_l).$$

Da  $(x_j, x_l) = 0$  für  $j \neq l$  gilt, folgt

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n (x_j, x_j) = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

□

Um den verallgemeinerten Satz des Pythagoras einführen und beweisen zu können, braucht man noch einige Definitionen und einen Satz.

**Definition 2.16.** Ein Orthogonalsystem ist eine nichtleere Teilmenge  $M$  von  $E$ , die aus paarweise orthogonalen Elementen besteht, von denen keines das Nullelement ist.

**Definition 2.17.** Ein Orthonormalsystem ist ein Orthogonalsystem, in dem alle Elemente die Norm 1 besitzen.

**Definition 2.18.** Eine Orthogonalfolge ist ein abzählbares Orthogonalsystem.

**Satz 2.19.** In einem Innenproduktraum folgt aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

*Beweis.* Die Aussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y),$$

gilt, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, y_n) - (x, y)| = 0.$$

Wir zeigen die letzte Gleichung, indem wir zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, y_n) - (x, y)|$$

nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n - x, y)| + |(x_n, y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| \\ &\leq \|x_n - x\| \cdot \|y\| + (\|x_n - x\| + \|x\|) \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0,$$

gilt, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, y_n) - (x, y)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \cdot \|y\| + (\|x_n - x\| + \|x\|) \|y_n - y\| = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) - (x, y) = 0.$$

□

**Satz 2.20 (Pythagoras 2).** Sei  $x_1, \dots, x_n, \dots$  eine Orthogonalfolge und die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  konvergiert, d.h.  $\|s_n - x\| \rightarrow 0$ , dann konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$  und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2.$$

*Beweis.* Sei

$$s_n := x_1 + \dots + x_n \text{ und } x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Aus dem Satz des Pythagoras und der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = (s_n, s_n).$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n, s_n) = (x, x),$$

gilt

$$(x, x) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\|^2.$$

□



# Kapitel 3

## Einige Grundbegriffe in metrischen und normierten Räumen

AUSGEARBEITET VON MARIANNE KÖTZLE

Nachdem wir uns in den ersten beiden Kapiteln schon mit metrischen und normierten Räumen sowie Prähilbert-, Hilbert- und Banachräumen beschäftigt haben, werden wir uns jetzt Grundbegriffen in metrischen und normierten Räumen zuwenden, unter anderen dem Grundbegriff der Vervollständigung. Wir stützen uns auf die Bücher [12, S.249-253], [16, S.4-9]. Zunächst jedoch einige Definitionen.

### 3.1 Dichte

**Definition 3.1 (Dichte).** Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt dicht in  $X$ , wenn es bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  zu jedem  $x \in X$  ein  $m \in M$  mit  $d(x, m) < \varepsilon$  gibt oder gleichbedeutend, wenn  $\bar{M} = X$  ist.

$\bar{M}$  ist die Menge aller Grenzwerte konvergenter Folgen aus  $M$ . So liegt  $M$  also dicht in  $X$ , wenn sich jedes  $x \in X$  als Grenzwert einer Folge aus  $M$  erweist.

#### Beispiel einer dichten Teilmenge

Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  liegt dicht in der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  (bezüglich der Betragsmetrik), d.h. für alle  $x$  und  $y \in \mathbb{R}$  existiert ein  $r \in \mathbb{Q}$  mit  $x < r < y$ .

### 3.2 Separabilität

**Definition 3.2 (Separabilität).** Ein normierter oder metrischer Raum  $X$  heißt separabel, wenn es eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge gibt.

#### Beispiel eines separablen Raumes

Wir betrachten den Raum  $L_1(\Omega)$  der einfach Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit der Norm  $\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty$ , wobei  $\Omega$  beschränkt ist. Die Menge der Treppenfunktionen  $T_{reell}$  mit reellen Sprunghöhen und reellen Sprungstellen liegt zwar dicht in  $L_1(\Omega)$ , ist aber nicht abzählbar. Die Menge der Treppenfunktionen  $T_{rational}$  mit rationalen Sprunghöhen und rationalen Sprungstellen ist hingegen abzählbar.

Wir wollen nun beweisen, dass  $L_1(\Omega)$  separabel ist.

*Beweis.* Wir wissen, dass für alle  $t \in T_{reell}$  ein  $r_\varepsilon \in T_{rational}$  existiert, so dass

$$\|t - r_\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt und dass für  $f \in L_1(\Omega)$  ein  $t \in T_{reell}$  existiert, so dass

$$\|f - t\|_{L_1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Dann folgt aus

$$\|f - r_\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f - t\|_{L_1(\Omega)} + \|t - r_\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} < \varepsilon,$$

dass  $T_{rational}$  dichte Teilmenge von  $L_1(\Omega)$  ist. Also ist  $L_1(\Omega)$  separabel.  $\square$

### 3.3 Schauderbasis

Wir kennen bereits Basen von endlichdimensionalen Vektorräumen. So lässt sich jeder Vektor  $x$  eines endlichdimensionalen Vektorraumes  $X$  als eindeutig bestimmte Linearkombination der Basisvektoren  $v_1, \dots, v_n$  darstellen, d.h.  $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ ,  $x \in X$ ,  $c_i$  sind reelle oder komplexe Zahlen. Nun stellt sich die Frage, ob es auch Basen von unendlichdimensionalen Vektorräumen gibt. Betrachten wir beispielsweise die Basis  $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, \dots\}$  als unendliche Folge eines normierten oder metrischen Folgenraumes  $X$ . Auch hier lässt sich jedes Element  $x \in X$  als eindeutig bestimmte Linearkombination der Form  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{K}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \mathcal{C}$  darstellen. Wir kommen jetzt zur Definition der Schauderbasis (abzählbare Basis).

**Definition 3.3 (Schauderbasis).** Eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  heißt Schauderbasis von  $X$ , falls gilt: Für jedes  $x \in X$  existieren eindeutig bestimmte  $\alpha_n \in \mathbb{K}$  so, dass  $\sum_{n=1}^m \alpha_n u_n \rightarrow x$  für  $m \rightarrow \infty$  gilt.

#### Beispiele von Schauderbasisen

- i) Im Raum der stetigen Funktionen  $C([-\pi, \pi])$ , versehen mit der Norm  $\|f\| = (\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$  ist  $\mathcal{B} = \{\sin(nx), \cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Schauderbasis. Jede Funktion  $f(x)$  lässt sich als Fourier-Reihe darstellen:  

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) + d_n \cos(nx).$$
- ii) Im Raum der konvergenten Potenzreihen lässt sich jede Funktion  $g(x)$  mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung in der Form  $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$  darstellen. Daher ist  $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, \dots\}$  eine Schauderbasis.

Lange Zeit war nicht klar, ob jeder separable Banachraum eine Schauderbasis besitzt. 1973 konstruierte P. Enflo [9] ein Gegenbeispiel. Die Umkehrung gilt jedoch.

**Satz 3.4.** *Jeder Banachraum mit Schauderbasis ist separabel.*

*Beweis.* Sei  $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ ,  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  und  $x_r = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{rn} x_n$ ,  $\alpha_{rn} \in \mathbb{Q}$ .

Zu zeigen ist, dass zu jedem  $x$  ein  $x_r = x_r(\varepsilon)$  existiert, so dass  $\|x - x_r\| < \varepsilon$  ist für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$ .

Es gilt

$$\|x - x_r\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{rn}) x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{rn}| \|x_n\|.$$

Wähle

$$|\alpha_n - \alpha_{rn}| < \frac{\varepsilon}{2^n \|x_n\|}.$$

Dann folgt

$$\|x - x_r\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon.$$

□

### 3.4 Kompakte Menge

Kommen wir nun zur Definition der kompakten Menge. Wir wissen bereits, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen (bzw. normierten) endlichdimensionalen Raumes beschränkt und abgeschlossen ist. Wieder könnte man sich fragen wie es sich mit kompakten Mengen in unendlichdimensionalen Räumen verhält.

Betrachten wir dazu im Folgenraum die Folgen

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots) \quad \text{mit} \quad \|x^{(i)}\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(i)}| \leq 1,$$

d.h. wir betrachten die Einheitskugel im Raum der absolut konvergenten Folgen, welche abgeschlossen und beschränkt ist. Aber ist sie auch kompakt?

Betrachten wir dazu die Teilfolge  $x^{(1)} = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $x^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$ ,  $\dots$ .

Mit  $\|x^{(i)}\| = 1$  folgt

$$\|x^{(i)} - x^{(j)}\| = \|(0, \dots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)\| = 2 \not< \varepsilon.$$

Die Antwort lautet also nein, da wir keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert innerhalb der Einheitskugel finden können.

Also haben wir gezeigt, dass die Einheitskugel nicht kompakt ist.

So ergibt sich die Notwendigkeit die Definition einer kompakten Menge in unendlichdimensionalen Räumen zu präzisieren.

**Satz 3.5 (Kompakte Menge).** Für jede Teilmenge  $A$  eines metrischen oder normierten Raumes sind folgende Definitionen äquivalent:

- i)  $A$  ist überdeckungskompakt, d.h. jede offene Überdeckung von  $A$  enthält eine endliche Teilüberdeckung.
- ii)  $A$  ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in  $A$  besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $A$ .
- iii)  $(A, d)$  bzw.  $(A, \|\cdot\|)$  ist vollständig und präkompakt, d.h. für  $\varepsilon > 0$  besitzt  $A$  eine endliche Überdeckung mit  $\varepsilon$ -Kugeln.

### 3.5 Einbettung

Wenn man Funktionenräume mengentheoretisch vergleichen will, so stellt sich die wichtige Frage, ob vielleicht ein Raum im anderen enthalten ist oder ob sie eventuell sogar isomorph sind. So ergibt sich folgende Definition.

**Definition 3.6 (Einbettung).** Eine Abbildung  $B: X \rightarrow Y$  der Räume  $X$  und  $Y$  heißt Einbettung von  $X$  nach  $Y$ , falls  $B$  injektiv ist, d.h.  $BX \subset Y$ .

**Bemerkung 3.7.** Ist  $X \subset Y$ , dann kann  $B$  als Identität gewählt werden.

## 3.6 Isomorphismus

**Definition 3.8 (Isomorphismus).** Eine Abbildung  $A: R \rightarrow S$  der Räume  $R$  und  $S$  nennt man einen Isomorphismus, wenn  $A$  bijektiv ist. Die Räume  $R$  und  $S$  sind dann isomorph zueinander.

Die Elemente zweier isomorpher Räume unterscheiden sich nur durch die Namen ihrer Elemente. Die von  $R$  heißen  $x, y, \dots$  und die von  $S$  heißen  $Ax, Ay, \dots$ . Alle durch Addition und Vervielfachung ausdrückbaren Beziehungen zwischen Elementen des einen Raumes gelten ohne Änderung auch für die Elemente des anderen Raumes. Deshalb kann man sie identifizieren, also auch noch von ihrem letzten Unterschied, der Verschiedenheit ihrer Elementnamen, absehen.

## 3.7 Vervollständigung

Viele Fundamentalsätze der Funktionalanalysis gelten nur dann, wenn die zugrundeliegenden Räume vollständig sind (z.B. Satz über die Konvergenz von Potenzreihen). Hat man jedoch einen unvollständigen Raum  $E$  vorliegen, so kann man sich manchmal dadurch behelfen, dass durch Hinzufügen neuer Elemente jede Cauchy-Folge in  $E$  einen Grenzwert erhält und somit  $E$  vervollständigt wird.

### 3.7.1 Vervollständigung im metrischen Raum

**Definition 3.9 (Isometrie).** Eine bijektive Abbildung  $A$  des metrischen Raumes  $(E_1, d_1)$  in den metrischen Raum  $(E_2, d_2)$  heißt isometrisch oder eine Isometrie, wenn sie Abstände erhält, wenn also für je zwei Punkte  $x, y \in E_1$  stets gilt:

$$d_1(x, y) = d_2(Ax, Ay).$$

Isometrische Räume unterscheiden sich - vom Standpunkt einer metrischen Theorie aus gesehen - nur durch die Bezeichnung ihrer Elemente und können daher identifiziert werden.

Wir wollen jetzt folgenden Satz beweisen:

**Satz 3.10.** *Zu jedem unvollständigen metrischen Raum  $E$  gibt es einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten vollständigen Raum  $\bar{E}$ , in dem  $E$  dicht liegt und der auf  $E$  die ursprüngliche Metrik von  $E$  induziert.  $\bar{E}$  heißt die Vervollständigung oder die vollständige Hülle von  $E$ .*

*Beweis.* Wir betrachten zunächst die natürliche Vervollständigung  $\bar{E}$  von  $E$ , in der  $E$  dicht liegt. Die Metrik auf  $\bar{E}$  wollen wir mit  $d_1$  bezeichnen. Ihre Einschränkung auf  $E$  fällt auf  $E$  natürlich mit der dort vorhandenen Metrik  $d$  zusammen ( $E$  ist ein metrischer Unterraum von  $\bar{E}$ ). Angenommen wir hätten einen zweiten vollständigen metrischen Raum  $(\tilde{E}, d_2)$  gefunden, der  $(E, d)$  als dichten Unterraum enthält, so kann man zeigen, dass  $(\bar{E}, d_1)$  und  $(\tilde{E}, d_2)$  isometrisch sind. Sei  $\bar{x} \in \bar{E}$  und  $\tilde{x} \in \tilde{E}$ , so dass eine Cauchyfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E$  existiert mit

$$\begin{aligned} d_1(x_n, \bar{x}) &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad \text{und} \\ d_2(x_n, \tilde{x}) &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

gilt.  $\tilde{x}$  hängt nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ab. Ist nämlich  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine andere Folge aus  $E$ , die in  $\bar{E}$  gegen  $\bar{x}$  konvergiert, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} d_2(y_n, \tilde{x}) &\leq d_2(y_n, x_n) + d_2(x_n, \tilde{x}) \\ &= d_1(y_n, x_n) + d_2(x_n, \tilde{x}) \\ &\leq d_1(y_n, \bar{x}) + d_1(\bar{x}, x_n) + d_2(x_n, \tilde{x}) \end{aligned}$$

dass auch  $d_2(y_n, \tilde{x})$  gegen 0 konvergiert.

Jedem  $\bar{x}$  in  $\bar{E}$  ordnen wir nun das so bestimmte Element  $\tilde{x}$  in  $\tilde{E}$  zu. Diese Abbildung  $B: \bar{E} \rightarrow \tilde{E}$  ist offenbar sowohl injektiv, als auch surjektiv. Aus der Stetigkeit der Metrik folgt ferner, dass



$B$  eine Isometrie ist. Seien nämlich  $\bar{x}, \bar{y}$  zwei beliebige Punkte in  $\bar{E}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  approximierende Folgen aus  $E$ , deren Grenzwerte  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  in  $\tilde{E}$  durch  $\tilde{x} = B\bar{x}$  und  $\tilde{y} = B\bar{y}$  bestimmt sind, so ist

$$\begin{aligned} d_1(\bar{x}, \bar{y}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_2(x_n, y_n) = d_2(\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

□

### 3.7.2 Vervollständigung im normierten Raum

Im Unterschied zu den metrischen Räumen fordern wir zusätzlich, dass die Vervollständigung eines normierten Raumes ein Banachraum ist, d.h. die Vervollständigung muss ebenfalls eine lineare Struktur aufweisen und für die Metrik soll gelten, dass  $\|x\|_{\tilde{E}} = d(x, 0)$  eine Norm ist. Weiterhin ist zu prüfen, ob auch die Eindeutigkeit erhalten bleibt.

Sei  $E$  ein unvollständiger normierter Raum und damit ein unvollständiger metrischer Raum. Die Metrik seiner vollständigen Hülle  $\tilde{E}$ , die durch Satz 3.10 eingeführt wurde, werde mit  $d$  bezeichnet. Für  $x, y \in E$  gilt, dass  $d(x, y) = \|x - y\|$  ist. Wir wollen zunächst  $\tilde{E}$  zu einem Vektorraum, dann zu einem normierten Raum machen.

Zu  $x, y \in \tilde{E}$  gibt es Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ , die gegen  $x$  bzw.  $y$  bezüglich der Metrik  $d$  konvergieren. Aus

$$\|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$$

schließen wir, dass  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist, also einen Grenzwert  $z$  in  $\tilde{E}$  besitzt. Leicht zu zeigen ist, dass  $z$  nur von  $x$  und  $y$  abhängt nicht aber von den approximierenden Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Dies rechtfertigt die folgende Definition:

$$x + y := \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n + y_n, x + y) = 0.$$

Ist  $x, y \in E$ , so stimmt diese Summe mit der in dem Vektorraum  $E$  schon bestehenden überein (man setze  $x_n = x$  und  $y_n = y \forall n \in \mathbb{N}$ ). In ähnlicher Weise lässt sich durch die Definition

$$\alpha x := \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n)$$

die in  $E$  vorhandene Multiplikation mit Skalaren auf  $\tilde{E}$  fortsetzen.

$\tilde{E}$  ist nun Vektorraum.

Wir führen eine Norm  $\|x\| := d(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, 0)$  in  $\tilde{E}$  ein, die offenbar eine Fortsetzung der in  $E$  schon vorhandenen Norm ist. Trivial ist zu zeigen, dass

$$\|x\| \geq 0 \text{ und } \|x\| = 0 \text{ ist genau dann, wenn } x = 0$$

gilt. Den Nachweis der übrigen Normeigenschaften stützen wir auf die Stetigkeit der Metrik  $d$ , aus der insbesondere folgt, dass  $x_n \rightarrow x$  und somit  $d(x_n, 0) \rightarrow d(x, 0)$  also  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ . Konvergieren die Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $E$  gegen  $x, y \in \tilde{E}$ , so ergibt sich aus

$$\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\| \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

die Dreiecksungleichung

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Ähnlich beweist man die Gleichung  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

Schließlich ist

$$d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = \|x - y\|.$$

Die Metrik  $d$  auf  $\tilde{E}$  geht also aus der oben definierten Norm hervor.

Nun lässt sich  $E$  zu einem Banachraum  $\tilde{E}$  vervollständigen.

Wäre  $\tilde{E}$  eine zweite Banachraumvervollständigung von  $E$ , so ist die im Beweis von Satz 3.10 definierte Abbildung  $B$  nicht nur eine Isometrie von  $\tilde{E}$  auf  $\tilde{E}$ , sondern auch eine lineare Transformation, also ein Normisomorphismus.

**Definition 3.11 (Normisomorphismus).** Eine Abbildung  $f$  ist ein Normisomorphismus zwischen zwei normierten Räumen  $(\tilde{E}, \|\cdot\|_1)$  und  $(\tilde{E}, \|\cdot\|_2)$ , wenn gilt:

- i)  $f$  ist bijektiv,
- ii)  $f$  ist linear,
- iii)  $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$  für alle  $x \in \tilde{E}$ .

**Satz 3.12.** Zu jedem unvollständigen normierten Raum  $E$  gibt es einen bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmten Banachraum  $\tilde{E}$ , so dass  $E$  ein in  $\tilde{E}$  dicht liegender Unterraum ist.  $\tilde{E}$  ist die Vervollständigung oder die vollständige Hülle von  $E$ .

Den Beweis findet man in [12, S. 252, Satz 41.5].

### Beispiel eines unvollständigen normierten Raumes

Ein Beispiel eines unvollständigen normierten Raumes ist der Raum  $C([a, b])$  mit der Metrik  $d(x, y) = (\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ . (siehe Kapitel 1.2.4)

### 3.7.3 Vervollständigung im prähilbertschen Raum

**Satz 3.13.** Zu dem unvollständigen Innenproduktraum  $E$  existiert ein bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmter Hilbertraum  $\tilde{E}$ , so dass  $E$  ein in  $\tilde{E}$  dicht liegender Unterraum ist (insbesondere wird das Innenprodukt in  $\tilde{E}$  durch das in  $E$  induziert).

*Beweis.* Sei  $\tilde{E}$  die Vervollständigung des normierten Raumes  $E$  gemäß Satz 3.12. Sind  $x, y$  Elemente in  $\tilde{E}$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  approximierende Folgen aus  $E$ , so erhalten wir aus

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| &\leq |(x_n - x_m, y_n)| + |(x_m, y_n - y_m)| \\ &\leq \|(x_n - x_m)\| \|y_n\| + \|x_m\| \|y_n - y_m\|, \end{aligned}$$

dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$  existiert.

Eine ähnliche Abschätzung lehrt, dass dieser Grenzwert nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folgen abhängt. Infolgedessen sind wir zu der Definition  $(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$  berechtigt, durch die offenbar ein Innenprodukt auf  $\tilde{E}$  eingeführt wird. Dieses Innenprodukt setzt das auf  $E$  vorhandene fort und die von ihm erzeugte Norm

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n, x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

stimmt mit der auf  $\tilde{E}$  vorhandenen überein.  $\tilde{E}$  ist also ein Hilbertraum. □

# Kapitel 4

## Räume stetiger Funktionen I

AUSGEARBEITET VON MARITA THOMAS

### 4.1 Allgemeines

Im Folgenden werden wir uns näher mit den Räumen der auf  $\Omega$  stetigen ( $C^0(\Omega)$ ), gleichmäßig stetigen ( $C^0(\bar{\Omega})$ ) und hölderstetigen ( $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ ) Funktionen befassen.

In Kapitel 4.2 führen wir die drei Räume nacheinander ein und verdeutlichen ihren Zusammenhang, indem wir zwischen ihnen eine mengentheoretische Ordnung herstellen.

In Kapitel 4.3 untersuchen wir, mit Hilfe welcher Normen die drei Räume normierbar sind und beschäftigen uns mit ihrer Banachraumeigenschaft. Es wird ebenfalls gezeigt, dass keiner von ihnen ein Hilbertraum ist.

Um die behandelten Sätze und Beweise nachvollziehen zu können, ist es nötig, auf die folgenden Sätze und Definitionen Bezug zu nehmen. Auf deren Bedeutung und Beweismöglichkeit wird nicht näher eingegangen, da sie bereits in den Vorlesung Analysis I [27] ausführlich behandelt wurden.

#### 4.1.1 Definitionen und Sätze

Für die folgenden Definitionen und Sätze betrachte man eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}).$$

**Definition 4.1 (Stetigkeit 1).** [27, S.71] Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  oder  $\mathbb{C}$  heißt stetig in  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  oder  $D \subset \mathbb{C}$  genau dann, wenn jede konvergente Folge  $\mathbf{x}_k \in D$ , mit  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$  für  $k \rightarrow \infty$  eine konvergente Folge von Bildern erzeugt und wenn zusätzlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0)$$

gilt.

**Definition 4.2 (Stetigkeit 2).** [27, S.71, Satz 4.2] Die Funktion  $f$  ist genau dann stetig in  $\mathbf{x}_0 \in D$ , wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für jedes  $\mathbf{x} \in D$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$  auch  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$  gilt, wobei  $\delta$  i.Allg. von  $\mathbf{x}_0$  und  $\varepsilon$  abhängt.

**Definition 4.3 (Stetigkeit 3).** [27, S.71] Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  oder  $\mathbb{C}$  heißt stetig in  $D \subset \mathbb{R}^n$  oder  $D \subset \mathbb{C}$  genau dann, wenn  $f$  stetig in  $\mathbf{x}_0$  ist für alle  $\mathbf{x}_0 \in D$ .

**Definition 4.4 (Gleichmäßige Stetigkeit).** [27, S.98] Die Funktion  $f$  heißt in  $D$  gleichmäßig stetig genau dann, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$  auch  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$  gilt. Hierbei hängt  $\delta = \delta(\varepsilon)$  von  $\varepsilon$  ab, ist aber unabhängig von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$ .

**Definition 4.5 (Funktionslimes).** [27, S.75] Sei  $\mathbf{x}_0$  Häufungspunkt von  $D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Dann heißt  $\mathbf{a} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  Funktionslimes, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass für alle  $\mathbf{x} \in D$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$  auch  $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{a}| < \varepsilon$  gilt.

Man beachte, dass es bei dieser Definition auf den Funktionswert  $f(\mathbf{x}_0)$  nicht ankommt.

**Definition 4.6 (Punktweise Konvergenz).** [27, S.101] Die Funktionenfolge  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  heißt punktweise konvergent in  $D$  genau dann, wenn für jedes  $\mathbf{x} \in D$  ein  $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$  (oder  $\mathbb{C}$ ) existiert, sodass  $f(\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(\mathbf{x})$  ist.

Hierzu gibt es folgende äquivalente Definition.

Zu einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  existiert für jedes  $\mathbf{x} \in D$  und für alle  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\mathbf{x}, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $j \geq N$  auch  $|f_j(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$  gilt.

**Definition 4.7 (Gleichmäßige Konvergenz).** [27, S.102] Die Funktion  $f$  heißt gleichmäßig konvergent, wenn zu einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  für alle  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, sodass für alle  $j \geq N$  und für jedes  $\mathbf{x} \in D$  auch  $|f_j(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$  gilt.

**Definition 4.8 (Cauchysches Konvergenzkriterium).** [14, S.546, Satz 103.2] Eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gleichmäßig auf  $D$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N$  gibt, sodass für alle  $m, n > N$  stets  $\|f_m - f_n\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$  bleibt, wobei  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  für die Supremumnorm steht.

**Satz 4.9.** [27, S.102, Satz 5.1] Sei  $f_j(\mathbf{x})$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  stetig auf  $D$  und  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$  konvergiere auf  $D$  gleichmäßig. Dann ist auch  $f(\mathbf{x})$  in  $D$  stetig.

**Satz 4.10 (Satz von Heine).** [27, S. 99, Satz 4.32] Jede auf einer kompakten Menge stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

**Satz 4.11 (Approximationssatz von Weierstraß im Reellen).** [18, S.863] Sei  $f(x)$  eine im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion. Es existiert eine Polynomfolge  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ , die in  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert. Eine solche Folge bilden z.B. die Bernsteinschen Polynome.

Dieser Satz ist noch nicht aus früheren Vorlesungen bekannt. Auf ihn wird in Kapitel 5 genauer eingegangen.

Um den Sinn der Behandlung von Funktionenräumen zu verstehen, ist von Bedeutung, dass wir Funktionen in diesem Zusammenhang weniger als Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen betrachten, sondern sie nun selbst als Elemente eines Vektorraums auffassen. Auf diese Weise kann man die Untersuchung einzelner Funktionen eines bestimmten Typs auf die Betrachtung des Raumes aller Funktionen dieses Typs ausweiten.

Im Folgenden sei  $\Omega$  immer als offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definiert.

## 4.2 Einführung der zu untersuchenden Funktionenräume

### 4.2.1 Der Raum der auf $\Omega$ stetigen Funktionen $C^0(\Omega) = C(\Omega)$

Nun betrachten wir  $C(\Omega) = \{f : f \text{ stetig auf } \Omega\}$  mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (siehe [12, S. 74]). Diese Menge der auf  $\Omega$  stetigen Funktionen bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned}(f + g)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \\ (\alpha f)(\mathbf{x}) &= \alpha(f(\mathbf{x}))\end{aligned}$$

für alle  $f, g \in C(\Omega)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  einen Vektorraum.

Dies ist offensichtlich unter dem Gesichtspunkt, dass die Operationen in  $\mathbb{R}$  stattfinden, da man auf Grund der Definition zuerst auswertet bevor man addiert oder skalar multipliziert. Die Vektorraumeigenschaft von  $\mathbb{R}$  ist bekannt.

## 4.2.2 Der Raum der auf $\Omega$ gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen $C^0(\Omega) = C(\bar{\Omega})$

### 4.2.2.1 Erklärung der gleichmäßigen Stetigkeit

Wir erläutern die Definition 4.4 anhand eines Beispiels (Abb. 4.1), in dem die betrachtete Kurve einen unendlichen Anstieg im Punkt 0 besitzt.

Zur Veranschaulichung wähle man eine beliebige  $\varepsilon$ -Umgebung um einen Funktionswert  $f(x)$ .

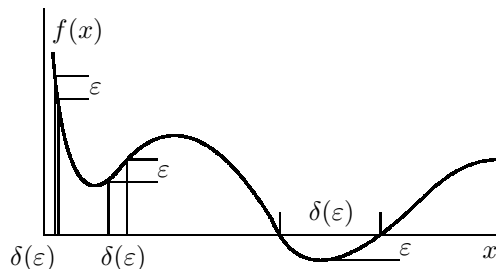


Abbildung 4.1: Beispielkurve in  $\mathbb{R}^1$

Für  $x \rightarrow 0$  wird die Steigung von  $f(x)$  sehr groß (siehe Abb. 4.1). Folglich zieht sich die  $\delta(\varepsilon)$ -Umgebung  $\mathcal{U}_\delta(x_0)$  mehr und mehr zu einem Punkt zusammen, das heißt,  $\lim_{x_0 \rightarrow 0} \mathcal{U}_\delta(x_0) = \{0\}$  und  $\mathcal{U}_\delta(x_0)$  ist somit keine offene Umgebung mehr.

Damit die Funktion  $f$  auf  $\Omega = (0, a)$  gleichmäßig stetig sein kann, muss der fragliche Bereich aus dem Definitionsbereich von  $f$  genommen werden, damit die Steigung nicht mehr beliebig groß werden kann. An der Beispielkurve kann man erkennen, dass die  $\delta$ -Umgebung für die gewählte  $\varepsilon$ -Umgebung dort am kleinsten wird, wo die Steigung am größten ist.

Wenn wir folglich die kleinste  $\delta$ -Umgebung wählen, so können wir sicher sein, dass die zugeordneten Funktionswerte immer in der  $\varepsilon$ -Umgebung liegen. Dies entspricht der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

### 4.2.2.2 Erklärung der Bezeichnung $C(\bar{\Omega})$

Auf den ersten Blick ist nicht ersichtlich, warum der Raum der auf  $\Omega$  gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen mit  $C(\bar{\Omega})$  bezeichnet wird. Es wäre naheliegender  $C(\bar{\Omega})$  als den Raum der auf  $\bar{\Omega}$  stetigen Funktionen zu benennen. Nach dem Satz von Heine ist aber eine auf  $C(\bar{\Omega})$  stetige Funktion dort auch gleichmäßig stetig.

Wir zeigen nun, dass die gleichmäßige Stetigkeit auf  $\Omega$  die gleichmäßige Stetigkeit auf  $\bar{\Omega}$  impliziert.

**Satz 4.12.** [5, S.241] *Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann gleichmäßig stetig auf  $\Omega$ , wenn für jedes  $\mathbf{x}_0$  aus der Menge der Häufungspunkte von  $\Omega$  der Grenzwert  $\mathbf{a} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  existiert.*

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die Funktion  $f$  gleichmäßig stetig ist, wenn der Funktionenlimes für alle  $\mathbf{x}_0$  existiert.

Sei  $\Omega$  eine offene Menge. Bei einer offenen Menge liegen auch Häufungspunkte auf dem Rand. Wenn der Funktionenlimes für alle Häufungspunkte von  $\Omega$  existieren soll, so gilt dies auch für die Randpunkte, also für ganz  $\bar{\Omega}$ .

Da die Definition des Funktionenlimes  $\mathbf{a}$  einer Funktion  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  gerade der Definition der Stetigkeit von  $f$  mit  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}$  entspricht, ist  $f$  stetig, wenn  $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a}$  ist. Somit ist  $f$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig. Mit dem Satz von Heine folgt dann die Behauptung.

Für die andere Richtung betrachte man die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

Bei festem  $\mathbf{y}$  folgt daraus die Stetigkeitsbedingung und somit für  $f(\mathbf{y}) = \mathbf{a}$  die Definition des Funktionenlimes für alle  $\mathbf{y} \in \Omega$ . Da  $f$  als gleichmäßig stetige Funktion beschränkt ist und die Limesbildung eindeutig ist, existiert  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$  für alle  $\mathbf{z} \in \partial\Omega$ . Also existiert der Funktionenlimes für alle Häufungspunkte von  $\Omega$ .  $\square$

**Lemma 4.13.** [5, S.241] *Existiert der Funktionenlimes von  $f$  in jedem Häufungspunkt von  $\Omega$ , so kann  $f$  stetig von  $\Omega$  auf  $\bar{\Omega}$  fortgesetzt werden und zwar eindeutig.*

Dies folgt direkt aus Satz 4.12.

Da die Stetigkeit auf einem Kompaktum nach dem Satz von Heine die gleichmäßige Stetigkeit auf dem Kompaktum impliziert, ist somit gezeigt, dass aus der gleichmäßigen Stetigkeit auf  $\Omega$  die gleichmäßige Stetigkeit auf  $\bar{\Omega}$  folgt.

Dies ist eine Erklärung für die Bezeichnung  $C(\bar{\Omega})$ .

Wir beschäftigen uns jetzt mit einer Relation zwischen  $C(\Omega)$  und  $C(\bar{\Omega})$ .

### 4.2.2.3 Relation zwischen $C(\Omega)$ und $C(\bar{\Omega})$

**Satz 4.14.** *Es gilt:  $C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$ .*

*Beweis.* Wir zeigen die Unterraumeigenschaft von  $C(\bar{\Omega})$ , indem wir die Abgeschlossenheit der Addition und der skalaren Multiplikation überprüfen.

Für  $f, g \in C(\bar{\Omega})$  gilt, dass für alle  $\varepsilon_i > 0$  ein  $\delta_i > 0$  existiert, sodass für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}$  mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta_i$ , wobei  $i := 1, 2$ , auch

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| &< \varepsilon_1, \\ |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| &< \varepsilon_2 \end{aligned}$$

gilt.

Zunächst untersuchen wir die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition.

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|(f + g)(\mathbf{x}) - (f + g)(\mathbf{y})| \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| + |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|.$$

Man wähle  $\frac{1}{2}\varepsilon_* = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$  und  $\delta_* = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , dann folgt

$$|(f + g)(\mathbf{x}) - (f + g)(\mathbf{y})| \leq \frac{1}{2}(\varepsilon_* + \varepsilon_*) = \varepsilon_*.$$

Durch die Wahl von  $\varepsilon_*$  und  $\delta_*$  sind in der größeren  $\varepsilon$ -Umgebung auch die Funktionswertdifferenzen der kleineren  $\varepsilon$ -Umgebung enthalten und mit der kleineren  $\delta$ -Umgebung geht man sicher, dass die Differenzen der Funktionswerte auf jeden Fall in der größeren  $\varepsilon$ -Umgebung bleiben (siehe Kapitel 4.2.2.1).

Nun wird die Abgeschlossenheit bezüglich der skalaren Multiplikation betrachtet.

Der folgende Ausdruck ist homogen bezüglich  $\lambda$ :

$$|(\lambda f)(\mathbf{x}) - (\lambda f)(\mathbf{y})| = |\lambda| |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|.$$

Wähle  $\varepsilon_* = |\lambda| \varepsilon_1$ , woraus  $|(\lambda f)(\mathbf{x}) - (\lambda f)(\mathbf{y})| \leq \varepsilon_*$  folgt.

Es bleibt die Beschränktheit zu untersuchen. Sei  $|f(\mathbf{x})| \leq \alpha$  und  $|g(\mathbf{x})| \leq \beta$ , so ist ersichtlich, dass dann  $|(f + g)(\mathbf{x})| \leq \alpha + \beta$ , sowie  $|\lambda f(\mathbf{x})| \leq \alpha |\lambda|$  gilt.

Aus den gezeigten Eigenschaften folgt  $C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$ .

Da nicht alle Funktionen  $f \in C(\Omega)$  gleichmäßig stetig sind, wie z.B.:  $f(x) = \sin x^2$  mit  $\Omega = \mathbb{R}$ , ist  $C(\bar{\Omega})$  ein echter Unterraum von  $C(\Omega)$ .  $\square$

## 4.2.3 Der Raum der auf $\bar{\Omega}$ hölderstetigen Funktionen $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$

### 4.2.3.1 Einführung der Hölderbedingung

**Definition 4.15 (Hölderbedingung).** Die Funktion  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die Hölderbedingung, wenn es Konstanten  $c < \infty \in \mathbb{R}$  und

$\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \lambda \leq 1$  gibt, sodass gilt:

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda.$$

Dabei bezeichnet man die Konstante  $c$  als Hölderkoeffizient und  $\lambda$  als Hölderexponent. Für  $\lambda = 1$  geht die Hölderbedingung über in die bekannte Lipschitzbedingung

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

**Satz 4.16.** *Erfüllt eine Funktion  $f$  die Hölderbedingung auf  $\bar{\Omega}$ , so ist  $f$  stetig auf  $\bar{\Omega}$ .*

*Beweis.* Wähle eine Folge  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bar{\Omega}$  mit  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$  für  $n \rightarrow \infty$ , dann folgt  $|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}|^\lambda \rightarrow 0$  für  $\lambda > 0$ .

Da

$$0 \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c |\mathbf{x}_n - \mathbf{y}|^\lambda$$

gilt, folgt  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \rightarrow 0$ .

Damit erzeugen konvergente Folgen in  $\bar{\Omega}$  konvergente Folgen im Bildraum  $f(\bar{\Omega})$ , woraus sich die Stetigkeit von  $f$  auf  $\bar{\Omega}$  ergibt. Die Funktion  $f$  ist dort sogar gleichmäßig stetig, da  $\bar{\Omega}$  kompakt ist.  $\square$

Also kann man die mit dem Hölderexponenten  $\lambda$  auf  $\bar{\Omega}$  hölderstetigen Funktionen zu

$$C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) = \{f : f \text{ ist hölderstetig auf } \bar{\Omega} \text{ mit dem Hölderexponenten } \lambda\}$$

zusammenfassen.

#### 4.2.3.2 Relation zwischen $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ und $C(\bar{\Omega})$

**Satz 4.17.** *Es gilt:  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$ .*

*Beweis.* Für  $f$  und  $g \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  gilt

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda \quad \text{und} \quad |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq c_2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda.$$

Zunächst wird die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition mittels der Dreiecksungleichung überprüft

$$|(f+g)(\mathbf{x}) - (f+g)(\mathbf{y})| \leq |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| + |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq (c_1 + c_2) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda$$

und anschließend die der skalaren Multiplikation

$$|(\alpha f)(\mathbf{x}) - (\alpha f)(\mathbf{y})| = |\alpha| |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq |\alpha| c_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda,$$

bei der die Homogenität bezüglich  $\alpha$  entscheidend ist.  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist ein echter Unterraum von  $C(\bar{\Omega})$ , was durch Satz 4.23 gezeigt wird.  $\square$

**Folgerung 4.18.** *Somit gilt  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega)$ .*

### 4.2.4 Betrachtungen auf Hölderräumen

#### 4.2.4.1 Begründung für die Definition des Hölderexponenten mit $0 < \lambda \leq 1$

Es wird die Hölderbedingung  $|f(x) - f(y)| \leq c |x - y|^\lambda$  für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  etwas genauer untersucht. Division der letztgenannten Ungleichung durch  $|x - y|$  ergibt

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c |x - y|^{\lambda-1}$$

und wir erhalten auf der linken Seite den Differenzenquotienten. Durch Limesbildung entsteht der Betrag der Ableitung von  $f$  an der Stelle  $y$ , sofern diese existiert:

$$\left| \frac{df(y)}{dx} \right| = \lim_{x \rightarrow y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq c \lim_{x \rightarrow y} |x - y|^{\lambda-1}.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung bezüglich  $\lambda$  durch.

1. Fall:  $0 < \lambda < 1$ :

Hier gilt  $\lambda - 1 < 0$ , daher ist  $\lim_{x \rightarrow y} |x - y|^{\lambda-1} = \infty$  und eventuell ist  $\left| \frac{df(y)}{dx} \right|$  unbeschränkt.

2. Fall:  $\lambda = 1$ :

In diesem Fall ergibt sich  $c|x-y|^{\lambda-1} = c$  für alle  $x$  und  $y$ . Also ist  $\left| \frac{df(y)}{dx} \right|$  beschränkt.

3. Fall:  $\lambda > 1$ :

Ist  $\lambda > 1$ , so ergibt sich für  $x \rightarrow y$ :  $|x-y|^{\lambda-1} \rightarrow 0$ , also  $f \equiv c$ . Konstante Funktionen erfüllen die Hölderbedingung mit jedem Exponent  $\lambda \in (0, 1]$ , daher ist dieser Fall uninteressant.

4. Fall:  $\lambda < 0$ :

Betrachtet man die Hölderbedingung, so erkennt man  $\lim_{x \rightarrow y} |x - y|^\lambda = \infty$ . Eine derartige Bedingung wird von jeder Funktion erfüllt, auch von solchen, die die in der Hölderbedingung enthaltene Stetigkeitsbedingung verletzen.  $\lambda < 0$  muss folglich ausgenommen werden.

Der Fall  $\lambda = 1$  ist bereits bekannt im Zusammenhang mit dem Banachschen Fixpunktsatz. Dort wird eine Lipschitzbedingung mit  $c < 1$  gefordert. Damit wird die Ableitung der Fixpunktfunktion  $\Phi(x)$  so beschränkt, dass  $\Phi(x)$  keinen zweiten Schnitt mit der 1. Winkelhalbierenden haben kann, womit die Eindeutigkeit des Fixpunktes sichergestellt ist.

Ergebnis:

Mit der Hölderbedingung erfasst man die Eigenschaften der Ableitung von Funktionen.

Bei  $\lambda < 1$  sind hinsichtlich der Ableitung keine Aussagen möglich, für  $\lambda = 1$  weiß man, dass die Ableitung beschränkt sein muss.

#### 4.2.4.2 Die mengentheoretische Ordnung auf der Menge der Hölderräume

Für diesen Abschnitt wird auf [24, S. 30] verwiesen.

Mit dem folgenden Satz kann geklärt werden, ob Funktionen  $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  die Hölderbedingung auch für andere Hölderexponenten  $\lambda$  erfüllen.

**Satz 4.19.**  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist Unterraum von  $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$  für alle  $\lambda \geq \mu$ .

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $\Omega$  beschränkt ist. Setzen wir  $\lambda = \delta + \mu$ ,  $\delta > 0$ , dann ist:

$$|f(x) - f(y)| \leq c_1 |x - y|^\lambda = c_1 |x - y|^\delta |x - y|^\mu \leq c_2 |x - y|^\mu$$

wobei  $c_2 = c_1 \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} |x - y|^\delta$  ist. □

Aus diesem Satz ergeben sich einige Folgerungen.

**Folgerung 4.20.** Für jede hölderstetige Funktion existiert ein maximaler Hölderexponent  $\lambda_{max}$ , sodass die Funktion für alle  $\lambda \leq \lambda_{max}$  ebenfalls hölderstetig ist.

**Folgerung 4.21.** Jede lipschitzstetige Funktion ist auch hölderstetig für alle  $\lambda < 1$ .

**Folgerung 4.22.** Sei  $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  und  $g \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ , dann gilt bei der Addition dieser Funktionen:  $(f + g)(x) \in C^{0,\min\{\lambda,\mu\}}(\bar{\Omega})$ .



### 4.2.4.3 Beispiele

a) Als Beispiel für eine hölderstetige Funktion, die nicht lipschitzstetig ist, untersuchen wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \bar{\Omega} = [0, 1].$$

Hierzu zeigen wir zunächst:

1.  $x \leq |x - y| + |y|$ , denn:  $|x - y| + |y| \geq |x - y + y| \geq |x| \geq x$ , wie man durch eine Anwendung der Dreiecksungleichung bestätigt.
2.  $\sqrt{|x - y|} + \sqrt{|y|} \geq \sqrt{|x - y| + |y|} \geq 0$ , denn durch Quadrieren, der wegen Betragsbildung positiven Ausdrücke, sieht man:  
 $|x - y| + 2\sqrt{|x - y|}\sqrt{|y|} + |y| \geq |x - y| + |y|.$

Jetzt lässt sich die Hölderbedingung von  $f(x)$  wie folgt abschätzen.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x - y + y} - \sqrt{y}| \leq |\sqrt{|x - y|} + \sqrt{y} - \sqrt{y}| \leq |x - y|^{\frac{1}{2}}.$$

$f(x) = \sqrt{x}$  ist nicht Lipschitz-stetig, wie folgende Überlegung zeigt:  
 Angenommen, es sei

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} \leq c$$

für alle  $x, y \in [0, 1]$ . Dann wäre  $\frac{\sqrt{x}}{x} \leq c$ . Andererseits ist  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty$ . Dies ist ein Widerspruch und  $f(x) = \sqrt{x}$  ist nicht lipschitzstetig, sondern nur hölderstetig.

b) Ein Beispiel für eine lipschitzstetige Funktion ist die Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k, \quad \bar{\Omega} = [a, b], \quad a > 0 \quad \text{o.B.d.A.}$$

Mit dem Mittelwertsatz und geeignetem  $\xi$  ergibt sich:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k k \xi^{k-1} \right| |x - y|.$$

Mit  $\lambda = 1$  ist ein Polynom lipschitzstetig.

### 4.2.4.4 Weitere mengentheoretische Zusammenhänge auf den Räumen der stetigen Funktionen

Bis jetzt wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} C(\bar{\Omega}) &\subset C(\Omega), \\ C^{0,1}(\bar{\Omega}) &\subseteq C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega), \\ C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) &\subseteq C(\bar{\Omega}) \quad (\text{Satz 4.17}). \end{aligned}$$

Es entsteht die Frage, ob auch  $C(\bar{\Omega})$  echt in  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  enthalten ist. Dies wird durch folgenden Satz beantwortet.

**Satz 4.23.** *Aus der gleichmäßigen Stetigkeit folgt nicht zwingend die Hölderstetigkeit.*

*Beweis.* Es sei  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \in [-\frac{1}{2}, 0], \\ -\frac{1}{\ln x} & \text{für alle } x \in (0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$

Zunächst führen wir eine Stetigkeitsuntersuchung in  $x = 0$  durch:

$$\lim_{0 > x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{0 < x \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln x}, \quad \text{denn } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Da  $f(x)$  auf dem Kompaktum  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  stetig ist, ist  $f(x)$  dort auch gleichmäßig stetig.

Wir betrachten die Hölderbedingung für  $x = -\varepsilon$  und  $y = \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ :

$$\frac{-1}{\ln \varepsilon} = |f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)| \leq c |\varepsilon - (-\varepsilon)|^\lambda = c (2\varepsilon)^\lambda.$$

Division durch  $(2\varepsilon)^\lambda$  und Limesbildung ergibt:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^{-\lambda} \varepsilon^{-\lambda}}{-\ln \varepsilon} \leq c$ .

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt  $\varepsilon^{-\lambda} \rightarrow \infty$  und  $(-\ln \varepsilon) \rightarrow \infty$ . Damit tritt der Fall  $\frac{\infty}{\infty}$  ein, der mit dem Satz von l'Hospital behandelt wird:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^{-\lambda} \varepsilon^{-\lambda}}{-\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2^{-\lambda} (-\lambda) \varepsilon^{-\lambda-1}}{-\varepsilon^{-1}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{-\lambda} \lambda \varepsilon^{-\lambda} = \infty < c.$$

Dies ist ein Widerspruch zu  $c = \text{const} < \infty$ . □

Durch dieses Ergebnis erhält man folgende mengentheoretische Ordnung

$$C^{0,1}(\bar{\Omega}) \subseteq C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega}) \subset C(\Omega), \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

### 4.3 Einführung von Normen

Im Folgenden soll überprüft werden, mit Hilfe welcher Normen die drei Funktionenräume zu Banachräumen werden, denn die Vollständigkeit eines linearen, normierten Raumes  $(E, \|\cdot\|)$  hängt von der Norm ab.

Es wird sich ferner zeigen, dass keiner der drei Räume ein Hilbertraum ist.

#### 4.3.1 $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ auf $C(\bar{\Omega})$

Die Überprüfung der Normaxiome bezüglich der Supremumnorm  $\|f\|_{\mathcal{F}} := \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})|$ ,

Positivität:  $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})| > 0$  für  $f \not\equiv 0$  und  $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})| = 0$  für  $f \equiv 0$ ,

Homogenität:  $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\alpha \mathbf{x})| = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (|\alpha| |f(\mathbf{x})|) = |\alpha| \|f\|_{\mathcal{F}}$ ,

Dreiecksungleichung:  $\|f + g\|_{\mathcal{F}} \leq \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (|f(\mathbf{x})| + |g(\mathbf{x})|) \leq \|f\|_{\mathcal{F}} + \|g\|_{\mathcal{F}}$ ,

zeigt deren Erfüllung auf  $C(\bar{\Omega})$ .

Der nun folgende Satz erleichtert spätere Beweise.

**Satz 4.24.** Die Konvergenz bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  entspricht der gleichmäßigen Konvergenz.

*Beweis.* Für die eine Richtung gelte  $\|f_n - f\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$  für eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(\bar{\Omega})$ . Dann kann die Differenz der beiden Funktionen in der Norm durch die Supremumbildung so abgeschätzt werden, dass diese Majorante nur noch von  $n$  abhängt.

Dabei kann ein  $n$  so gefunden werden, dass  $\|f_n - f\|_{\mathcal{F}} \leq r(n) < \varepsilon$  gilt, wobei  $r(n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Somit gilt  $\|f_n - f\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$  für alle  $n \geq N(\varepsilon)$ . Dies ist gerade die Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz.

Um die Gültigkeit der anderen Richtung zu zeigen, sei die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig konvergent, also existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N(\varepsilon)$ , sodass für alle  $n \geq N(\varepsilon)$  und für jedes  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  auch  $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$  gilt. Diese Bedingung muss insbesondere für dasjenige  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  gelten, für welches das Supremum, d.h. das Maximum auf  $\bar{\Omega}$ , angenommen wird, daher ist  $\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich die Konvergenz in  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ .  $\square$

Nun kann Folgendes gezeigt werden:

**Satz 4.25.** [15, S.16, Satz 109.5]  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$  ist ein Banachraum.

*Beweis.* Hier ist die Vollständigkeit nachzuweisen.

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $C(\bar{\Omega})$ , dann gilt  $\|f_l - f_n\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$  für alle  $l, n \geq N(\varepsilon)$ , was der gleichmäßigen Konvergenz entspricht. Außerdem existiert  $f(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Für  $l \rightarrow \infty$  erhält man aus  $\|f_l - f_n\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon$  folglich den Ausdruck  $\|f - f_n\|_{\mathcal{F}} \leq \varepsilon$ . Diese Aussage bedeutet aber, dass die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $f$  konvergiert.

Nach Satz 4.9 ist bekannt, dass dies die Stetigkeit der Grenzfunktion zur Folge hat. Diese Grenzfunktion ist stetig auf dem Kompaktum  $\bar{\Omega}$ , woraus die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

Da  $f$  Grenzfunktion von beschränkten Funktionen ist, muss  $f$  auch beschränkt sein. Daher ist  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$  vollständig und somit ein Banachraum.  $\square$

### 4.3.2 Normierung von $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$

Zunächst wird überprüft, wie sich  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  mit der  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ -Norm verhält.

Es wird gezeigt:

$C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  mit  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  ist nicht vollständig.

Zu diesem Zweck wird eine Funktion  $f \in C(\bar{\Omega})$  so gewählt, dass sie die Grenzfunktion einer Funktionenfolge aus  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist. Dies ist möglich, da auf Grund des Approximationsatzes von Weierstraß eine Polynomfolge  $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $\|P_j - f\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$  für  $j \rightarrow \infty$  existiert und es ist bereits gezeigt, dass Polynome Lipschitzstetig sind.

Somit haben wir eine Polynomfolge  $(P_j)_{j \in \mathbb{N}} \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  gefunden, deren Grenzfunktion lediglich in  $C(\bar{\Omega})$  liegt, wodurch  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  mit  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  nicht vollständig ist.

Um  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  zu einem Banachraum machen zu können, ist eine andere Norm nötig, die als Höldernorm bezeichnet wird.

**Definition 4.26 (Höldernorm).** Die Norm

$$\|f\|_{0,\lambda} = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})| + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}$$

wird als Höldernorm bezeichnet.

Wir überprüfen die Normaxiome auf  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ :

Positivität: Klar auf Grund der Beträge in der Normdefinition.

Definitheit: Sie ist gegeben durch die Definitheit der Supremumnorm.

Homogenität: Folgende Gleichung

$$\|\alpha f\|_{0,\lambda} = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (|\alpha| |f(\mathbf{x})|) + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|\alpha| |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} = |\alpha| \|f\|_{0,\lambda}$$

ergibt sich durch Ausnutzung der Homogenität des Betrags.

Dreiecksungleichung:

$$\|f + g\|_{0,\lambda} \leq \|f\|_{0,\lambda} + \|g\|_{0,\lambda}$$

ergibt sich aus der Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die Supremumnorm.

**Satz 4.27.**  $(C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\lambda})$  ist ein Banachraum.

*Beweis.* Um die Banachraumeigenschaft von  $(C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\lambda})$  nachzuweisen, ist die Vollständigkeit zu zeigen. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  eine Cauchyfolge bezüglich der Höldernorm, dann ist

$$\|f_l - f_n\|_{0,\lambda} = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f_l(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f_l(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) - f_l(\mathbf{y}) + f_n(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} < \varepsilon$$

für alle  $l, n > N(\varepsilon)$ . Es existieren daher  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ , sodass

$$\|f_l - f_n\|_{\mathcal{F}} < \varepsilon_1, \text{ sowie } \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f_l(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}) - f_l(\mathbf{y}) + f_n(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} < \varepsilon_2 \text{ gilt.}$$

Aus der ersten Ungleichung folgt analog zum Beweis von Satz 4.25 mit dem Cauchyschen Konvergenzkriterium die gleichmäßige Konvergenz der Cauchyfolge, sowie die Existenz einer Grenzfunktion  $f(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x})$  in  $C(\bar{\Omega})$ . Im Folgenden muss gezeigt werden, dass die Grenzfunktion  $f$  sogar ein Element von  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist.

Der Ausdruck  $\|f\|_{0,\lambda} = \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |f(\mathbf{x})| + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}$  wird nach unten abgeschätzt:

$$\|f\|_{0,\lambda} \geq \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}.$$

Die obere Abschätzung

$$\|f\|_{0,\lambda} = \|f - f_n + f_n\|_{0,\lambda} \leq \|f - f_n\|_{0,\lambda} + \|f_n\|_{0,\lambda} \leq \varepsilon + c$$

kann angewendet werden, da  $\|f - f_n\|_{0,\lambda} \rightarrow 0$  gilt und eine Funktion  $f_n \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  eine endliche Norm haben muss. Durch die Multiplikation beider Ungleichungsseiten mit  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda$  ergibt sich schließlich die Hölderbedingung für  $f$ :

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda.$$

Daher ist  $(C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\lambda})$  ein Banachraum. □

### 4.3.3 Der Problemfall $C(\Omega)$

Alle Versuche,  $C(\Omega)$  zu normieren, schlagen fehl, da für einen normierten Raum die Ungleichung  $\|f\| = c < \infty$  zu fordern ist.  $C(\Omega)$  enthält aber auch unbeschränkte Funktionen, sodass die Norm keinen endlichen Wert annehmen muss.

Man möchte aber gerne den Abstand von Funktionen aus  $C(\Omega)$  bestimmen. Die Lösung hierfür bringt die Einführung einer besonderen Metrik auf  $C(\Omega)$ , für welche die Definition eines Systems von Halbnormen nötig ist:

$$(\|f\|_j)_{j \in \mathbb{N}} := \left( \sup_{\mathbf{x} \in K_j} |f(\mathbf{x})| \right)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Die  $K_j$  bilden eine Folge von Kompakta, die eine Intervallschachtelung in  $\Omega$  mit

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega \text{ und } \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

ergeben. Die Metrik selbst ist dann gegeben durch:

$$d(f, g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g\|_j}{1 + \|f - g\|_j} .$$

Die Bezeichnung „Halbnorm“ wird an folgender Skizze deutlich:

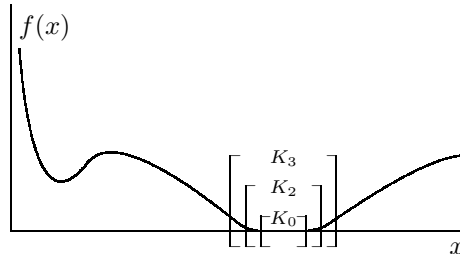


Abbildung 4.2: Erläuterung zu Halbnormen

$\Omega$  wird durch eine Intervallschachtelung der Kompakta  $K_j$  angenähert. Dabei kann es passieren, dass eine im Definitionsbereich von der Nullfunktion verschiedene Funktion  $f$  auf einem Kompaktum  $K_j$  (hier  $K_0$ ) der Nullfunktion  $f \equiv 0$  entspricht. Man erhält  $\|f\|_j = 0$  (hier  $K_0$ ) trotz  $f \neq 0$ , wodurch die Definitheit der Norm verletzt wird und daher kann  $\|f\|_j$  keine Norm sein. Es bleibt zu zeigen, dass die oben definierte Metrik die Metrikaxiome auf  $C(\Omega)$  erfüllt:

Positivität: Klar, da über  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  summiert wird. Es gilt  $d(f, g) \geq 0$  und  $d(f, f) = 0$ .

Symmetrie: Sie ist auf Grund der Betragsbildung gegeben, also gilt  $d(f, g) = d(g, f)$ .

Dreiecksungleichung: ([17, S.14])

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - h + h - g\|_j}{1 + \|f - h + h - g\|_j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left( \frac{\|f - h\|_j}{1 + \|f - h + h - g\|_j} + \frac{\|h - g\|_j}{1 + \|f - h + h - g\|_j} \right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - h\|_j}{1 + \|f - h\|_j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|h - g\|_j}{1 + \|h - g\|_j} \\ &= d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Nun wird die Vollständigkeit von  $(C(\Omega), d(\cdot, \cdot))$  überprüft:

Für eine Cauchyfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(\Omega)$  gilt  $\|f_l - f_n\|_j < \varepsilon$  für alle  $l, n \geq N$  auf jedem Kompaktum  $K_j$ . Hieraus folgt wie im Beweis von Satz 4.25 die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge und die Existenz einer Grenzfunktion  $f$  für jedes Kompaktum  $K_j$ . Konvergiert die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C(\Omega)$  gegen die Grenzfunktion  $f$ , so muss folglich  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_j = 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  gelten. Dieser Sachverhalt entspricht der gleichmäßigen Konvergenz auf allen Kompakta  $K_j$ , was zur Stetigkeit von  $f$  auf allen  $K_j$  führt. Durch  $\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$  gilt  $f \in C(\Omega)$ .

**Folgerung 4.28.**  $C(\Omega)$  ist mit  $d(\cdot, \cdot)$  metrisierbar und vollständig, bildet also einen Fréchetraum. Er ist aber nicht normierbar und daher weder ein Banach- noch ein Hilbertraum.

### 4.3.4 Untersuchung der Hilbertraumeigenschaft von $C(\bar{\Omega})$ und $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$

**Satz 4.29.**  $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$  ist kein Hilbertraum, d.h. durch  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  wird kein Skalarprodukt induziert.

*Beweis.* Es ist die Gültigkeit der Parallelogrammgleichung zu überprüfen:

$$\|f + g\|_{\mathcal{F}}^2 + \|f - g\|_{\mathcal{F}}^2 = 2\|f\|_{\mathcal{F}}^2 + 2\|g\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Man wähle  $f(x) = c > \frac{1}{2}$  und  $g(x) = x$  mit  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , dann folgt  $2c^2 + 2c + 1 \neq 2c^2 + 2$ .

Die Parallelogrammgleichung ist demnach nicht für alle Funktionen  $f, g \in C(\bar{\Omega})$  erfüllt. Daher kann  $C(\bar{\Omega})$  kein Hilbertraum sein.  $\square$

Zum analogen Ergebnis kommt man für  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ .

**Satz 4.30.**  $(C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\lambda})$  ist kein Hilbertraum.

*Beweis.* Die Beweismethode ist die gleiche wie bei Satz 4.29:

Man wähle diesmal  $f(x) = c > 1$  und  $g(x) = x$  mit  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ , dann folgt für die zugelassenen Werte  $c$

$$\|f + g\|_{0,\lambda}^2 + \|f - g\|_{0,\lambda}^2 = 2c^2 + 6c + 5 \neq 2\|f\|_{0,\lambda}^2 + 2\|g\|_{0,\lambda}^2 = 2c^2 + 8.$$

Dies führt offensichtlich zu einem Widerspruch und somit ist  $(C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{0,\lambda})$  kein Hilbertraum.  $\square$

### 4.3.5 Allgemeines über Normen

Im Folgenden werden Definitionen eingeführt, die den Vergleich verschiedener Normen eines Vektorraums ermöglichen. Dies soll anschließend auf  $C(\bar{\Omega})$  ausprobiert werden.

**Definition 4.31.** Die Norm  $\|\cdot\|$  auf einem Vektorraum  $E$  ist genau dann stärker als die zweite Norm  $\|\cdot\|'$  auf  $E$ , wenn ein  $\mu > 0$  existiert, sodass:

$$\|x\|' \leq \mu \|x\| \quad \text{für alle } x \in E.$$

Diese Definition ist gleichbedeutend mit: Für eine konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$  gelte  $\|x_n - x\|' \leq \mu \|x_n - x\| \rightarrow 0$ , so führt dies zu  $\|x_n - x\|' \rightarrow 0$ .

**Definition 4.32.**  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  sind äquivalent auf  $E$ , wenn es  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  gibt mit  $0 < \gamma_i < \infty$ , sodass gilt:

$$\gamma_1 \leq \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leq \gamma_2 \quad \text{für alle } x \in E.$$

Anders formuliert lautet diese Definition: Jede der beiden Normen ist stärker als die andere, denn

$$\|x\| \leq \frac{1}{\gamma_1} \|x\|' \quad \text{und} \quad \|x\|' \leq \gamma_2 \|x\| \quad \text{für alle } x \in E.$$

#### 4.3.5.1 Beispiel für äquivalente Normen auf $C(\bar{\Omega})$

Es sei die Norm 1 :  $\|f\|_{\mathcal{F}}$

und die Norm 2 :  $\|f\|_g := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x) e^{-\gamma x}|$  (gewichtete Norm),  $\gamma > 0$ ,

und für beide Normen gelte  $\bar{\Omega} = [a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  (o.B.d.A.), dann findet man

$$e^{-\gamma b} \|f\|_{\mathcal{F}} \leq \|f\|_g \leq e^{-\gamma a} \|f\|_{\mathcal{F}}.$$

### 4.3.5.2 Beispiel für die unterschiedliche Konvergenz zweier verschiedener Normen auf $C(\bar{\Omega})$

Es sei die Norm 1 :  $\|f\|_{\mathcal{F}}$

und die Norm 2 :  $\|f\|_{L_p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $L_p(\Omega)$  – Norm

und für beide Normen gelte  $\bar{\Omega} = [a, b] \subset \mathbb{R}$  mit  $0 < a < b$  (o.B.d.A.).

Zunächst soll gezeigt werden, dass  $\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \mu \|f\|_{\mathcal{F}}$  gilt, was mit Hilfe der Abschätzung

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} \|f\|_{\mathcal{F}}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = (b-a) \|f\|_{\mathcal{F}} \text{ geschieht.}$$

Andererseits sieht man an einem Gegenbeispiel, dass  $\|f\|_{\mathcal{F}} \leq \lambda \|f\|_{L_p(\Omega)}$  nicht gilt.

Hierfür wählen wir  $f_n(x) = x^n$  und  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ . Es ist  $\|f_n\|_{\mathcal{F}} = 1$ . Jedoch gilt

$$\|f_n\|_{L_p(\Omega)}^p = \int_0^1 x^{np} dx = \frac{1}{np-1} x^{np-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{np-1} \rightarrow 0.$$





# Kapitel 5

## Räume stetiger Funktionen II

AUSGEARBEITET VON KATRIN GRAU

### 5.1 Separabler Raum: $C^0(\bar{\Omega})$

#### 5.1.1 Vorbereitungen

Nachdem in Kapitel 4 die verschiedenen Räume stetiger Funktionen mit ihren Normen eingeführt wurden, werden wir uns nun etwas genauer mit der Eigenschaft der Separabilität beschäftigen und untersuchen, ob die Räume separabel sind oder nicht.

#### Satz von Weierstrass im $\mathbb{R}$

**Satz 5.1.** *Ist  $f(x)$  eine beliebige, in einem abgeschlossenen Intervall  $a \leq x \leq b$  stetige Funktion, so lässt sich eine Folge von Polynomen  $P_1(x), P_2(x), \dots$  konstruieren, die im ganzen abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert.*

Der Beweis dieses Satzes ist eine Zusammenfassung des Beweises aus dem Buch [23, S. 404, Satz I].

*Beweis.* Der Beweis gliedert sich in drei Schritte.

#### 1. Transformation des Intervalls

Das Intervall  $[a, b]$  wird durch die Transformation  $x^* = \frac{x-a}{b-a}$  auf das Intervall  $[0, 1]$  abgebildet.

#### 2. Konstruktion der Polynome

Wir betrachten den Binomischen Lehrsatz

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} u^m v^{n-m} = (u+v)^n. \quad (5.1)$$

Wir differenzieren (5.1) nach  $u$  und multiplizieren anschließend (5.1) mit  $u$ . Dadurch erhalten wir

$$\sum_{m=0}^n m \binom{n}{m} u^m v^{n-m} = nu(u+v)^{n-1}. \quad (5.2)$$

Wir wiederholen die gleichen Rechenschritte (nach  $u$  differenzieren und mit  $u$  multiplizieren) und erhalten Folgendes:

$$\sum_{m=0}^n m^2 \binom{n}{m} u^m v^{n-m} = nu(nu+v)(u+v)^{n-2}. \quad (5.3)$$

Um auf die eigentliche Variable  $x$  zu kommen, setzen wir in (5.1)  $u = x, v = 1 - x$  und erhalten

$$1 = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}. \quad (5.4)$$

Als nächsten Schritt verbinden wir einige unserer bisherigen Ergebnisse ((5.1) + (5.2) + (5.3)), wobei wieder  $u = x, v = 1 - x$  gesetzt wird

$$\begin{aligned} n^2 x^2 \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} u^m v^{n-m} + (-2nx) \sum_{m=0}^n m \binom{n}{m} u^m v^{n-m} + \sum_{m=0}^n m^2 \binom{n}{m} u^m v^{n-m} \\ = n^2 x^2 (u+v)^n + (-2nx) nu(u+v) + nu(u+v)^{n-2}, \end{aligned}$$

was auf folgende Gleichung

$$\sum_{m=0}^n (m - nx)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} = nx(1-x) \quad (5.5)$$

führt.

Um die rechte Seite von (5.5) abschätzen zu können, führen wir eine Extremwertbetrachtung für  $nx(1-x)$  mit folgendem Ergebnis durch:

$$0 \leq nx(1-x) \leq \frac{1}{4}n.$$

Somit können wir (5.5) nach oben abschätzen

$$\sum_{m=0}^n (m - nx)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \leq \frac{1}{4}n. \quad (5.6)$$

Wir definieren uns nun die Polynome

$$P_n(x) := \sum_{m=0}^n f\left(\frac{m}{n}\right) \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}. \quad (5.7)$$

### 3. Überprüfung der Konvergenz

Wir untersuchen, ob die definierten Polynome gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergieren. Dazu müssen wir  $f(x) - P_n(x)$  betrachten.

Wir multiplizieren Gleichung (5.4) mit  $f(x)$  und subtrahieren Gleichung (5.7)

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{m=0}^n \left[ f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}.$$

Wir müssen zeigen, dass

$\left| \sum_{m=0}^n \left[ f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \right| < \varepsilon$  für  $n > N_0$  ist, wobei  $\varepsilon$  nicht von  $x$  abhängen darf.

Um dies zu erreichen, verwenden wir die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^n \left[ f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right] \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \right| \\ & \leq \sum_{m=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \stackrel{!}{<} \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aus dem Satz 4.10 folgt, dass  $f(x)$  gleichmäßig stetig ist, d.h. es existiert ein  $\delta$ , so dass  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$  ist für alle  $|x_1 - x_2| < \delta$ .

Sei  $x$  nun fest. Wir zerlegen (5.8) in zwei Teilsommen, die wir getrennt betrachten. Zu  $S_1$  gehören alle Summanden, für die  $|x - \frac{m}{n}| < \delta$  gilt. Wir wissen also:

$$\begin{aligned} S_1 & < \sum_{(I)} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \leq \sum_{m=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ & = \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}}_{=1 \text{ nach (5.4)}}, \end{aligned}$$

wobei (I) angibt, dass sich die Summe über die Summanden erstreckt, die der Ungleichung  $|x - \frac{m}{n}| < \delta$  genügen.

Dies bedeutet

$$S_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Summanden von  $S_2$ , unter (II) zusammengefasst, genügen der Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| x - \frac{m}{n} \right| \geq \delta, \\ & |nx - m| \geq n\delta, \\ & \frac{|nx - m|^2}{n^2\delta^2} \geq 1. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Weierstrass (Auf einem kompakten Intervall nimmt eine stetige Funktion ihr Extremum an.) gilt  $|f(x)| \leq M$  und somit

$$\left| f(x) - f\left(\frac{m}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{m}{n}\right) \right| \leq 2M.$$

Wir multiplizieren die Glieder von  $S_2$  mit  $\frac{|nx-m|^2}{n^2\delta^2} \geq 1$  und schätzen sie ab durch

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{(II)} \frac{(nx-m)^2}{n^2\delta^2} 2M \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &= \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{(II)} (nx-m)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} \\ &\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{m=0}^n (nx-m)^2 \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir (5.6) und erhalten

$$S_2 \leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \cdot \frac{1}{4}n = \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Wir wollen zeigen, dass  $S_2 < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Dies ist sicherlich der Fall, wenn  $\frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ , d.h.  $n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$  ist.

Anhand dieser Information definieren wir

$$N_0 := n > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$$

und wissen daher

$$S_1 + S_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit konvergieren die Polynome gleichmäßig gegen die stetige Funktion  $f(x)$ .

□

### 5.1.1.1 Polynome im $\mathbb{R}^N$ , Multiindices

Wir wollen der Frage nachgehen, wie man Polynome im  $\mathbb{R}^N$  beschreibt. Sei  $\dim \mathbb{R}^N := N$  und der Grad der Polynome  $:= n$ . Ein Polynom im  $\mathbb{R}^N$  kann durch

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \mathbf{x}^\alpha$$

dargestellt werden, wobei  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_N) =$  ein Multiindex ist, für den  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$  und  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$  gilt.

### Verallgemeinerung von Weierstrass für den $\mathbb{R}^N$

**Bemerkung 5.2.** Sei  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein Polynom

$$P_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \alpha_n \mathbf{x}^\alpha,$$

so dass  $\|u - P_n\| < \varepsilon$  gilt, wobei  $n$  der Grad der Polynome ist.

### 5.1.2 Der Raum $C^0(\bar{\Omega})$ ist separabel

**Satz 5.3.** *Der Raum  $C^0(\bar{\Omega})$  ist separabel.*

Der Beweis ist [16, S. 30] entnommen.

*Beweis.* Der Satz von Weierstrass liefert Polynome mit reellen Koeffizienten. Diese Menge liegt dicht in  $C^0(\bar{\Omega})$ . Da diese Menge nicht abzählbar ist, muss man versuchen, die Polynome mit reellen Koeffizienten durch solche mit rationalen Koeffizienten zu ersetzen, die dann dicht und abzählbar sind und somit  $C^0(\bar{\Omega})$  zu einem separablen Raum machen.

Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $P_n$  die im Abschnitt 5.1.1.1 definierten Polynome und  $\chi = \chi_N(n)$  die Anzahl der verschiedenen Koeffizienten des Polynoms  $P_n$ . Sei  $d$  eine positive Zahl, so dass  $\bar{\Omega}$  durch den  $N$ -dimensionalen Würfel  $C_d = [-d, d]^N$  beschränkt ist. Für jeden Koeffizienten  $a_\alpha$  von  $P_n$  existiert eine rationale Zahl  $r_\alpha$ , so dass

$$|a_\alpha - r_\alpha| < \frac{\varepsilon}{\chi d^{|\alpha|}},$$

wobei  $|\alpha| \leq n$  ist.

Daher gilt für  $Q_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} r_\alpha \mathbf{x}^\alpha$

$$\begin{aligned} |P_n(\mathbf{x}) - Q_n(\mathbf{x})| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq n} (a_\alpha - r_\alpha) \mathbf{x}^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq n} |a_\alpha - r_\alpha| \mathbf{x}^\alpha \\ &< \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{\varepsilon}{\chi d^{|\alpha|}} \cdot d^{|\alpha|} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{\varepsilon}{\chi}. \end{aligned}$$

$\chi$  ist genau die Anzahl der verschiedenen Kombinationen von  $\alpha$ . Also wissen wir

$$\sum_{|\alpha| \leq n} \frac{\varepsilon}{\chi} \leq \varepsilon.$$

Wir wissen bereits  $\|u - P_n\| < \varepsilon$ :

$$\|u - Q_n\| \leq \|u - P_n\| + \|P_n - Q_n\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Daraus folgt, dass die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht in  $C^0(\bar{\Omega})$  liegt. Wir haben eine abzählbare dichte Teilmenge gefunden und somit nachgewiesen, dass der Raum  $C^0(\bar{\Omega})$  separabel ist. □

## 5.2 Nicht separabler Raum: $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$

### 5.2.1 Vorbereitungen

**Wiederholung von  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  und der Norm**

Zunächst wollen wir die Definitionen von  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  und der Norm aus Kapitel 4 wiederholen.

**Definition 5.4.** Eine Funktion  $u$  ist genau dann in  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ ,  $\lambda \in (0, 1]$ , wenn

$$u \in C^0(\bar{\Omega}) \text{ und } H_{0,\lambda}(u) = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} < \infty.$$

**Definition 5.5.** Die Norm auf  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist wie folgt definiert

$$\|u\|_{0,\lambda} = \|u\|_0 + \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}.$$

### Satz über Nichtseparabilität

**Satz 5.6.** Sei  $M$  eine überabzählbare Teilmenge eines normierten linearen Raumes  $X$ . Falls ein  $\delta > 0$  existiert, für das  $\|u - v\| > \delta$  für jedes Paar  $u, v \in M$  mit  $u \neq v$  gilt, so ist  $X$  nicht separabel.

Dieser Satz soll hier nur veranschaulicht werden. Ein genauer Beweis ist im Kapitel 8, Satz 8.7 zu finden.

Wir nehmen an, wir hätten eine überabzählbare Menge  $M \subset X$ , welche die oben genannte Eigenschaft hat. Dazu nehmen wir an, wir hätten eine dichte Menge  $D$ , also  $\bar{D} = X$  und  $D$  ist abzählbar. Wir wissen, dass die Elemente von  $D$  an alle Elemente von  $M$  beliebig nahe kommen, d.h. der Abstand beliebig klein ( $\varepsilon$ ) wird, da sie alle Elemente von  $X$  approximieren müssen. Zudem wissen wir, dass alle Elemente von  $M$  mindestens einen Abstand von  $\delta$  haben müssen. Da es aber mehr Elemente von  $M$  gibt als von  $D$ , muss mindestens ein Element von  $D$  für zwei Elemente von  $M$  „reichen“. Das heißt aber, dass  $2\varepsilon > \delta$  sein muss, was ein Widerspruch zu  $\varepsilon$  beliebig klein ist.

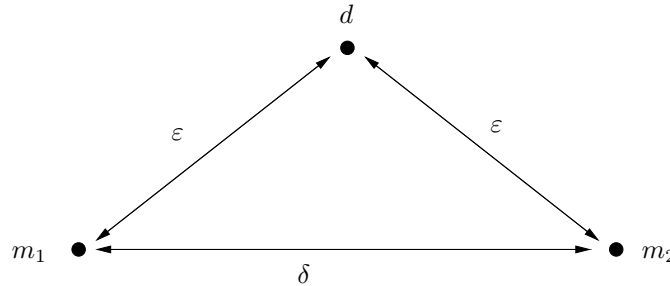


Abbildung 5.1: Abstände der Elemente von  $M$  und  $D$

### 5.2.2 Der Raum $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$ ist nicht separabel

**Satz 5.7.** Der Raum  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist nicht separabel.

Der Beweis ist größtenteils aus [16, S. 32], wobei der Nachweis, dass die Funktionen  $u_a$  in  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  sind, dort nicht zu finden ist.

*Beweis.* Für einen Widerspruchsbeweis reicht es aus, wenn wir  $N = 1$ ,  $\Omega = (0, 1)$  betrachten. Wir definieren für  $a \in (0, 1)$  die Funktion

$$u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, a], \\ (x - a)^\lambda & \text{für } x \in (a, 1]. \end{cases}$$

Wir müssen zunächst zeigen, dass die oben definierten Funktionen auch wirklich eine Teilmenge  $M$  des Raumes  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  sind. Auf den Nachweis der Stetigkeit soll verzichtet werden, wir wollen nur nachprüfen, ob

$$H_{0,\lambda}(u_a) = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u_a(x) - u_a(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty$$

erfüllt ist. Dies ist der Fall, wenn wir zeigen können, dass

$$|u_a(x) - u_a(y)| \leq k \cdot |x - y|^\lambda, k < \infty$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt  $x > y$ . Wir wollen nun drei Fälle unterscheiden.

1. **Fall:**  $x, y < a$  Wir setzen ein, welche Funktionswerte  $u_a$  annehmen kann und können als Konstante  $k = 1$  wählen, da dann die Ungleichung

$$|0 - 0| \leq 1 \cdot |x - y|^\lambda$$

erfüllt ist.

2. **Fall:**  $y \leq a < x$  Wir setzen wieder die Funktionswerte ein

$$\begin{aligned} |(x - a)^\lambda - 0| &\leq k \cdot |x - y|^\lambda, \\ |(x - a)^\lambda| &\leq k \cdot |x - y|^\lambda \end{aligned}$$

und erkennen, dass auch diese Ungleichung für  $k = 1$  erfüllt ist, da  $y < a$  ist.

3. **Fall:**  $a < y < x$  Auch hier beginnt man mit dem Einsetzen der Funktionswerte

$$|(x - a)^\lambda - (y - a)^\lambda| \leq k \cdot |x - y|^\lambda.$$

Wir können nicht sofort erkennen, ob dies erfüllt ist. Wir formen die Ungleichung um und erhalten

$$0 \leq k \cdot (x - y)^\lambda - (x - a)^\lambda + (y - a)^\lambda.$$

Wir betrachten nun

$$f(x) := k \cdot (x - y)^\lambda - (x - a)^\lambda + (y - a)^\lambda, \quad (5.9)$$

wobei  $y$  fest sein soll. Aus (5.9) folgt  $f(y) = 0$ . Können wir nun zeigen, dass  $f'(x) \geq 0$  ist für  $x > y$ , so sind wir fertig, da dann alle Funktionswerte positiv oder gleich Null sind. Wir berechnen

$$f'(x) = k \cdot \lambda \cdot (x - y)^{\lambda-1} - \lambda \cdot (x - a)^{\lambda-1}.$$

Es ist  $f'(x) \geq 0$ , falls

$$k \geq \left( \frac{x - a}{x - y} \right)^{\lambda-1}.$$

Betrachten wir zunächst den Exponenten  $\lambda - 1$ . Es gilt  $\lambda - 1 \leq 0$ , da  $\lambda \in [0, 1]$  ist. Der Bruch  $\left( \frac{x - a}{x - y} \right)$  ist größer als 1 und somit kann  $k$  sogar 1 gewählt werden!

Also muss  $u_a \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  gelten.

Nun müssen wir noch zeigen, dass für diese Teilmenge  $M$  ein  $\delta$  gefunden werden kann, so dass  $\|u - v\|_{C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})} > \delta$  für jedes Paar  $u, v \in M$  mit  $u \neq v$  gilt.

Wie im Folgenden gezeigt wird, gilt  $\|u_a - u_b\| \geq 1$  für  $a, b \in (0, 1)$ . Sei  $w := u_a - u_b$  und  $a < b$ , dann folgt

$$H_{0,\lambda}(w) = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|w(x) - w(y)|}{|x - y|^\lambda} \geq \frac{|w(b) - w(a)|}{|b - a|^\lambda}.$$

Wir wollen  $|w(b) - w(a)|$  genauer betrachten:

$$\begin{aligned} |w(b) - w(a)| &= |u_a(b) - u_b(b) - u_a(a) + u_b(a)| \\ &= \left| (b-a)^\lambda - 0 - 0 + 0 \right| \\ &= |b-a|^\lambda. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{|b-a|^\lambda}{|b-a|^\lambda} = 1.$$

Da  $H_{0,\lambda}(w)$  nur der zweite Summand der Norm ist, der andere Summand  $\|u\|_0$  aber auf jeden Fall größer oder gleich Null ist, können wir  $\delta = 1$  wählen. Damit ist die Voraussetzung des Satzes über Separabilität erfüllt, eine überabzählbare Menge  $M$  und ein  $\delta > 0$  zu finden, für das  $\|u - v\| > \delta$  für jedes Paar  $u, v \in M$  mit  $u \neq v$  gilt.

Daraus folgt  $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist nicht separabel. □



# Kapitel 6

## Räume stetig differenzierbarer Funktionen

AUSGEARBEITET VON CHRISTIAN BEUG

### Einleitung

Wir werden uns in diesem Kapitel mit Räumen beschäftigen, deren Funktionen bis zu einem gewissen Grad stetig differenzierbar sind. Um die Wichtigkeit dieser Räume zu verdeutlichen, werden wir zu Beginn Beispiele aufzeigen, in denen eine erste Anwendung deutlich wird.

### 6.1 Motivation und Hinführung zum Thema

**Beispiel 6.1.** [26, S.3] Ein Körper wird in einem luftleeren Raum, aus der Ruhe heraus, zum Zeitpunkt  $t = 0$  fallen gelassen. Dabei treten folgende Funktionen auf

$s(t)$  := Funktion, die angibt, welchen Weg der Körper zum Zeitpunkt  $t$  zurückgelegt hat,

$s'(t)$  := Funktion, die die zur Zeit  $t$  herrschende Momentangeschwindigkeit angibt,

$s''(t)$  := Funktion, die die zur Zeit  $t$  herrschende Beschleunigung angibt.

Es gelten die folgenden Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} s(0) &= 0, \\ s'(0) &= 0, \\ s''(t) &= g, \quad \text{mit der Erdbeschleunigung } g := 9.8 \frac{m}{s^2}. \end{aligned}$$

Also gilt es folgende gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung zu lösen

$$s''(t) = g.$$

Die Lösung lautet:

$$\begin{aligned} s'(t) &= gt + C_1, \\ s(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2. \end{aligned}$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein und erhalten schließlich die Weg-Zeit-Funktion

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Die Funktion  $s(t)$  muss also in einem Raum enthalten sein, dessen Funktionen mindestens zweimal stetig differenzierbar sind. Verallgemeinern wir dies auf gewöhnliche Differentialgleichungen  $k$ -ter Ordnung, müssen folglich die Lösungsfunktionen in Räumen enthalten sein, deren Funktionen mindestens  $k$ -mal stetig differenzierbar sind.

**Beispiel 6.2.** Nun betrachten wir partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, wie zum Beispiel die Potentialgleichung im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{mit} \quad u = u(x, y, z).$$

Hier erkennen wir, dass die Funktion  $u$ , in einem Raum enthalten sein muss, dessen Funktionen mindestens zweimal stetig partiell differenzierbar sind.

**Beispiel 6.3.** In der Distributionentheorie wird den Ableitungsbegriff verallgemeinert. Dort treten Testfunktionen  $g$  auf, die im Raum  $C_0^\infty(\Omega)$  enthalten sein müssen, d.h. in einem Teilraum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen.

### 6.1.1 Wiederholung

Im Folgenden werden wir kurz auf die Schreibweise von partiellen Ableitungen in Verbindung mit Multiindices eingehen.

#### 6.1.1.1 Multiindices

- Sei  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ein Multiindex, wobei  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  für  $i = 1, \dots, n$  ist.
- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$  ist der Betrag von  $\alpha$ .
- Für zwei Multiindices  $\alpha, \beta$  gilt:

$$\begin{aligned} - \quad & \alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n), \\ - \quad & \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!, \\ - \quad & \binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}. \end{aligned}$$

#### 6.1.1.2 Partielle Ableitungen

Sei  $f := f(\mathbf{x})$  eine Funktion von  $n$  reellen Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , die  $k$ -mal stetig differenzierbar ist. Dann können die partiellen Ableitungen von  $f$  mit Hilfe von Multiindices geschrieben werden:

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{mit} \quad |\alpha| \leq k.$$

**Beispiel 6.4.** Die Funktion  $f(x, y)$  sei zweimal stetig differenzierbar. Folglich muss  $|\alpha| \leq 2$  sein. Wir wählen also beispielsweise  $\alpha = (1, 1)$  und erhalten

$$D^\alpha f = D^{(1,1)} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial y^1} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

## 6.2 Lineare Strukturen

### 6.2.1 Einführung grundlegender Funktionenräume

In diesem Abschnitt werden wir grundlegende Funktionenräume mit ihren dazugehörigen Normen definieren. Ihre Bedeutung und Anwendung wurde schon in der Einleitung teilweise beschrieben.

**Definition 6.5.** Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Der lineare Raum aller Funktionen, die für  $|\alpha| \leq k$ ,  $k$ -mal stetig differenzierbar sind, wird mit  $C^k(\Omega)$  bezeichnet.

Als nächstes kommen wir zu einem ähnlichen Raum, mit dem Unterschied, dass dieser über einem abgeschlossenen Bereich  $\bar{\Omega}$  definiert ist.

**Definition 6.6.** Die Funktionen  $f$  des Raums  $C^k(\bar{\Omega})$  sind  $k$ -mal stetig differenzierbar auf  $\Omega$  und für  $|\alpha| \leq k$  ist  $D^\alpha f$  auf  $\bar{\Omega}$  stetig fortsetzbar. Das heißt, dass  $D^\alpha f$  in  $C^0(\bar{\Omega})$  enthalten ist. Die Norm auf  $C^k(\bar{\Omega})$  ist folgendermaßen definiert

$$\|f\|_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha f(\mathbf{x})|.$$

In der Literatur findet man auch die Schreibweise  $\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})}$ .

Um den nächsten Raum definieren zu können, müssen wir zuerst festlegen, was unter einer Hölderkonstante zu verstehen ist.

**Definition 6.7.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in (0, 1]$ . Für  $f \in C^k(\bar{\Omega})$  und  $|\alpha| \leq k$  heißt

$$H_{\alpha, \lambda}(f) := \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}$$

Hölderkonstante. Für  $\lambda = 1$  bezeichnen wir sie als Lipschitzkonstante.

Damit können wir den dritten linearen Raum  $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega})$  definieren.

**Definition 6.8.** Der Raum  $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega})$  ist definiert als die Teilmenge aller Funktionen  $f \in C^k(\bar{\Omega})$  für die  $H_{\alpha, \lambda}(f) < \infty$  für alle  $\alpha$ , mit  $|\alpha| = k$  gilt. Die Norm auf  $C^{k, \lambda}(\bar{\Omega})$  ist wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \|f\|_{k, \lambda} &:= \|f\|_k + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha, \lambda}(f) \\ &:= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |D^\alpha f(\mathbf{x})| + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}. \end{aligned}$$

In der Literatur findet man auch die Bezeichnung  $\|f\|_{C^{k, \lambda}(\bar{\Omega})}$ .

*Beweis.* Wir zeigen, dass  $\|f\|_{k, \lambda}$  die Normaxiome erfüllt.

1. Die Positivität ist auf Grund der Beträge gegeben.

Außerdem gilt, wenn  $f \equiv 0$  ist, dann ist auch die Norm  $\|f\|_{k, \lambda} = 0$ .

Sei nun die Norm  $\|f\|_{k, \lambda} = 0$ , dann muss daraus folgen, dass  $f \equiv 0$  ist. Dies ist erfüllt, da die Norm sich aus lauter nicht-negativen Suprema zusammensetzt. Die Norm kann also nur Null werden, wenn die Suprema der einzelnen Summanden gleich Null sind. Folglich muss  $f \equiv 0$  sein.

2. Untersuchung der Homogenität, wobei  $\beta \in \mathbb{R}$  ist:

$$\begin{aligned} \|\beta f\|_{k, \lambda} &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\beta| |D^\alpha f(\mathbf{x})| \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} |\beta| \frac{|D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \\ &\leq |\beta| \|f\|_{k, \lambda}. \end{aligned}$$

3. Überprüfung ob  $\|f\|_{k,\lambda}$  die Dreiecksungleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{k,\lambda} &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} (|D^\alpha f(\mathbf{x})| + |D^\alpha g(\mathbf{x})|) \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \left( \frac{|D^\alpha f(\mathbf{x}) - D^\alpha f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} + \frac{|D^\alpha g(\mathbf{x}) - D^\alpha g(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \right) \\ &\leq \|f\|_{k,\lambda} + \|g\|_{k,\lambda}. \end{aligned}$$

□

Die folgenden beiden Räume finden ihre Anwendung beispielsweise bei der Lösung von Differentialgleichungen. In ihnen wird der Grenzfall, dass die Ableitungsordnung  $k = \infty$  ist, beschrieben.

**Definition 6.9.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , dann wird mit

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

die Menge aller Funktionen bezeichnet, die auf  $\Omega$  unendlich oft stetig differenzierbar sind. Wir definieren also den unendlichen Durchschnitt des Raumes  $C^k(\Omega)$  als den Raum  $C^\infty(\Omega)$ .

Wir übertragen diese Vorgehensweise auf den Raum  $C^k(\bar{\Omega})$ , der sich von  $C^k(\Omega)$  nur durch den Bereich, auf dem er definiert ist, unterscheidet.

**Definition 6.10.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , dann wird mit

$$C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\bar{\Omega})$$

die Menge aller Funktionen bezeichnet, die auf  $\bar{\Omega}$  unendlich oft stetig differenzierbar sind.

Für den letzten Raum, den wir einführen, müssen wir zuerst definieren, was unter einem Träger zu verstehen ist.

**Definition 6.11.** Sei  $f$  eine Funktion auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , dann heißt

$$\text{supp} f := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega, f(\mathbf{x}) \neq 0\}}$$

der Träger von  $f$ .

Was anschaulich unter einem Träger zu verstehen ist, soll in Beispiel 6.13 unter anderem deutlich gemacht werden.

Nun können wir den letzten Raum  $C_0^k(\Omega)$  definieren.

**Definition 6.12.** Sei  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ , dann definieren wir den Raum  $C_0^k(\Omega)$  als die Menge aller Funktionen  $f \in C^k(\Omega)$ , deren Träger kompakte Teilmengen von  $\Omega$  sind.

**Beispiel 6.13.** Dieses Beispiel dient der Veranschaulichung, der bisher definierten Räume.

Sei  $f$  gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-|\mathbf{x}|^2}\right) & \text{für } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

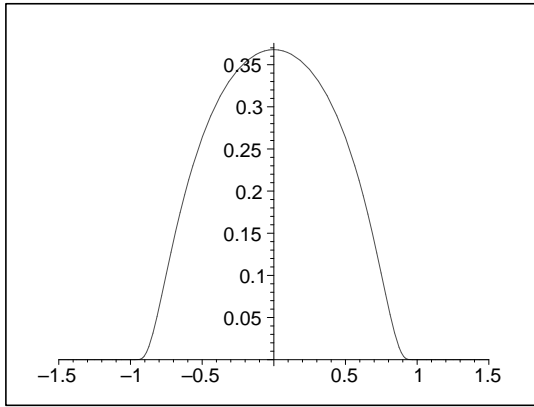
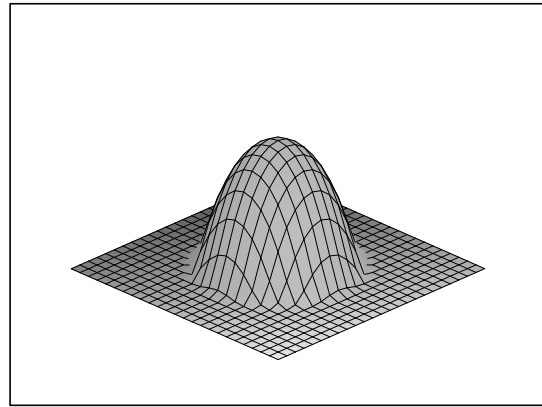
wobei  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ist (Vergleiche Abb. 6.1 und 6.2).

Die Funktion  $f$  ist für  $x \in \mathbb{R}$  im Intervall  $(-1, 1)$  ungleich Null. Da der Träger als Abschluss definiert ist erhalten wir  $\text{supp} f = [-1, 1]$ .

Wir überlegen, dass  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist.

Wir zeigen zuerst, dass  $f$  für  $x \in \mathbb{R}$  unendlich oft stetig differenzierbar ist. Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  verläuft der Beweis analog.

Um dies zu zeigen, machen wir eine Fallunterscheidung.

Abbildung 6.1: Funktion  $f$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ .Abbildung 6.2: Funktion  $f$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$ .

- 1.
- $|x| > 1$
- :

Ist erfüllt, da  $f$  identisch Null ist und somit unendlich oft stetig differenzierbar.

- 2.
- $|x| < 1$
- :

Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen.

$$f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) \left(\frac{-2x}{(1-|x|^2)^2}\right),$$

$$f''(x) = \left(\frac{-8x^2}{(1-x^2)^3} - \frac{2}{(1-x^2)^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right).$$

Es wird deutlich, dass der Term  $\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)$  sich in jeder folgenden Ableitung wiederholt. Somit ist  $f$  auch in diesem Bereich unendlich oft stetig differenzierbar.

- 3.
- $|x| = 1$
- :

Wir zeigen, dass  $f(x)$  in  $x_0 = 1$  differenzierbar ist. Dazu berechnen wir den Differenzenquotienten und benutzen die Regel von l'Hospital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) - 0}{x - 1} \\ &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0 - 0}{x - 1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für  $x = -1$  kann man analog zeigen, dass  $f(x)$  differenzierbar ist.

Das selbe Ergebnis erhält man, wenn man den Differenzenquotienten von höheren Ableitungen von  $f$  bildet.

Folglich ist die Funktion  $f$  auch für  $|x| = 1$  unendlich oft stetig differenzierbar.

Aus der Definition der Funktion  $f$  und Abbildung 6.1 wird deutlich, dass der Träger auch im mehrdimensionalen eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. In der Literatur wird diese Funktion auch als Gauss'sche Glockenfunktion bezeichnet.

Somit haben wir gezeigt, dass  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist.

## 6.2.2 Mengentheoretische Aussagen

Zum Ende dieses Abschnitts gehen wir noch auf mengentheoretische Zusammenhänge ein, die in Kapitel 4 schon genauer beschrieben worden sind.

- 2.1 Aus der Definition 6.6 von  $C^k(\bar{\Omega})$  erhalten wir folgenden mengentheoretischen Zusammenhang:

$$C^k(\bar{\Omega}) \subset C^0(\bar{\Omega}).$$

- 2.2 Des Weiteren ergibt sich aus der Definition des Raumes  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  folgende Aussage:

$$C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^k(\bar{\Omega}).$$

- 2.3 Insgesamt können wir also mit unserem bisherigen Wissen und unter Beachtung der Ergebnisse aus Kapitel 4 sowie der Definition 6.8, für  $0 < \mu < \lambda \leq 1$  folgende mengentheoretische Aussage treffen

$$C^{k+1,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^{k+1}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) \subset C^{k,\mu}(\bar{\Omega}).$$

## 6.3 Banachräume und Separabilität

### 6.3.1 Banachräume

**Satz 6.14.** *Die Räume  $C^k(\bar{\Omega})$  und  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  sind Banachräume.*

*Beweis.*

1. Als erstes zeigen wir die Vervollständigung von  $C^k(\bar{\Omega})$ . Diese erhalten wir auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz von  $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $D^\alpha f$ , wobei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f \in C^k(\bar{\Omega})$  sind und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_k = 0$  ist.  
(Einen Beweis hierzu findet man in [27, Kapitel 7, Satz 7.16])
2. Im Folgenden wird die Vollständigkeit von  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  gezeigt.  
Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ , dann ist sie auch eine Cauchy-Folge im Raum  $C^k(\bar{\Omega})$  und aus 1. folgt, dass eine Funktion  $f \in C^k(\bar{\Omega})$  existiert, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_k = 0$$

gilt. Da  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist, erhalten wir, dass für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n, m > n_0$

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|D^\alpha f_n(\mathbf{x}) - D^\alpha f_n(\mathbf{y}) - D^\alpha f_m(\mathbf{x}) + D^\alpha f_m(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} < \varepsilon \quad \text{mit } |\alpha| = k.$$

gilt.

Für  $m \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|D^\alpha f_n(\mathbf{x}) - D^\alpha f_n(\mathbf{y}) - D^\alpha f(\mathbf{x}) + D^\alpha f(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \leq \varepsilon,$$

also  $H_{\alpha,\lambda}(f_n - f) \leq \varepsilon$ .

Dies bedeutet, dass für alle  $n > n_0$   $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  ist, so dass

$$f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} - (f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$$

auch zu  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  gehört.

Es gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\alpha,\lambda}(f_n - f) = 0 \quad \text{für } |\alpha| = k.$$

Daraus folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{k,\lambda} = 0$  ist.

Wir haben somit gezeigt, dass  $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$  ein vollständig normierter linearer Raum, also ein Banachraum ist. □

### 6.3.2 Abhängigkeit der Separabilität von dem Gebiet, auf dem der Funktionenraum definiert ist

**Satz 6.15.** *Ist  $\bar{\Omega}$  beschränkt, dann ist  $C^0(\bar{\Omega})$  separabel.*

Dies wurde bereits im Kapitel 5 gezeigt.

**Satz 6.16.** *Ist  $\Omega$  nicht beschränkt, dann ist  $C^0(\bar{\Omega})$  nicht separabel.*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch ein Gegenbeispiel.

Wähle  $\Omega = (0, \infty)$  dann erhalten wir für  $\bar{\Omega} = [0, \infty)$ .

Für  $0 < s < \frac{1}{2}$  mit  $s \in \mathbb{R}_0^+$  und  $M \in \mathbb{N}$  definieren wir die Funktion (siehe Abb. 6.3)

$$u_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = k \text{ mit } k \in M, \\ 0 & \text{für } x = k + s \text{ oder } x = k - s \text{ mit } k \in M, \\ u_M \text{ linear und stetig} & \text{auf } [k - s, k] \text{ und } [k, k + s], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bekanntlich gibt es überabzählbar viele Teilmengen der natürlichen Zahlen, woraus folgt, dass es

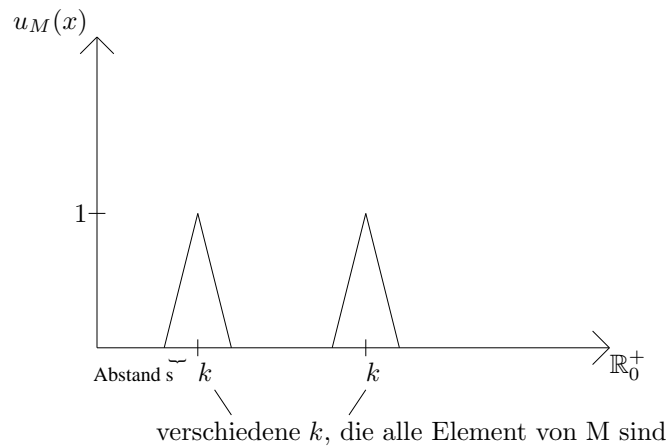


Abbildung 6.3: Skizze der Funktion  $u_M$ .

auch überabzählbar viele verschiedene Funktionen  $u_M$  gibt.

Wir betrachten nun den Abstand zwischen zwei beliebigen, verschiedenen Funktionen  $u_{M_1}$  und  $u_{M_2}$  aus der Menge der Funktionen  $u_M$ :

$$\|u_{M_1} - u_{M_2}\|_0 = \sup_{x \in \Omega} |u_{M_1} - u_{M_2}| = 1.$$

Der Abstand beträgt also immer genau 1, wie auch in Abbildung 6.3 deutlich wird.

Wir wissen, dass die Menge der  $u_M$  eine überabzählbare Teilmenge des normierten linearen Raumes  $C^0(\bar{\Omega})$  ist. Satz 5.6 aus Kapitel 5.2.1 über die Nichtseparabilität sagt aus, falls ein  $\delta > 0$  existiert, für das

$$\|u_{M_1} - u_{M_2}\|_0 > \delta$$

für jedes Paar  $u_{M_1}, u_{M_2}$  dieser Teilmenge von  $C^0(\bar{\Omega})$  mit  $u_{M_1} \neq u_{M_2}$  gilt, so ist  $C^0(\bar{\Omega})$  nicht separabel.

In unserem Fall wählen wir also  $\delta = \frac{1}{2}$  und erhalten somit,

$$1 = \|u_{M_1} - u_{M_2}\|_0 > \delta.$$

Wir haben also gezeigt, dass  $C^0(\bar{\Omega})$  nicht separabel ist, wenn  $\Omega$  unbeschränkt ist.

□



# Kapitel 7

## Der Raum $L_p(\Omega)$

AUSGEARBEITET VON KRISTIN HESS

Im folgenden Kapitel werden wir den Raum  $L_p(\Omega)$  kennen lernen und uns mit den Eigenschaften dieses Raumes beschäftigen. Dabei werden wir sehen, dass der Raum  $L_p(\Omega)$  ein Vektorraum und ein normierter Raum ist.

Anschließend werden wir noch den Raum  $L_\infty(\Omega)$  einführen und seine Eigenschaften kennen lernen. Es wurden folgende Literaturquellen verwendet [2, 4, 8, 13, 16, 20, 22].

### 7.1 Grundlagen

**Definition 7.1.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^1$ . Dann wird durch

$$\mu(A) := \inf \left( \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A \right)$$

das Lebesgue-Maß von  $A$  definiert. Hierbei sind die  $I_i$  Intervalle.

Dies ist eine Definition für den Spezialfall  $\mathbb{R}^1$ .

Analog kann man das Lebesgue-Maß für eine beliebige Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{R}^n$  definieren. Dabei versteht man unter einem Intervall  $I$  im  $n$ -dimensionalen Raum ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Ein Beispiel wäre ein Quader im  $\mathbb{R}^3$ . Ein Intervall lässt sich also allgemein darstellen als kartesisches Produkt von  $n$  eindimensionalen Intervallen.

**Definition 7.2.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dann wird durch

$$\mu(A) := \inf \left( \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A \right)$$

das Lebesgue-Maß von  $A$  definiert, wobei  $|I_i|$  das  $n$ -dimensionale Volumen von  $I_i$  ist.

**Bemerkung 7.3.** Mengen vom Lebesgue-Maß Null heißen Nullmengen und Punkte wären ein Beispiel für solche Nullmengen.

**Definition 7.4.** Eine Aussage gilt fast überall in  $A$  genau dann, wenn es eine Nullmenge  $N$  gibt, so dass die Aussage in  $A \setminus N$  gilt.

**Definition 7.5.** Die Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt messbar, wenn die Mengen  $M_c = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) < c\}$  für jedes  $c \in \mathbb{R}$  messbar sind.

**Bemerkung 7.6.** Sind  $f$  und  $g$  messbar, so ist auch  $f + g$  und  $f \cdot g$  messbar.

## 7.2 Der Raum $L_p(\Omega)$

**Definition 7.7.** Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Teilmenge. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{L}_p(\Omega)$  die Menge aller messbaren Funktionen  $f$ , die fast überall auf  $\Omega$  definiert sind und für die gilt:

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} < \infty.$$

Man hat nun folgende Übereinkunft getroffen: Zwei Funktionen  $f$  und  $g$ , die fast überall in  $\Omega$  gleich sind, nennt man gleich. Dazu führt man eine Äquivalenzrelation ein und sagt, zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$  sind äquivalent, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maße Null unterscheiden, d.h.  $f \equiv g$  genau dann, wenn  $f(\mathbf{t}) = g(\mathbf{t})$  für fast alle  $\mathbf{t} \in \Omega$  ist.

**Definition 7.8.** Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine Lebesgue-messbare Teilmenge.  $L_p(\Omega)$  ist die lineare Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen aus  $\mathcal{L}_p(\Omega)$ , für die gilt:

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} < \infty.$$

Dabei handelt es sich bei  $L_p(\Omega)$  um eine lineare Menge, da bei der Addition zweier beliebiger Repräsentanten aus zwei verschiedenen Äquivalenzklassen, die Summe wieder in einer Äquivalenzklasse liegt. Analog wird bei der skalaren Multiplikation vorgegangen.

### Bemerkung 7.9.

- $L_p(\Omega)$  ist ein Raum, dessen Elemente Klassen von Funktionen sind. Dabei unterscheiden sich zwei Repräsentanten einer Klasse nur auf einer Menge vom Maße Null, d.h. sie sind fast überall gleich.
- Man unterscheidet daher häufig nicht zwischen  $\mathcal{L}_p(\Omega)$  und  $L_p(\Omega)$ , zumal das Rechnen mit Klassen durch das Rechnen mit Repräsentanten definiert ist.
- In  $L_p(\Omega)$  ist es nicht sinnvoll, eine Funktion an nur einem Punkt auszuwerten, da zwei Funktionen gleich sein können, die sich an einem Punkt unterscheiden.

## 7.3 Eigenschaften von $L_p(\Omega)$

### 7.3.1 Der Vektorraum $L_p(\Omega)$

**Satz 7.10.**  $L_p(\Omega)$  ist ein linearer Raum über  $K$ , wobei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  ist.

*Beweis.* Wir beschränken uns im Beweis auf den Nachweis der skalaren Multiplikation und der Abgeschlossenheit von  $L_p(\Omega)$  bezüglich der Addition.

**i) Skalare Multiplikation:** Für  $f \in L_p(\Omega)$  ist auch  $\lambda f$  für alle  $\lambda \in K$  summierbar, d.h.  $\lambda f \in L_p(\Omega)$ , da

$$\int_{\Omega} |\lambda f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} = |\lambda|^p \underbrace{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}}_{\in L_p(\Omega)}$$

gilt.

ii) **Addition:** Für zwei komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  gilt

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \leq 2 \max(|z_1|, |z_2|).$$

Damit gilt auch

$$|z_1 + z_2|^p \leq (2 \max(|z_1|, |z_2|))^p = 2^p (\max(|z_1|, |z_2|))^p \leq 2^p (|z_1|^p + |z_2|^p).$$

Mit  $f, g \in L_p(\Omega)$  folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} &\leq \int_{\Omega} 2^p (|f(\mathbf{t})|^p + |g(\mathbf{t})|^p) d\mathbf{t} \\ &= 2^p \underbrace{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}}_{\in L_p(\Omega)} + 2^p \underbrace{\int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}}_{\in L_p(\Omega)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion  $|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p$  wird durch die summierbare Funktion  $2^p(|f(\mathbf{t})|^p + |g(\mathbf{t})|^p)$  majorisiert und ist daher selbst summierbar.

Mit  $f$  und  $g$  gehört also auch  $\lambda f$  und  $f + g$  zu  $L_p(\Omega)$  und damit ist  $L_p(\Omega)$  ein linearer Raum über  $\mathbb{K}$ .  $\square$

### 7.3.2 Der normierte Raum $L_p(\Omega)$

Wir wiederholen die Definition einer Norm:

**Definition 7.11.** Bei einer Norm gilt für alle  $x, y \in X$  und  $\lambda \in K$ :

- (N<sub>1</sub>)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Positive Definitheit),
- (N<sub>2</sub>)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (Homogenität),
- (N<sub>3</sub>)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Minkowski-Ungleichung).

**Satz 7.12.** Für  $1 \leq p < \infty$  ist eine Norm im Raum  $L_p(\Omega)$  definiert durch

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p}.$$

**Bemerkung 7.13.** (Siehe [2, Kapitel II, Abschnitt 7])

Für  $0 < p < 1$  ist keine Norm definiert, da N3 nicht erfüllt ist:  $\|x + y\|_{L_p(\Omega)} \geq \|x\|_{L_p(\Omega)} + \|y\|_{L_p(\Omega)}$ .

*Beweis. Zu Normaxiom 1*

Aus der Definition folgt  $\{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\}^{1/p} \geq 0$ , da  $|f(\mathbf{t})|^p$  ein positiver Integrand ist und  $p \geq 1$ . Außerdem ist  $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\}^{1/p} = 0$  genau dann, wenn  $f \equiv 0$  fast überall ist. Wenn  $f$  fast überall Null ist, liegt  $f$  in der selben Äquivalenzklasse wie die Nullfunktion und deshalb wird das Integral Null.

**Bemerkung 7.14.** Für  $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$  gilt: Wenn  $\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} = 0$  ist, folgt daraus, dass  $f$  nur fast überall Null ist. Deshalb handelt es sich bei  $|\cdot|_{\mathcal{L}_p(\Omega)}$  nur um eine Halbnorm.

**Zu Normaxiom 2**

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{L_p(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |\lambda f(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left( |\lambda|^p \int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \left( \int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= |\lambda| \|f\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

**Zu Normaxiom 3**

Wir wollen das Normaxiom 3 in drei Schritten beweisen:

- i) Geometrische Herleitung der Youngschen Ungleichung,
- ii) Beweis der Hölder-Ungleichung,
- iii) Beweis der Minkowski-Ungleichung.

**Lemma 7.15.** (*Youngsche Ungleichung*) Sei  $p > 1$  und  $q = \frac{p}{p-1}$ , dann gilt:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

**i) Geometrische Herleitung:**

Sei  $p > 1$  und  $q = \frac{p}{p-1}$ , dabei heißt  $q$  der zu  $p$  konjugierte Exponent. Damit erhalten wir  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

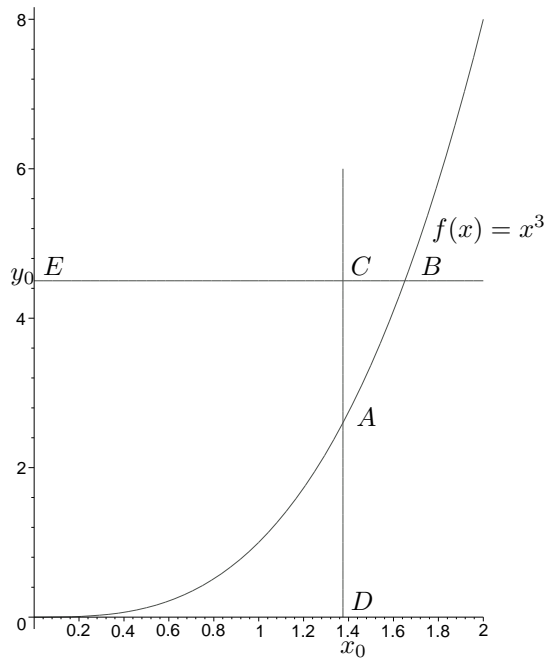


Abbildung 7.1: Schaubild für die Kurve  $f(x) = x^{p-1}$  mit  $p = 4$

und  $q - 1 = \frac{1}{p-1}$ .

Wir betrachten nun die Kurve  $f(x) = x^{p-1}$  und die sich daraus ergebende inverse Funktion  $f(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$ . Außerdem seien  $x_0, y_0 > 0$  beliebig, aber fest gewählt.

Aus Abb. 7.1 können wir erkennen, dass die Summe der Inhalte der Figuren OEB und OAD größer

als der Inhalt des Rechtecks OECD ist, unabhängig davon wie wir  $x_0$  und  $y_0$  wählen. Wir erhalten also folgende Ungleichung

$$\int_0^{x_0} x^{p-1} dx + \int_0^{y_0} y^{q-1} dy \geq x_0 y_0,$$

$$\frac{x_0^p}{p} + \frac{y_0^q}{q} \geq x_0 y_0 \quad (\text{Youngsche Ungleichung}).$$

Da  $x_0$  und  $y_0$  beliebig gewählt wurden, folgt die Behauptung.

Gleichheit erhalten wir für  $y = x^{p-1}$  bzw. für  $y^q = x^{q(p-1)} = x^p$ , d.h. die Geraden  $x_0$  und  $y_0$  schneiden sich genau auf der Kurve  $f(x)$ .

## ii) Beweis der Hölder-Ungleichung:

**Lemma 7.16.** Seien  $f \in L_p(\Omega)$ ,  $g \in L_q(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann gilt:

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} \quad (\text{Hölder-Ungleichung}).$$

**Bemerkung 7.17.** Für den Fall  $p = q = 2$  erhalten wir die Schwarzsche Ungleichung. Mit  $p = q = 2$  bekommen wir folgende Norm  $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^2 dt\}^{1/2}$ . Durch diese Norm wird ein Skalarprodukt erzeugt:  $(f, g) = \int_{\Omega} f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})dt$ , d.h.  $(f, f) = \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^2 dt = \|f\|_{L_2(\Omega)}^2$ .

In Räumen mit Skalarprodukt gilt die Schwarzsche Ungleichung, d.h. in  $L_2(\Omega)$  gilt

$$\begin{aligned} |(f, g)| &\leq \left| \int_{\Omega} f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})dt \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})| dt \\ &\leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Hölder-Ungleichung ist die Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung. Im nachfolgenden Beweis, wird Lemma 7.16 verifiziert.

*Beweis.* Ist  $\|f\|_{L_p(\Omega)} = 0$  oder  $\|g\|_{L_q(\Omega)} = 0$ , so ist auch  $f$  bzw.  $g$  nach dem Normaxiom 1 fast überall gleich Null. Somit ist auch  $\|fg\|_{L_1(\Omega)} = 0$  und die Hölder-Ungleichung ist erfüllt.

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $\|f\|_{L_p(\Omega)} \neq 0$  und  $\|g\|_{L_q(\Omega)} \neq 0$  ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})| dt \leq \underbrace{\left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p dt \right)^{1/p}}_{:=A} \underbrace{\left( \int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^q dt \right)^{1/q}}_{:=B}$$

gilt.

Dazu wählen wir  $a := \frac{|f(\mathbf{t})|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}} = \frac{|f(\mathbf{t})|}{A}$ ,  $b := \frac{|g(\mathbf{t})|}{\|g\|_{L_q(\Omega)}} = \frac{|g(\mathbf{t})|}{B}$ . Durch Einsetzen von  $a$  und  $b$  in die Youngsche Ungleichung erhalten wir:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ . Damit gilt punktweise fast überall

$$\begin{aligned} ab &= \frac{|f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})|}{AB} \\ &\leq \frac{1}{p} \left( \frac{|f(\mathbf{t})|}{A} \right)^p + \frac{1}{q} \left( \frac{|g(\mathbf{t})|}{B} \right)^q \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung steht auf der rechten Seite eine integrierbare Funktion und auf der Linken eine messbare Funktion, d.h. auch die Funktion auf der linken Seite ist summierbar. Integrieren auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})|}{AB} d\mathbf{t} &\leq \int_{\Omega} \frac{|f(\mathbf{t})|^p}{pA^p} d\mathbf{t} + \int_{\Omega} \frac{|g(\mathbf{t})|^q}{qB^q} d\mathbf{t} \\ &= \frac{1}{p} \frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{B^q}{B^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $AB$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} &\leq AB, \\ \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} &\leq \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^q d\mathbf{t} \right)^{1/q}, \\ \|fg\|_{L_1(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

### iii) Beweis der Minkowski-Ungleichung

**Lemma 7.18.** Sei  $1 \leq p < \infty$  und seien  $f, g \in L_p(\Omega)$ . Dann gilt:

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

*Beweis. 1.)  $p = 1$ :*

Die Behauptung folgt durch Integration aus  $|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})| \leq |f(\mathbf{t})| + |g(\mathbf{t})|$ .

**2.)  $1 < p < \infty$ :**

Die Funktion  $f + g$  ist ebenfalls ein Element von  $L_p(\Omega)$ , da  $L_p(\Omega)$  ein Vektorraum ist. Mit  $q = \frac{p}{p-1}$  gilt  $q(p-1) = p$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Weiterhin gilt  $|(f + g)^{p-1}|^q = |f + g|^p$  folgt  $(f + g)^{p-1} \in L_q(\Omega)$ . Wir zeigen die Minkowski-Ungleichung  $\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}$  und betrachten dazu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} &= \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \\ &\leq \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1} (|f(\mathbf{t})| + |g(\mathbf{t})|) d\mathbf{t} \\ &= \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1} |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t} + \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1} |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} (|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1})^q d\mathbf{t} \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p} \\ &\quad + \left( \int_{\Omega} (|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^{p-1})^q d\mathbf{t} \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p} \\ &= \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/q} + \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p} \\ &\quad + \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}}{\{\int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\}^{1/q}} &\leq \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{1/p}, \\ \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p d\mathbf{t}\right)^{1/p}, \\ \|f + g\|_{L_p(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Wir haben  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  bewiesen, d.h. alle Normaxiome sind erfüllt und  $L_p(\Omega)$  ist ein normierter Raum. □

### 7.3.3 Konvergenz in $L_p(\Omega)$

Eine Funktionenfolge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  heißt im Raum  $L_p(\Omega)$  konvergent, wenn:  $\|f_k - f\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  genau dann, wenn  $\{\int_{\Omega} |f_k(t) - f(t)|^p dt\}^{1/p} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wir sprechen dann von Konvergenz im  $p$ -ten Mittel, bzw. für  $p = 2$  von Konvergenz im quadratischen Mittel.

### 7.3.4 Einbettung von $L_p(\Omega)$

Wir beginnen mit einem Beispiel einer Funktion, die in  $L_p(\Omega)$  liegt.

**Beispiel 7.19.** Sei  $\Omega = [0, 1]$  und  $f(t) = t^{-s}$ , wobei  $p$  fest ist. Dazu betrachten wir

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (t^{-s})^p dt\right)^{1/p}.$$

Potenzieren mit  $p$  auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int_0^1 t^{-sp} dt \\ &= \left[\frac{1}{-sp+1} t^{-sp+1}\right]_0^1. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nur für  $-sp+1 > 0$  definiert, da sonst der Exponent negativ wird und  $t$  im Nenner steht. Wir erhalten  $\frac{1}{p} > s$ . Für  $\frac{1}{p} > s$  ist  $f(t) = t^{-s} \in L_p(\Omega)$ .

Nicht jede Funktion aus  $L_q(\Omega)$  befindet sich in  $L_p(\Omega)$ , falls  $p > q$  ist, wie folgendes Lemma zeigt:

**Lemma 7.20.**  $L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$  für  $p > q$ , falls  $\Omega$  beschränkt ist.

*Beweis.* Sei  $f \in L_p(\Omega)$ , dann ist zu zeigen, dass  $f \in L_q(\Omega)$  ist. Wir betrachten  $f$  in der  $\|\cdot\|_{L_q(\Omega)}$ -Norm und wenden die Hölder-Ungleichung mit  $\frac{q}{p} + \frac{1}{r} = 1$  an:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^q d\mathbf{t} &= \int_{\Omega} |f(\mathbf{t})|^q \cdot 1 d\mathbf{t} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (|f(\mathbf{t})|^q)^{p/q} d\mathbf{t}\right)^{q/p} \left(\int_{\Omega} 1^r d\mathbf{t}\right)^{1/r} \\ &= \|f\|_{L_p(\Omega)}^q \underbrace{(\text{Vol}(\Omega))^{1/r}}_{< \infty, \text{ weil } \Omega \text{ beschränkt ist}} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Somit ist  $f \in L_q(\Omega)$ . □

## 7.4 Der Raum $L_\infty(\Omega)$

**Definition 7.21.**  $L_\infty(\Omega)$  ist die Menge aller messbaren Funktionen  $f$ , die fast überall auf  $\Omega$  definiert sind und für die eine Konstante  $K > 0$  und eine Nullmenge  $N$  mit  $N \subset \Omega$  existiert, so dass gilt:

$$|f(\mathbf{t})| \leq K \text{ für alle } \mathbf{t} \in \Omega \setminus N.$$

$f \in L_\infty(\Omega)$  heißt dann wesentlich beschränkt.

**Lemma 7.22.**  $L_\infty(\Omega)$  ist ein linearer Raum über  $K$ , wobei  $K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$  ist.

*Beweis.* Wir beschränken uns bei dem Beweis auf den Nachweis der skalaren Multiplikation und der Abgeschlossenheit bezüglich der Addition.

### i) Skalare Multiplikation:

Sei  $f \in L_\infty(\Omega)$ , d.h. es existiert ein  $K^*$ , für welches  $|f(\mathbf{t})| < K^*$  für  $\mathbf{t} \in \Omega \setminus N$  gilt.

Wir erhalten also  $|\lambda f(\mathbf{t})| \leq |\lambda| |f(\mathbf{t})| < |\lambda| K^* := K$  und damit  $|\lambda f(\mathbf{t})| < K$ .

### ii) Addition:

Sei  $f \in L_\infty(\Omega)$ , d.h. es existiert ein  $K_1$  für  $\mathbf{t} \in \Omega \setminus N_1$ , so dass  $|f(\mathbf{t})| < K_1$  gilt und sei  $g \in L_\infty(\Omega)$ , d.h. es existiert ein  $K_2$  mit  $|g(\mathbf{t})| < K_2$  für  $\mathbf{t} \in \Omega \setminus N_2$ .

Es gilt  $|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})| \leq |f(\mathbf{t})| + |g(\mathbf{t})| \leq K_1 + K_2 := K$  für  $\mathbf{t} \in \Omega \setminus N_1 \cup N_2$ . und damit erhalten wir  $|f(\mathbf{t}) + g(\mathbf{t})| < K$ .

Mit  $f, g \in L_\infty(\Omega)$ ,  $\lambda \in K$  ist also auch  $f + g \in L_\infty(\Omega)$  und  $\lambda f \in L_\infty(\Omega)$ . Damit ist  $L_\infty(\Omega)$  ein Vektorraum.  $\square$

**Definition 7.23.** Für  $f \in L_\infty$  ist durch

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} := \inf_{\substack{N \subset \mathcal{M}, \\ \mu(N)=0}} \left\{ \sup_{\mathbf{t} \in \Omega \setminus N} |f(\mathbf{t})| \right\} = \text{ess sup} |f(\mathbf{t})|$$

eine Norm im Raum  $L_\infty(\Omega)$  definiert, wobei  $\mathcal{M}$  die Menge aller messbaren Funktionen ist.

**Erläuterung:** Es ist  $\text{ess sup} |f(\mathbf{t})| = \inf K$ , wobei das Infimum über alle nichtnegativen Zahlen  $K$  gebildet wird mit  $\mu(\{\mathbf{t} : |f(\mathbf{t})| > K\}) = 0$ .

**Lemma 7.24.**  $L_\infty(\Omega)$  ist ein normierter Raum.

*Beweis.* **Zu Normaxiom 1**

$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \geq 0$  ist aufgrund der Definition erfüllt, ebenso wie  $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  f.ü. ist.

**Zu Normaxiom 2**

Wir betrachten

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{L_\infty(\Omega)} &= \inf_{\substack{N \subset \mathcal{M}, \\ \lambda(N)=0}} \left\{ \sup_{\mathbf{t} \in \Omega \setminus N} |\lambda f(\mathbf{t})| \right\} \\ &= \inf_{\substack{N \subset \mathcal{M}, \\ \lambda(N)=0}} \left\{ \sup_{\mathbf{t} \in \Omega \setminus N} |\lambda| |f(\mathbf{t})| \right\} \\ &= |\lambda| \inf_{\substack{N \subset \mathcal{M}, \\ \lambda(N)=0}} \left\{ \sup_{\mathbf{t} \in \Omega \setminus N} |f(\mathbf{t})| \right\} \\ &= |\lambda| \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Es gilt also  $\|\lambda f\|_{L_\infty(\Omega)} = |\lambda| \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$  und damit ist das Normaxiom 2 erfüllt.



**Zu Normaxiom 3**

Zur Überprüfung des Normaxioms 3 betrachten wir

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L_\infty(\Omega)} &= \inf_{\substack{N \subset M, \\ \mu(N)=0}} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus N} |f(t) + g(t)| \right\} \\
&\leq \inf_{\substack{N \subset M, \\ \mu(N)=0}} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus N} (|f(t)| + |g(t)|) \right\} \\
&\leq \inf_{\substack{N_1 \subset M, \\ \mu(N_1)=0}} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus N_1} |f(t)| \right\} + \inf_{\substack{N_2 \subset M, \\ \mu(N_2)=0}} \left\{ \sup_{t \in \Omega \setminus N_2} |g(t)| \right\} \\
&\leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g\|_{L_\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Alle drei Normaxiome sind erfüllt.  $\square$

**Nachtrag**

Wir können nun auch beweisen, dass die Hölder-Ungleichung für  $p = 1$  gilt. Seien  $f \in L_p(\Omega), g \in L_q(\Omega), 1 \leq p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt  $\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}$ .

*Beweis.* Sei  $p = 1$ , dann erhalten wir für den konjugierten Exponenten  $q = \infty$ . Außerdem wissen wir, dass mit  $f$  und  $g$  auch  $fg$  messbar ist.

Wir betrachten  $|f(t)g(t)| \leq \|g\|_{L_\infty(\Omega)} |f(t)|$  für fast alle  $t \in \Omega$  und erhalten damit  $fg \in L_1(\Omega)$ .  $\square$

**Einbettung von  $L_\infty(\Omega)$** 

Wir wollen nun zeigen, dass  $L_\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega)$  ist, für alle  $p \geq 1$ , falls  $\Omega$  beschränkt ist.

*Beweis.* Sei  $f \in L_\infty(\Omega)$ , dann ist zu zeigen, dass  $f$  in  $L_p(\Omega)$  enthalten ist. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f(t)|^p dt &\leq \int_{\Omega} (\|f\|_{L_\infty(\Omega)})^p dt \\
&\leq \underbrace{\|f\|_{L_\infty(\Omega)}^p}_{\text{Konstante}} \int_{\Omega} 1 dt \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Also gilt für alle  $f \in L_\infty(\Omega)$  auch  $f \in L_p(\Omega)$ , wenn  $p \geq 1$  und  $\Omega$  beschränkt ist.

Wir haben gezeigt, dass für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$   $L_\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega) \subset \dots \subset L_1(\Omega)$  für  $p > q$  gilt.  $\square$

## 7.5 Henri Lebesgue

Henri Lebesgue wurde am 28.06.1875 in Beauvais in Frankreich als Sohn eines Druckereiarbeiters und einer Volksschullehrerin geboren. Durch Stipendien seines Geburtsortes wurde ihm der Besuch höherer Schulen ermöglicht und von 1894 - 1897 studierte er an der Ecole Normale, wo er zum Zwecke weiterer Studien als bibliothekarische Hilfskraft blieb. Im Jahr 1902 promovierte Lebesgue und im ersten Weltkrieg leitete er eine mathematische Kommission im Forschungsbeirat des Kriegsministeriums. Ab 1919 unterrichtete Lebesgue für zwei Jahre an der Universität Sorbonne und ab 1921 war er Professor am College de France, wo er bis zum Ende seines Lebens lehrte. Lebesgue starb am 26.07.1941 in Paris.

Henri Lebesgues Hauptleistungen liegen in der Theorie der reellen Funktionen und in seiner berühmten Dissertation aus dem Jahr 1902 hat er den nach ihm benannten Integralbegriff eingeführt, der sich als überaus fruchtbar für die moderne Analysis erwiesen hat. Seine Resultate wurden zunächst nur zögernd aufgenommen, erlangten dann aber große Bedeutung in zentralen Gebieten der Analysis.



# Kapitel 8

## Weitere Eigenschaften von $L_p(\Omega)$ -Räumen

AUSGEARBEITET VON ANDREAS GRIESER

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit weiteren Eigenschaften der in Kapitel 7.2 eingeführten  $L_p(\Omega)$ -Räume. Dabei werden wir näher auf die Eigenschaften der Vollständigkeit und der Separabilität eingehen.

Als Grundlage wurden die Bücher [2, 16, 27] benutzt.

### 8.1 Vollständigkeit von $L_p(\Omega)$

Die Definition der Vollständigkeit wurde bereits in Kapitel 1.2.3 eingeführt. Um die folgenden Sätze beweisen zu können benötigen wir noch folgende Definition und das Lemma von Fatou.

**Definition 8.1.**  $M_+(\Omega)$  mit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist die Menge der Funktionen  $f_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die Grenzfunktionen von monoton steigenden Folgen von Treppenfunktionen sind.

**Lemma 8.2 (Fatou's Lemma).** Für  $f_k \in M_+(\Omega)$  gilt:

$$\int_{\Omega} \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k(x) dx.$$

Einen Beweis dieses Lemmas findet man zum Beispiel in [27].

**Satz 8.3.**  $L_p(\Omega)$  ist ein Banachraum für  $1 \leq p < \infty$ .

In dem Beweis dieses Satzes wählen wir eine Cauchy-Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L_p(\Omega)$  und zeigen, dass der Grenzwert einer Teilfolge  $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  wieder in  $L_p(\Omega)$  liegt.

*Beweis.* a) Im ersten Teil des Beweises beschäftigen wir uns mit der Konstruktion der Grenzfunktion  $u(\mathbf{x})$ .  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L_p(\Omega)$  sei eine Cauchy-Folge und  $(u_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \in L_p(\Omega)$  sei eine Teilfolge, so dass mit der Definition einer Cauchy-Folge folgende Abschätzung gilt:

$$\|u_{n_{j+1}} - u_{n_j}\|_{L_p(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

Weiter definieren wir die Funktion  $v_m(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m |u_{n_{j+1}}(\mathbf{x}) - u_{n_j}(\mathbf{x})|$  und betrachten diese bezüglich der  $L_p(\Omega)$ -Norm:

$$\|v_m\|_{L_p(\Omega)} = \left\| \sum_{j=1}^m |u_{n_{j+1}} - u_{n_j}| \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{2}\right)^j < 1.$$

Bei dieser Abschätzung wurde zuerst die Dreiecksungleichung und dann die geometrische Reihe ( $\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$ ;  $|z| < 1$ ) verwendet.

Nun setzen wir  $v(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m(x)$ . Mit dem Lemma von Fatou, sowie der vorherigen Abschätzung erhalten wir

$$\int_{\Omega} |v(x)|^p dx = \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} |v_m(x)|^p dx \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_m(x)|^p dx \leq 1 .$$

Aus diesem Schritt folgt, dass  $v(x)$  fast überall auf  $\Omega$  endlich ist, und die Reihe  $u_{n_1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m (u_{n_{j+1}}(\mathbf{x}) - u_{n_j}(\mathbf{x}))$  fast überall auf  $\Omega$  gegen den Grenzwert  $u(\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_{n_j}(\mathbf{x})$  konvergiert. Existiert der Grenzwert nicht, so wird  $u(\mathbf{x}) = 0$  gesetzt.

b) Im zweiten Teil zeigen wir, dass  $u(\mathbf{x}) \in L_p(\Omega)$  ist und  $\|u - u_n\| \rightarrow 0$  gilt. Da  $(u_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist, existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|u_m - u_n\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$$

gilt. Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x) - u_n(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_{n_j}(x) - u_n(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \quad \text{für } n \geq N. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung liefert folgende Ergebnisse:

- $\|u - u_n\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- Da  $(u - u_n) \in L_p(\Omega)$  und  $u_n \in L_p(\Omega)$  gilt:  $u = (u - u_n) + u_n \in L_p(\Omega)$ .

Somit folgt, dass  $L_p(\Omega)$  vollständig ist für  $1 \leq p < \infty$ . □

**Satz 8.4.**  $L_{\infty}(\Omega)$  ist ein Banachraum.

*Beweis.*  $(u_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$  sei eine Cauchy-Folge in  $L_{\infty}(\Omega)$ . Auf Grund der Definition des Raumes  $L_{\infty}(\Omega)$  und der zugehörigen Norm, die bereits in Kapitel 7.4 definiert wurden, gelten außerhalb einer Nullmenge  $N$ , also in  $\Omega' = \Omega \setminus N$  folgende Abschätzungen:

- $|u_n(\mathbf{x})| \leq \|u_n\|_{L_{\infty}(\Omega)}$ ,
- $|u_n(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| \leq \|u_n - u_m\|_{L_{\infty}(\Omega)}$ .

Ist  $(\|u_n\|_{L_{\infty}(\Omega)})_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, dann konvergiert  $u_n(\mathbf{x}) \rightarrow u(\mathbf{x})$  und zwar nicht nur punktweise, sondern auch gleichmäßig auf  $\Omega'$ .

Um die Stellen der Nullmenge hinzuzunehmen, so dass wir eine Funktion auf ganz  $\Omega$  haben, definieren wir folgende Funktion:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}) & \text{auf } \Omega', \\ 0 & \text{auf } N. \end{cases}$$

Hiermit gilt  $\|u_n - \hat{u}\|_{L_{\infty}(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $\hat{u}(\mathbf{x}) \in L_{\infty}(\Omega)$ . Somit ist  $L_{\infty}(\Omega)$  vollständig □

## 8.2 Separabilität von $L_p(\Omega)$

Die für diesen Abschnitt wichtigen Grundbegriffe sind die der Dichte und der Separabilität, welche in Kapitel 3.1 und 3.2 eingeführt wurden. Wir werden zunächst die Separabilität für beschränkte Mengen  $\Omega$  zeigen, bevor wir beweisen, dass dies auch für beliebige Mengen gilt.

**Satz 8.5.** *Sei  $\Omega$  eine kompakte Menge, dann ist  $L_p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$  separabel.*

Im folgenden Beweis werden wir zeigen, dass es zu einem  $u \in L_p(\Omega)$  eine Menge  $P$  von rationalen Polynomen gibt, die abzählbar ist und die dicht in der Menge  $L_p(\Omega)$  liegt.

*Beweis.* Sei  $f$  eine stetige Funktion, d.h.  $f$  ist aus der Menge  $C(\bar{\Omega})$ . Nach dem Satz von Weierstrass (Satz 4.11) gibt es eine Menge  $P$  von Polynomen, die dicht in  $C(\bar{\Omega})$  liegt. Damit gilt für  $f \in C(\bar{\Omega})$ ,  $r \in P$  und ein  $K \in \mathbb{R}$ :

$$\|f - r\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{2 \cdot K}.$$

Für den weiteren Beweis nehmen wir an, dass folgende Aussage bewiesen sei:  $C(\bar{\Omega})$  ist dicht in  $L_p(\Omega)$ . Eine Beweisskizze hierzu folgt am Ende dieses Kapitels. Sei  $u \in L_p(\Omega)$ , dann existiert ein  $f \in C(\bar{\Omega})$ , so dass

$$\|u - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Als nächstes schätzen wir  $\|f - r\|_{C(\bar{\Omega})}$  durch  $\|f - r\|_{L_p(\Omega)}$  ab. Dazu setzen wir zur Erleichterung der Rechnung  $f(\mathbf{x}) - r(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_p(\Omega)}^p &= \int_{\Omega} |F(\mathbf{x})|^p dx \\ &\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |F(\mathbf{x})|^p \cdot \int_{\Omega} 1 dx = V(\Omega) \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |F(\mathbf{x})|^p \\ \|F\|_{L_p(\Omega)} &\leq V^{\frac{1}{p}}(\Omega) \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |F(\mathbf{x})| \leq K \cdot \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |F(\mathbf{x})| = K \cdot \|f - r\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Mit dieser Abschätzung folgt

$$\begin{aligned} \|u - r\|_{L_p(\Omega)} &= \|u - f + f - r\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u - f\|_{L_p(\Omega)} + \|f - r\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \|u - f\|_{L_p(\Omega)} + K \cdot \|f - r\|_{C(\bar{\Omega})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Menge der Polynome ist eine abzählbare dichte Teilmenge von  $L_p(\Omega)$ . Und damit folgt die Separabilität von  $L_p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ .  $\square$

**Satz 8.6.** *Sei  $\Omega$  eine beliebige Menge, dann ist  $L_p(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$  separabel.*

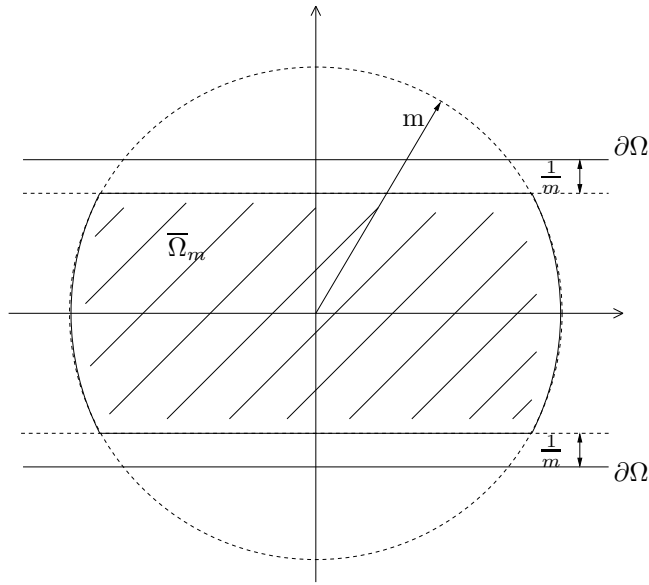
*Beweis.* a) Im ersten Teil des Beweis geht es um die Definition der Menge von Polynomen. Dazu definieren wir zunächst eine kompakte Teilmenge von  $\Omega$  (siehe Abbildung 8.1):

$$\bar{\Omega}_m = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{m} \wedge |x| \leq m\}; \text{ mit } m = 1, 2, \dots$$

Für  $m \rightarrow \infty$  gilt  $\bar{\Omega}_m \rightarrow \Omega$ . Ist  $\Omega$  der gesamte  $\mathbb{R}^n$ , in Abbildung 8.1 der gesamte  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $\bar{\Omega}_m$  eine Kreisscheibe, da jedes  $x$  von dem „unendlichen Rand“ immer den Abstand  $\frac{1}{m}$  hat. In diesem Fall kommt also vor allem die 2. Bedingung  $|x| \leq m$  zum Tragen.

Des Weiteren definieren wir eine Menge  $P$  von Polynomen mit rationalen Koeffizienten und die Menge  $P_m = \{\chi_{\bar{\Omega}_m} f : f \in P\}$  mit der charakteristischen Funktion  $\chi_{\bar{\Omega}_m}$ , die wie folgt definiert ist:

$$\chi_{\bar{\Omega}_m}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_m, \\ 0 & \text{für } x \notin \bar{\Omega}_m. \end{cases}$$

Abbildung 8.1: kompakte Menge  $\overline{\Omega}_m$ 

$P_m$  besteht aus Funktionen die über  $\overline{\Omega}_m$  Werte  $\neq 0$  annehmen können, außerhalb von  $\overline{\Omega}_m$  aber immer Null sind. Nach dem Satz von Weierstrass ist die Menge  $P_m$  dicht in  $C(\overline{\Omega}_m)$  und weiter gilt, dass  $\cup_{m=1}^{\infty} P_m$  eine abzählbare Vereinigung ist.

b) Im zweiten Teil dieses Beweises werden wir zeigen, dass für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  ein  $f \in P$  existiert mit  $\|u - f\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ .

Voraussetzung dafür ist, dass  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $L_p(\Omega)$  ist. Dabei ist

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \text{supp } u \subset K \subset \Omega, K \text{ ist kompakte Menge}\} \quad (8.1)$$

Die Wahrheit dieser Aussage wird am Ende dieses Kapitels in einer Beweisskizze erklärt.

Ist  $u \in L_p(\Omega)$  und  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $\Phi \in C_0(\Omega)$ , so dass

$$\|u - \Phi\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$$

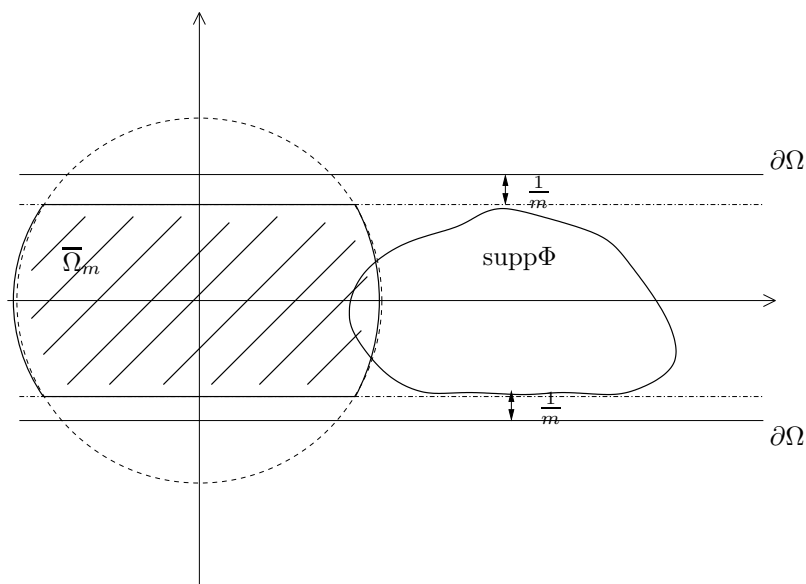
gilt. Gilt weiter  $\frac{1}{m} < \text{dist}(\text{supp } \Phi, \partial\Omega)$  (siehe Abb. 8.2), dann existiert ein  $m$ , so dass mit  $f_m = \chi_{\overline{\Omega}_m} \Phi \in P_m$

$$\|\Phi - f_m\|_{L_\infty(\overline{\Omega}_m)} = \|\Phi - \Phi\|_{L_\infty(\overline{\Omega}_m)} < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) V^{-\frac{1}{p}}(\overline{\Omega}_m) \quad (8.2)$$

gilt. Wir können nun  $m$  so wählen, dass wir ein  $f_m \in P_m$  und ein  $\Phi$  finden können, so dass die Abschätzung (8.2) gilt. Der Abstand zwischen  $f_m$  und  $\Phi$  kann also beliebig klein gewählt werden.

Für den letzten Teil des Beweises benötigen wir noch folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\Phi - f\|_{L_p(\Omega_m)} &= \left( \int_{\Omega_m} |\Phi(x) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \max_{x \in \Omega_m} |\Phi(x) - f(x)| \cdot V(\overline{\Omega}_m) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \text{suppess} |\Phi(x) - f(x)| \cdot V^{\frac{1}{p}}(\overline{\Omega}_m) \\ &= \|\Phi - f\|_{L_\infty(\overline{\Omega}_m)} \cdot V^{\frac{1}{p}}(\overline{\Omega}_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Abbildung 8.2: Wahl von  $f$ 

Hier haben wir die Abschätzung (8.2) benutzt.  
Damit gilt für  $m \rightarrow \infty, \Omega_m \rightarrow \Omega$ ,

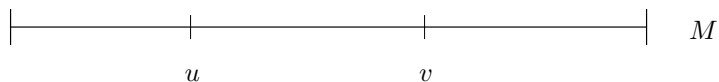
$$\begin{aligned} \|u - f\|_{L_p(\Omega)} &= \|u - \Phi + \Phi - f\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \|u - \Phi\|_{L_p(\Omega)} + \|\Phi - f\|_{L_p(\Omega)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $f$  aus der abzählbaren Vereinigung  $\bigcup_{m=1}^{\infty} P_m$  ist, die dicht in  $L_p(\Omega)$  liegt, folgt somit, dass  $L_p(\Omega)$  für beliebiges  $\Omega$  separabel ist.  $\square$

Für den Beweis des letzten Satzes in diesem Abschnitt benötigen wir Satz 5.6 über die Nichtseparabilität, der bereits in Kapitel 5.2 dargelegt wurde. Als Ergänzung dazu liefere ich eine weitere Beweismöglichkeit.

**Satz 8.7.** Sei  $M$  eine überabzählbare Teilmenge eines normierten linearen Raumes  $X$ . Falls ein  $\delta > 0$  existiert, für das  $\|u - v\| > \delta$  für jedes Paar  $u, v \in M$  mit  $u \neq v$  gilt, so ist  $X$  nicht separabel.

*Beweis.* Es sei  $\|u - v\| > \delta$  für alle  $u, v \in M$ . Wir nehmen an es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge  $M_0 = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ , so dass für alle  $\varepsilon > 0$  und für jedes  $u \in M$  ein  $u_i \in M_0$  existiert, so dass  $\|u_i - u\| < \varepsilon$  gilt.



Setzt man  $v = u_i$ , so erhält man  $\delta < \|u - u_i\| < \varepsilon$ , was zu einem Widerspruch führt, da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, also auch kleiner als  $\delta$ .  $\square$

Mit diesem Lemma können wir jetzt leicht folgenden Satz beweisen.

**Satz 8.8.**  $L_\infty(\Omega)$  ist nicht separabel.

*Beweis.* Zuerst definieren wir die Mengen  $\Omega_{rn}$  (siehe Abb. 8.3) für  $0 < r < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\Omega_{rn} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < n\}.$$

Die Familie dieser Mengen ist überabzählbar ( $r \in \mathbb{R}$ ).  $\chi_{rn}$  sei die charakteristische Funktion der Menge  $\Omega_{rn}$ , und es gilt, dass diese in  $L_\infty(\Omega)$  ist. Da  $\|\chi_{rn} - \chi_{sn}\|_\infty = 1$  für  $r \neq s$  ist, erhalten wir

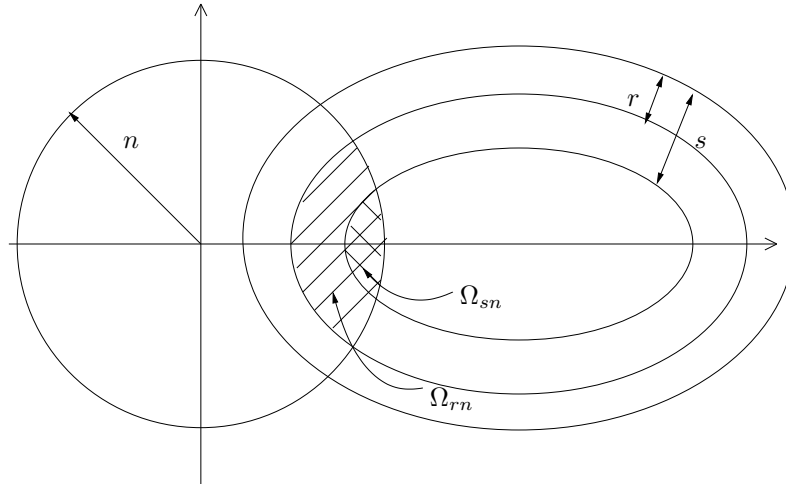


Abbildung 8.3: Die Menge  $\Omega_{rn}$

somit die Nichtseparabilität von  $L_\infty(\Omega)$ . □

### 8.3 Beweisskizze zu: $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L_p(\Omega)$

In diesem letzten Teil soll in 3 Schritten der Beweis der Aussage  $C_0^\infty$  ist dicht in  $L_p(\Omega)$  skizziert werden. Der ausführlich Beweis kann in [2] oder in [16] nachgelesen werden.

#### 1. Schritt

Ist  $u(\mathbf{x}) \in L_p(\Omega)$ , so existiert ein  $u_{k(\varepsilon)}(\mathbf{x}) \in L_p(\Omega)$  mit beschränktem Träger, so dass

$$\|u - u_{k(\varepsilon)}\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Das heißt  $u(\mathbf{x})$  kann durch eine Funktionenfolge  $u_k(\mathbf{x})$  approximiert werden.

#### 2. Schritt

Weiter wird auch  $u_k(\mathbf{x})$  durch eine Funktion  $R_\delta u_k$  in  $C_0^\infty(\Omega)$ , einem sogenannten Molifier approximiert, so dass für genügend kleine  $\delta$

$$\|u_k - R_\delta u_k\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Dabei hat  $R_\delta u_k$  folgende Gestalt:

$$R_\delta u_k = \int_{B(0,1)} u(x - \delta y) \varphi_0(y) dy$$

mit  $B(0,1) = \{y \in \mathbb{R}^n; |y| < 1\}$  und der Funktion

$$\varphi_0(\mathbf{y}) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|\mathbf{y}|^2}\right) \cdot \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{1-|\mathbf{y}|^2}\right) dx} & \text{für } |\mathbf{y}| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Die Funktion  $\varphi_0(\mathbf{y})$  wird auf Grund ihrer Form auch als Hutfunktion bezeichnet. Diese Funktion kann auch im Kapitel 6.2, Beispiel 6.13, angesehen werden.

Als Ergebnis dieses Schrittes können wir festhalten, dass  $R_\delta u_k \in C_0^\infty(\Omega)$  ist.

### 3. Schritt

Die Funktion  $R_\delta u_k$  approximiert aber nicht nur  $u_k(\mathbf{x})$  sondern auch  $u(\mathbf{x})$  in  $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ . Und wir können folgende Abschätzung machen

$$\begin{aligned}\|u - R_\delta u_k\|_{L_p(\Omega)} &= \|u - u_k + u_k - R_\delta u_k\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \|u - u_k\|_{L_p(\Omega)} + \|u_k - R_\delta u_k\|_{L_p(\Omega)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun, dass  $C_0^\infty$  dicht in  $L_p(\Omega)$  ist.



# Kapitel 9

## Sobolevräume

AUSGEARBEITET VON SABINE LORIS

### 9.1 Einführung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den sogenannten Sobolevräumen beschäftigen. Sergei L'vovich Sobolev (06.10.1908 - 03.01.1989) entwickelte 1936, während seiner Arbeit am Steklov-Institut in Moskau, die Grundlagen zu den nach ihm benannten Räumen. Im Zusammenhang mit den Sobolevräumen stellt der Begriff der schwachen Ableitung ein zentrales Thema dar. Die ersten Beispiele sollen zeigen, inwieweit die schwache Ableitung auch in der allgemeinen Analysis Anwendung findet. Als Literatur wurde benutzt [2, 11, 16, 21].

**Beispiel 9.1.** Wir haben ein lineares Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{in } \Omega, \\ u(0) = u(1) &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{9.1}$$

wobei  $\Omega$  das Intervall  $(0, 1)$  und  $b, c, f$  stetige Funktionen sind. Wir wissen, dass das Problem (9.1) eine Lösung  $u(x) \in C^2(\Omega)$  besitzt.

Wir führen den Raum  $C_0^1(\Omega)$  ein.

$$C_0^1(\Omega) = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : \text{supp } u \subset K \subset \Omega, K \text{ ist kompakte Menge}\} \tag{9.2}$$

Multiplizieren wir (9.1) mit einer Funktion  $v \in C_0^1(\Omega)$  und integrieren über  $\Omega$ , dann erhalten wir

$$\int_{\Omega} (-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \tag{9.3}$$

Genügt unsere Lösung  $u$  der Gleichung (9.1), so erfüllt sie auch Gleichung (9.3). Dasselbe gilt auch umgekehrt: Erfüllt  $u$  Gleichung (9.3), so genügt  $u$  auch Gleichung (9.1).

Unser Integral formen wir mit partieller Integration um

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx \\ &= \int_{\Omega} -u''(x)v(x)dx + \int_{\Omega} (b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx \\ &= [-u'(x)v(x)]_0^1 + \int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} (b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx. \end{aligned}$$

Da  $v$  kompakten Träger hat, verschwindet die Funktion auf dem Rand, d.h.  $v(0) = v(1) = 0$ . Damit ist  $[-u'(x)v(x)]_0^1 = 0$  und es gilt

$$\int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx + \int_{\Omega} (b(x)u'(x) + c(x)u(x))v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx. \tag{9.4}$$

Zur Lösung der Gleichung (9.4) muss  $u$  nur noch in  $C^1(\Omega)$  liegen, d.h. wir haben hier eine schwächere Differenzierbarkeitsforderung an  $u$  und brauchen daher einen Lösungsraum mit verallgemeinertem Ableitungsbegriff.

Dieses einführende Beispiel wurde [11, S.74/75] entnommen.

**Beispiel 9.2.** Im Allgemeinen gilt in der Analysis

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}.$$

Die Gleichung  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0$  ist für jede Funktion  $u = u(x)$  erfüllt, jedoch braucht  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x) = 0$  nicht definiert zu sein.

Deshalb suchen wir Funktionen, für die gilt:

- Die Ableitungen sind in einem verallgemeinerten Sinn definiert.
- Diese Ableitungen sind unabhängig von der Reihenfolge.

Mit Hilfe der partiellen Integration verallgemeinern wir den klassischen Ableitungsbegriff.

Sei  $\Omega$  eine beschränkte messbare Menge,  $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ . Seien  $u, v \in C_0^1(\Omega)$  stetig differenzierbare Funktionen und  $\Omega = (a, b)$ .

Die partielle Integration ist folgendermaßen definiert:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx := - \int_a^b u'(x)v(x)dx + [u(x)v(x)]_a^b.$$

In  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  und  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ist die partielle Integration durch

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} := - \int_{\Omega} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{n}, x_i) d\sigma$$

definiert, wobei  $d\sigma := \left\{ \det \left( \frac{\partial(\varphi_2, \varphi_3)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \det \left( \frac{\partial(\varphi_3, \varphi_1)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \det \left( \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(u, v)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} [du \wedge dv]$  das Oberflächenelement (siehe [28, S. 101]) ist und  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Der Rand  $\partial\Omega$  ist glatt (einmal stetig differenzierbar) mit  $\mathbf{n}$  als äußerem Normalenvektor von  $\partial\Omega$ .

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma.$$

Da  $v$  einen kompakten Träger hat, verschwindet die Funktion auf dem Rand. Somit verschwindet auch das Randintegral  $\int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma$ . Wir setzen  $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  und erhalten

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v d\mathbf{x}.$$

## 9.2 Schwache Ableitung

Das Ergebnis des zweiten Beispiels führt uns direkt zur Definition der schwachen Ableitung [21].

**Definition 9.3 (Schwache Ableitung).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und seien  $u, w \in L_{loc}(\Omega)$ , d.h.  $u, w$  sind über jedem beschränkten inneren Teilgebiet von  $\Omega$  integrierbar.  $D^\alpha u = w$  ist die schwache  $\alpha$ -te Ableitung von  $u$  im Gebiet  $\Omega$ , falls für alle  $v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha v d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u v d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v d\mathbf{x}$$

gilt.

Zu beachten ist hier, dass die schwache Ableitung im Gegensatz zu unserem klassischen Ableitungsbegriff auf einem Gebiet  $\Omega$  betrachtet und nicht an jedem Punkt des Gebietes untersucht wird.

Um mit dem Begriff der schwachen Ableitung vertraut zu werden, betrachten wir zwei Beispiele. Für diese brauchen wir aber noch ein Lemma, das Lemma von DuBois-Reymond. Es liefert uns die Eindeutigkeit der schwachen Ableitung  $D^\alpha f$  einer Funktion  $f$ .

**Lemma 9.4 (Lemma (Lemma von DuBois-Reymond)).** *Eine im Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lokal integrierbare Funktion  $f$  verschwindet im Gebiet  $\Omega$  fast überall genau dann, wenn  $\int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x} = 0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  ist.*

*Beweis. 1. Teil:* Aus  $f = 0$  fast überall folgt  $\int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x} = 0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

**2. Teil:** Es wird im Folgenden gezeigt, falls  $\int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x} = 0$  für alle  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  ist, dann folgt  $f = 0$  fast überall.

Wir wählen  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Dann existiert eine Kugelumgebung

$$K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon\} \text{ mit } \overline{K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \subset \Omega.$$

Sei

$$w_\varepsilon(\mathbf{x}) = c_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}\right)$$

eine Hutfunktion mit  $c_\varepsilon$  als Normierungskonstante.

Wir konstruieren zwei beliebige Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ , die die Gleichung  $\int_{\Omega} f \varphi d\mathbf{x} = 0$  erfüllen sollen.

Sei  $\mathbf{k}$  ein beliebiger Zahlenvektor, dann definieren wir

$$\varphi_1(\mathbf{x}) := \begin{cases} \cos\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) w_\varepsilon & \text{für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\varphi_2(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sin\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) w_\varepsilon & \text{für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion  $\varphi_1$  setzen wir in unsere Voraussetzung ein

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 = \int_{K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}) \cos\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}.$$

Wir sehen beim Einsetzen, dass wir nur über die Kugelumgebung  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  integrieren müssen, da die Funktion  $\varphi_1$  außerhalb der Kugel  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  verschwindet. Das Integral über  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  können wir in Fourierkoeffizienten entwickeln und erhalten für diese die Bedingung

$$\int_{K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}) \cos\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \left(f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}), \cos\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right)_{L^2(K_\varepsilon(\mathbf{x}_0))} \stackrel{!}{=} 0.$$

Setzen wir  $\varphi_2$  ein, so erhalten wir

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 = \int_{K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x}.$$

In Fourierkoeffizienten entwickelt erhalten wir hier die zweite Bedingung

$$\int_{K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}) \sin\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) d\mathbf{x} = \left(f(\mathbf{x}) w_\varepsilon(\mathbf{x}), \sin\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)\right)_{L^2(K_\varepsilon(\mathbf{x}_0))} \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit beide Bedingungen erfüllt sind, d.h. beide Fourierkoeffizienten verschwinden, muss  $f w_\varepsilon$  verschwinden.  $w_\varepsilon$  ist nach Definition eine Hutfunktion und damit in  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  ungleich 0. Daher

muss  $f = 0$  fast überall in  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  gelten. Da  $\mathbf{x}_0$  beliebig aus  $\Omega$  gewählt ist, folgt  $f = 0$  fast überall in  $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  für alle  $\mathbf{x}_0$  in  $\Omega$ .

Damit gilt

$$f = 0$$

fast überall in  $\Omega$ . □

Wir wissen nun, dass die schwachen Ableitungen in  $L_{loc}(\Omega)$  eindeutig bestimmt sind. Sie stimmen mit den klassischen Ableitungen überein, wenn diese existieren und sich in  $L_{loc}(\Omega)$  befinden.

### 9.2.1 Beispiele zur schwachen Ableitung

**Beispiel 9.5.** Wir wollen die erste schwache Ableitung der Funktion  $u(x) = |x|$  berechnen.

Sei  $\Omega = (-1, 1)$  und  $u'$  die schwache Ableitung von  $u$ .

Laut Definition erhalten wir  $u'$  aus

$$\int_{-1}^1 uv' dx = - \int_{-1}^1 u'v dx \quad \forall v \in C_0^1((-1, 1)).$$

Wir setzen  $u(x) = |x|$  ein und zerlegen das Integral über den Teilintervallen  $(-1, 0)$  und  $(0, 1)$  in zwei Integrale

$$\int_{-1}^1 |x| v'(x) dx = - \int_{-1}^0 xv'(x) dx + \int_0^1 xv'(x) dx.$$

Nun wenden wir die partielle Integration auf beide Teilintegrale an

$$- \int_{-1}^0 xv'(x) dx + \int_0^1 xv'(x) dx = - [xv(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 v(x) dx + [xv(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x) dx.$$

Da  $v$  einen kompakten Träger hat, ist  $v(-1) = 0$  und  $v(1) = 0$ . Somit verschwindet sowohl  $[xv(x)]_{-1}^0$  als auch  $[xv(x)]_0^1$ . Fassen wir die beiden Integrale wieder zusammen, erhalten wir

$$\int_{-1}^0 v(x) dx - \int_0^1 v(x) dx = - \int_{-1}^1 \text{sign}(x)v(x) dx.$$

Mit der Definition folgt jetzt

$$- \int_{-1}^1 \text{sign}(x)v(x) dx = - \int_{-1}^1 u'(x)v(x) dx.$$

Und damit gilt aufgrund des Lemmas von DuBois-Reymond, das uns die Eindeutigkeit von  $u'$  liefert:

$$u'(x) = \text{sign}(x).$$

**Beispiel 9.6.** Als zweites Beispiel wollen wir die zweite schwache Ableitung von  $u(x) = |x|$  bzw. die erste schwache Ableitung von  $u'(x) = \text{sign}(x)$  berechnen.

Sei  $\Omega = (-1, 1)$  und  $u''$  die zweite schwache Ableitung von  $u$ .

Aus unserer Definitionsgleichung ergibt sich

$$\int_{-1}^1 u'(x)v'(x) dx = \int_{-1}^1 \text{sign}(x)v'(x) dx = - \int_{-1}^1 u''(x)v(x) dx \quad \forall v \in C_0^1((-1, 1)).$$

Wir zerlegen  $\int_{-1}^1 \text{sign}(x)v'(x) dx$  in Teilintegrale

$$\int_{-1}^1 \text{sign}(x)v'(x) dx = - \int_{-1}^0 v'(x) dx + \int_0^1 v'(x) dx$$

und erhalten

$$-\int_{-1}^0 v'(x)dx + \int_0^1 v'(x)dx = -v(0) + v(-1) + v(1) - v(0).$$

$v(-1)$  und  $v(1)$  verschwinden, da  $v$  einen kompakten Träger hat. Somit gilt

$$\int_{-1}^1 \text{sign}(x)v'(x)dx = -2v(0) = -\int_{-1}^1 u''(x)v(x)dx.$$

Wir nehmen an, dass es ein  $u''(x) \in L(( -1, 1))$  so gibt, dass die Gleichung

$$2v(0) = \int_{-1}^1 u''(x)v(x)dx \quad \forall v(x) \in C_0^1((-1, 1)) \quad (9.5)$$

erfüllt ist. Wählen wir ein  $v(x) \in C_0^1((-1, 1))$  beliebig, dann liegt auch  $\tilde{v}(x) = xv(x)$  in  $C_0^1((-1, 1))$  und es muss

$$\int_{-1}^1 u''(x)\tilde{v}(x)dx = \int_{-1}^1 u''(x)xv(x)dx = 2v(0)0 = 0$$

gelten.

Das Lemma von DuBois-Reymond sagt: Das Integral  $\int_{-1}^1 u''(x)xv(x)dx$  ist genau dann 0, wenn  $u''(x)x$  gleich 0 ist fast überall.  $x$  verschwindet nur an der Stelle 0, damit ist  $u''(x) = 0$  fast überall. Mit unserem oben gewählten  $v(x)$  folgt

$$\int_{-1}^1 u''(x)v(x)dx = 0 = 2v(0)$$

für Gleichung (9.5).

Wir erzeugen hier einen Widerspruch, da  $v(0) \neq 0$  ist wegen des kompakten Trägers von  $v$ .

Als Ergebnis erhalten wir, dass für die Funktion  $\text{sign}(x)$  keine schwache Ableitung existiert.

Unser Ergebnis kann sogar verallgemeinert werden: Sprungfunktionen besitzen keine schwachen Ableitungen.

## 9.3 Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ und $H^{m,p}(\Omega)$

### 9.3.1 Der Raum $W^{m,p}(\Omega)$

**Definition 9.7** ( $W^{m,p}(\Omega)$ ). Sei  $0 \leq |\alpha| \leq m$  und  $1 \leq p < \infty$ . Mit  $W^{m,p}(\Omega)$  wird die Menge aller Funktionen  $u$  bezeichnet, die in  $L_p(\Omega)$  liegen und deren schwachen Ableitungen  $D^\alpha u$  ebenfalls Elemente der Menge  $L_p(\Omega)$  sind.

Der Raum

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega)\}$$

ist der klassische Sobolevraum. Die zugehörige Norm wird definiert durch

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \text{ und } m \geq 0.$$

**Beispiele:**

**Beispiel 9.8** ( $W^{1,p}(\Omega)$ ). Zu  $W^{1,p}(\Omega)$  gehört die Norm

$$\|u\|_{1,p} = \left( \sum_{|\alpha|=0}^1 \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

mit  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$ .

Zuerst betrachten wir  $D^\alpha u$  für  $|\alpha| = 0$  und  $|\alpha| = 1$ .

$|\alpha| = 0$ :

$$D^{(0,\dots,0)}u = u.$$

$|\alpha| = 1$ :

$$D^{(1,0,\dots,0)}u = \frac{\partial u}{\partial x_1},$$

$$D^{(0,1,0,\dots,0)}u = \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

⋮

$$D^{(0,\dots,0,1)}u = \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

Allgemein gilt

$$D^{(0,\dots,1,\dots,0)}u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

für  $|\alpha| = 1$ , wobei die 1 an der i-ten Stelle steht.

In die Norm eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p} &= \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^p d\mathbf{x} + \dots + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

**Beispiel 9.9** ( $W^{2,p}(\Omega)$ ). Zu  $W^{2,p}(\Omega)$  gehört die Norm

$$\|u\|_{2,p} = \left( \sum_{|\alpha|=0}^2 \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir suchen alle Ableitungen, für die  $|\alpha| = 2$  gilt.

Zuerst betrachten wir alle schwachen Ableitungen, bei denen zweimal nach derselben Variablen abgeleitet wird.

$$D^{(2,0,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$D^{(0,2,0,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

⋮

$$D^{(0,\dots,0,2)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Allgemein gilt

$$D^{(0,\dots,0,2,0,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

wobei die 2 an der i-ten Stelle steht.

Alle schwachen Ableitungen, bei denen nach zwei verschiedenen Variablen abgeleitet wird, sehen folgendermaßen aus:

$$D^{(1,1,0,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},$$



$$D^{(1,0,1,0,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\vdots$$

$$D^{(0,\dots,0,1,1)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}.$$

Allgemein gilt

$$D^{(0,\dots,1,\dots,1,\dots,0)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

wobei an der  $i$ -ten und an der  $j$ -ten Stelle jeweils eine 1 steht.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen und setzen dieses in die Norm von  $W^{2,p}(\Omega)$  ein, so erhalten wir

$$\|u\|_{1,p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Beispiel 9.10** ( $W^{1,2}(\Omega)$ ). Zu  $W^{1,2}(\Omega)$  gehört die Norm

$$\|u\|_{1,2} = \left( \sum_{|\alpha|=0}^1 \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit  $\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Mit unseren Ergebnissen aus dem ersten Beispiel erhalten wir

$$\|u\|_{1,2} = \left( \int_{\Omega} |u|^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Beispiel 9.11.** Beispiel 7.19 im Abschnitt 7.3.4 mit  $f(t) = t^{-s}$ ,  $\Omega = [0, 1]$ ,  $p$  fest, zeigte uns, dass  $f \in L_p(\Omega)$  ist für alle  $s < \frac{1}{p}$ . Soll auch  $f'$ , die erste schwache Ableitung von  $f$ , in  $L_p(\Omega)$  liegen, muss für  $f'(t) = -st^{-s-1}$

$$\int_{\Omega} |-st^{-s-1}|^p dt < \infty$$

gelten, wobei das Integral wie folgt berechnet werden kann

$$\int_{\Omega} |-st^{-s-1}|^p dt = \int_0^1 (st^{-s-1})^p dt = \left[ \frac{s}{-(s+1)p+1} t^{-(s+1)p+1} \right]_0^1. \quad (9.6)$$

Damit  $f'$  die Gleichung (9.6) erfüllt, muss  $-(s+1)p+1 > 0$  sein und somit

$$s < \frac{1}{p} - 1.$$

Führen wir unser Beispiel fort und betrachten  $f''$ , so gilt

$$s < \frac{1}{p} - 2.$$

Wir erhalten bei jeder folgenden schwachen Ableitung eine stärkere Bedingung für  $s$ . Diese Liste kann bis zur  $m$ -ten schwachen Ableitung fortgeführt werden:

$$f \in L_p(\Omega) \text{ für } s < \frac{1}{p},$$

$$\begin{aligned}
f' &\in L_p(\Omega) \text{ für } s < \frac{1}{p} - 1, \\
f'' &\in L_p(\Omega) \text{ für } s < \frac{1}{p} - 2, \\
&\vdots \\
f^{(m)} &\in L_p(\Omega) \text{ für } s < \frac{1}{p} - m.
\end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  liegt in  $W^{m,p}(\Omega)$ , wenn  $s < \frac{1}{p} - m$  gilt.

### 9.3.2 Einbettung von $W^{m,p}(\Omega)$ in $W^{m,q}(\Omega)$ für $p > q$

In Kapitel 7, Abschnitt 7.3.4, wurde gezeigt, wenn  $f$  in  $L_p(\Omega)$  liegt, dann folgt daraus, dass  $f$  auch in  $L_q(\Omega)$  liegt, wobei  $p > q$  und  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet ist.

Es bleibt noch zu zeigen, wenn  $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$ , dann gilt  $D^\alpha f \in L_q(\Omega)$  für  $p > q$ .

Der Beweis hierfür läuft analog zu Abschnitt 7.3.4. Die schwache Ableitung  $D^\alpha f$  setzen wir gleich einer Funktion  $g$  und zeigen mit Hilfe der Hölderungleichung und für  $g \in L_q(\Omega)$ , dass

$$\int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^q dt \leq \|g\|_{L_p(\Omega)}^q (\text{Vol}(\Omega))^{\frac{1}{r}} < \infty$$

für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$  gilt. Hier ist  $r = \frac{p}{p-q}$ .

Der Raum  $W^{m,p}(\Omega)$  ist für  $p > q$  in den Raum  $W^{m,q}(\Omega)$  eingebettet.

### 9.3.3 $W^{m,\infty}(\Omega)$

**Definition 9.12** ( $W^{m,\infty}(\Omega)$ ). Sei  $0 \leq |\alpha| \leq m$ . Mit  $W^{m,\infty}(\Omega)$  wird die Menge aller Funktionen  $u$  bezeichnet, die in  $L_\infty(\Omega)$  liegen, und deren schwachen Ableitungen  $D^\alpha u$  ebenfalls Elemente der Menge  $L_\infty(\Omega)$  sind.

Zu

$$W^{m,\infty}(\Omega) = \{u \in L_\infty(\Omega) : D^\alpha u \in L_\infty(\Omega)\}$$

wird die Norm definiert durch

$$\begin{aligned}
\|u\|_{m,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&= \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} (\text{esssup } |D^\alpha u|).
\end{aligned}$$

**Beispiel 9.13** ( $W^{1,\infty}(\Omega)$ ). Zu  $W^{1,\infty}(\Omega)$  gehört die Norm

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,\infty} &= \max_{0 \leq |\alpha| \leq 1} (\text{esssup } |D^\alpha u|) \\
&= \max \left( \text{esssup } |u|, \text{esssup } \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|, \dots, \text{esssup } \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \right).
\end{aligned}$$

### 9.3.4 Einbettung von $W^{m,\infty}(\Omega)$ in $W^{m,p}(\Omega)$

In Abschnitt 7.4 wurde für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$  gezeigt, wenn  $f \in L_\infty(\Omega)$ , dann folgt  $f \in L_p(\Omega)$ .

Noch zu zeigen bleibt, wenn  $D^\alpha f \in L_\infty(\Omega)$ , dann gilt auch  $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$  für ein beschränktes Gebiet  $\Omega$ .

Für den Beweis setzen wir die schwache Ableitung  $D^\alpha f$  gleich einer Funktion  $g$  und sehen analog zu 7.4, dass für  $g \in L_\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |g(\mathbf{t})|^p dt \leq \|g\|_{L_\infty(\Omega)}^p \int_{\Omega} 1 dt < \infty$$

gilt, falls  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet ist. Daraus folgt, dass der Raum  $W^{m,\infty}(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  enthalten ist.

Wir wissen, dass  $W^{m,p}(\Omega)$  in  $W^{m,q}(\Omega)$  eingebettet ist für  $p > q$ . Als Gesamtergebnis erhalten wir die Einbettungsreihe

$$W^{m,\infty}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega) \subset \dots \subset W^{m,1}(\Omega) \text{ für } p > q.$$

### 9.3.5 Der Raum $H^{m,p}(\Omega)$

Durch die Approximation der Funktionen  $u$  aus  $W^{m,p}(\Omega)$  durch glatte Funktionen  $v$  erhalten wir den Sobolevraum  $H^{m,p}(\Omega)$ .

**Definition 9.14** ( $H^{m,p}(\Omega)$ ). Sei  $1 \leq p < \infty$  und  $m \geq 0$ . Mit  $H^{m,p}(\Omega)$  wird die Vervollständigung der Menge aller Funktionen  $v$  bezeichnet, die auf  $\Omega$   $m$ -mal stetig differenzierbar sind und für die

$$\|v\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

gilt.

Es ist  $H^{m,p}(\Omega) =$  Vervollständigung von  $\{v \in C^m(\Omega) : \|v\|_{m,p} < \infty\}$  in der Norm

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } 1 \leq p < \infty \text{ und } m \geq 0.$$

Die Definitionen der Sobolevräume  $W^{m,p}(\Omega)$  und  $H^{m,p}(\Omega)$  werden in [2, S.44/45] eingeführt. Auf den Raum  $H^{m,p}(\Omega)$  wird im nächsten Kapitel ausführlich eingegangen.



# Kapitel 10

## Approximation der Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$ durch glatte Funktionen

AUSGEARBEITET VON ANDREA POHLNER

### 10.1 Allgemeines

Wir werden zeigen, dass die Vervollständigung des Raumes der in  $\Omega$  klassisch differenzierbaren Funktionen bis zur Ordnung  $m$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{m,p}$  gleich dem Raum  $W^{m,p}(\Omega)$  ist. Außerdem werden wir noch zeigen, dass eine Funktion, die bis zur Ordnung  $m$  schwach differenzierbar ist, unter bestimmten Voraussetzungen an die Geometrie des Gebietes durch in  $\bar{\Omega}$  glatte Funktionen, das heißt durch Funktionen, die im klassischen Sinn unendlich oft differenzierbar sind, approximiert werden kann. Es wurden die Literaturquellen [2, 6, 16] benutzt. Zuerst werden wir einige Hilfssätze einführen.

### 10.2 Hilfssätze

**Satz 10.1 (Satz von Heine-Borel).**  *$M$  sei kompakt in  $\mathbb{R}^n$ . Dann enthält jede offene Überdeckung von  $M$  bereits eine endliche Überdeckung. Ist also  $\mathcal{O}$  mit  $\alpha \in I$  ein System offener Mengen mit*

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha,$$

*dann gibt es bereits endlich viele Indizes  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$ , so dass gilt*

$$M \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_{\alpha_j} \quad \text{mit } j = 1, \dots, m.$$

**Definition 10.2.**  *$J$  sei eine nichtnegative, reellwertige Funktion aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , welche die folgenden Eigenschaften hat:*

- i)  $J(\mathbf{x}) = 0$ , falls  $|\mathbf{x}| \geq 1$ ,
- ii)  $\int_{\mathbb{R}^n} J(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann ist die Funktion

$$J_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^{-n} \cdot J\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

nichtnegativ, ein Element aus  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und erfüllt folgende Eigenschaften:

i)  $J_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$ , falls  $|\mathbf{x}| \geq \varepsilon$ ,

ii)  $\int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ .

Als Faltung von  $J_\varepsilon$  mit  $u$  wird das Integral

$$J_\varepsilon * u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

bezeichnet.

Die Funktionen  $J_\varepsilon$  sind Hutfunktionen. Ihr Träger wird je nach Wahl von  $\varepsilon$  vergrößert oder verkleinert. Damit hat die Faltung  $J_\varepsilon * u$  einen Träger, der von der Wahl von  $\varepsilon$  abhängt.

m

**Beispiel 10.3.** Als Beispiel können wir die Funktion

$$J(\mathbf{x}) = \begin{cases} k \cdot \exp[-1/(1 - |\mathbf{x}|^2)] & \text{falls } |\mathbf{x}| < 1, \\ 0 & \text{falls } |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases}$$

nennen, wobei  $k > 0$  so gewählt wird, dass  $\int_{\mathbb{R}^n} J(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$  gilt. Hier ist  $\varepsilon = 1$ .

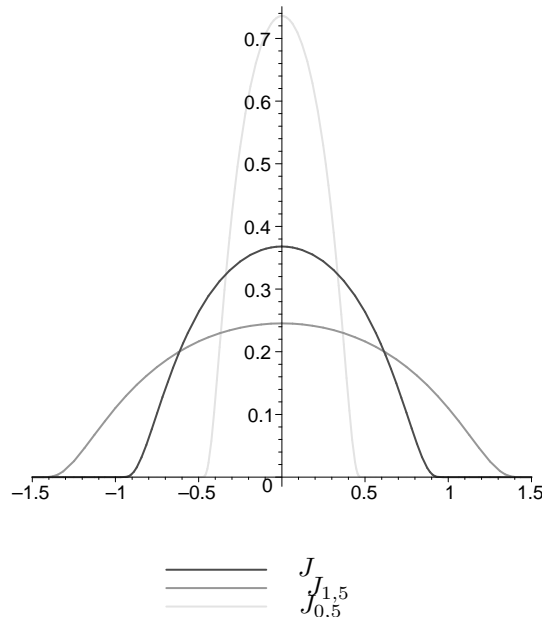


Abbildung 10.1: Veranschaulichung der Auswirkung von  $\varepsilon$  auf die Faltungsfunktion  $J$

Wir betrachten jetzt den Satz über die Zerlegung der Eins (siehe [2, S.51]), der von besonderem Interesse für die weiteren Ausführungen ist.

**Satz 10.4.** *A sei eine beliebige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathcal{O}$  ein System offener Mengen in  $\mathbb{R}^n$ , welche  $A$  überdecken, das heißt  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ . Dann existiert dort ein System  $\Psi$  von Funktionen  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , die folgende Eigenschaften haben:*

1. Für jedes  $\psi$  aus  $\Psi$  und jedes  $\mathbf{x}$  aus  $\mathbb{R}^n$  gilt  $0 \leq \psi(\mathbf{x}) \leq 1$ .
2. Alle bis auf endlich viele  $\psi$  aus  $\Psi$  verschwinden identisch in  $K$ , wobei  $K$  eine beliebige Menge ist, die in  $A$  enthalten ist.
3. Für alle  $\psi$  aus  $\Psi$  existiert ein  $U$  aus  $\mathcal{O}$ , so dass der Träger von  $\psi$  in  $U$  enthalten ist.

4. Die Summe über alle  $\psi$  aus  $\Psi$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  ist gleich 1 für alle  $\mathbf{x}$  aus  $A$ .  
Solch ein System heißt  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins für  $A$  untergeordnet zu  $\mathcal{O}$ .

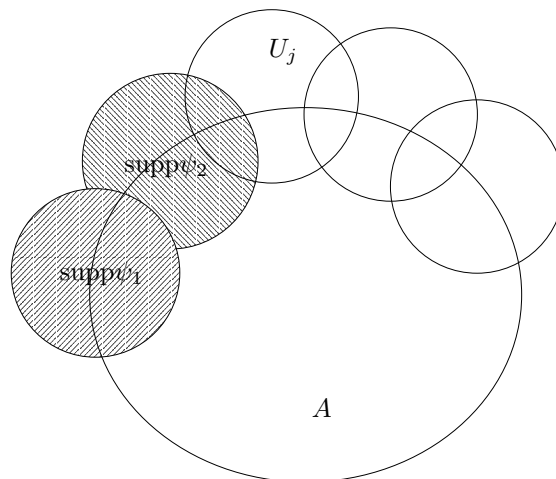


Abbildung 10.2: Zerlegung der Eins

*Beweis.* Wir folgen den Ausführungen in [2, S.51]: Wir untersuchen mehrere Fälle.

**1. Fall:  $A$  sei kompakt:**

Nach dem Satz von Heine-Borel wird  $A$  von einem System endlicher Mengen überdeckt, das heißt

$$A = \bigcup_{j=1}^n U_j \text{ mit } U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{O}.$$

Es können kompakte Mengen  $K_1 \subset U_1, \dots, K_n \subset U_n$  konstruiert werden, so dass  $A \subset \bigcup_{j=1}^n K_j$  gilt. Für  $1 \leq j \leq n$  existiert dort eine nichtnegative Funktion  $\phi_j$  aus  $C_0^\infty(U_j)$ , so dass  $\phi_j(\mathbf{x})$  größer Null ist für alle  $\mathbf{x}$  aus  $K_j$ .

Damit kann eine Funktion  $\phi$  konstruiert werden, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $\phi$  ist unendlich oft differenzierbar,
- $\phi$  ist positiv in ganz  $\mathbb{R}^n$ ,
- $\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x})$ .

Damit hat  $\Psi = \{\psi_j : \psi_j(\mathbf{x}) = \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})}, 1 \leq j \leq n\}$  die gewünschten Eigenschaften.

- Es ist  $\psi_j(\mathbf{x}) = \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})} = \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x})} \leq 1$ , da der Nenner in jedem Fall größer als der Zähler ist.

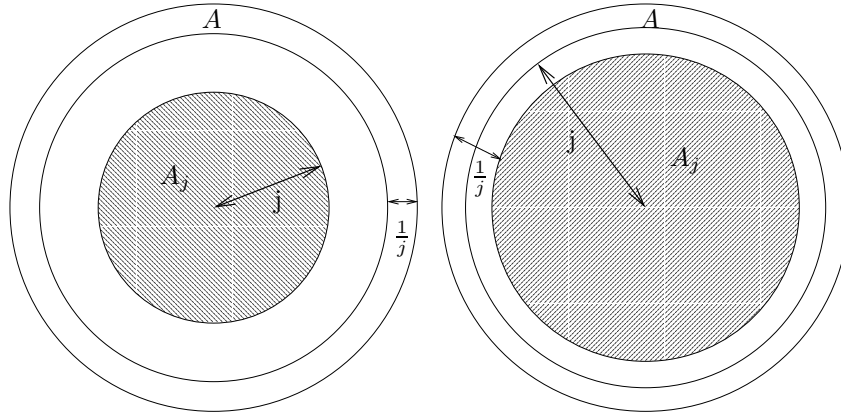
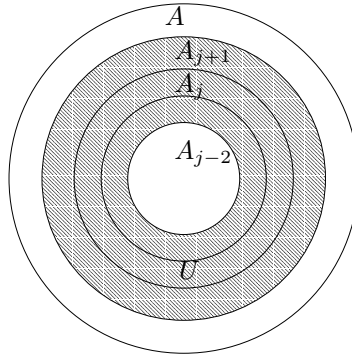
Außerdem ist  $\psi_j(\mathbf{x}) \geq 0$ , da der Nenner sowie der Zähler des Bruches positiv sind.

- Es existieren nur endlich viele Funktionen  $\phi_j$  und damit auch nur endlich viele Funktionen  $\psi_j$ .
- $\phi_j$  ist ein Element aus  $C_0^\infty(U_j)$ . Somit ist der Träger von  $\psi_j$  in  $U_j$  enthalten.
- Für alle  $\mathbf{x} \in A$  ist die Summe über alle  $\psi_j \in \Psi$  gleich eins, wie die folgende Rechnung zeigt:

$$\sum_{\psi_j \in \Psi} \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\phi_j(\mathbf{x})}{\phi(\mathbf{x})} = \frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \cdot \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \cdot \phi(\mathbf{x}) = 1.$$

**2. Fall:  $A$  sei offen:**

Dann ist  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  mit  $A_j := \{\mathbf{x} \in A : |\mathbf{x}| \leq j \text{ und } d(\mathbf{x}, \partial A) \geq \frac{1}{j}\}$ , wobei  $A_j$  kompakt ist.

Abbildung 10.3: Veranschaulichung von  $A_j$ Abbildung 10.4: Veranschaulichung von  $\mathcal{O}_j$ 

Das System  $\mathcal{O}_j = \{U \cap ((A_{j+1} \setminus \partial A_{j+1}) \cap (A_{j-2})^c) : U \in \mathcal{O}\}$  überdeckt  $A_j$  und so existiert dort eine  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins  $\Psi_j$  für  $A_j$  untergeordnet zu  $\mathcal{O}$  wie wir in Fall 1 bewiesen haben.

Die Summe  $\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\phi \in \Psi_j} \phi(\mathbf{x})$  besitzt in jedem Punkt nur endlich viele Glieder ungleich Null und ist für jedes  $\mathbf{x} \in A$  positiv.

Das System  $\Psi(\mathbf{x}) = \{\psi : \psi(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x})}{\sigma(\mathbf{x})} \text{ falls } \mathbf{x} \in A, \quad \psi(\mathbf{x}) = 0 \text{ falls } \mathbf{x} \notin A\}$  hat die beschriebenen Eigenschaften.

**3. Fall:  $A$  sei beliebig:**

Dann ist  $A \subset B = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ , wobei  $B$  offen ist. Jede Zerlegung der Einheit in  $B$  existiert ebenso in  $A$ .  $\square$



## 10.3 Approximation durch glatte Funktionen in $\Omega$

**Satz 10.5 (Theorem von Meyers und Serrin).** [19]  $\Omega$  sei beliebig, dann ist  $H^{m,p}(\Omega)$  gleich  $W^{m,p}(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

*Beweis.* Der Beweis wurde aus [2, S.52], entnommen.

1.  $H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ :

Es ist  $C^{m,p}(\Omega) := \{\phi \in C^m(\Omega) : \|\phi\|_{m,p} < \infty\}$ .

Da die schwachen und klassischen Ableitungen übereinstimmen, sofern diese existieren, gilt damit  $C^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ .

$W^{m,p}(\Omega)$  ist vollständig und  $W^{m,p}(\Omega)$  und  $C^{m,p}(\Omega)$  besitzen die gleiche Norm.  $H^{m,p}(\Omega)$ , die bis auf Normisomorphie eindeutige Vervollständigung von  $C^{m,p}(\Omega)$ , kann mit dem Abschluss von  $C^{m,p}(\Omega)$  in  $W^{m,p}$  identifiziert werden. Der Normisomorphismus ist hier die Identität.

Damit ist  $H^{m,p}(\Omega)$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  enthalten.

2.  $W^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega)$ :

Dafür ist zu zeigen:

$C^{m,p}(\Omega) := \{\phi \in C^m(\Omega) : \|\phi\|_{m,p} < \infty\}$  ist dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Es sei  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  beliebig. Also müssen wir zeigen, dass eine Funktion  $\phi \in C^m(\Omega)$  existiert für die gilt:

$$\|u(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})\|_{m,p} < \varepsilon \text{ mit } \varepsilon > 0. \quad (10.1)$$

Weiterhin wissen wir bereits, dass  $C^\infty(\Omega) \subset C^m(\Omega)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Wir suchen also eine Funktion  $\phi \in C^\infty(\Omega)$ , die die Bedingung (10.1) erfüllt.

- Lokalisierung:

Als erstes suchen wir eine passende Zerlegung der Einheit, um die Funktionen auf Teilbereiche von  $\Omega$  einzuschränken.

Sei  $\Omega_k := \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| < k \text{ und } d(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \frac{1}{k}\}$  und sei  $\Omega_0 = \emptyset$ . Dann ist  $\mathcal{O} = \{U_k : U_k = \Omega_{k+1} \cap (\Omega_{k-1})^c, k = 1, 2, \dots\}$  ein System offener Teilmengen von  $\Omega$ , welche  $\Omega$  überdecken.

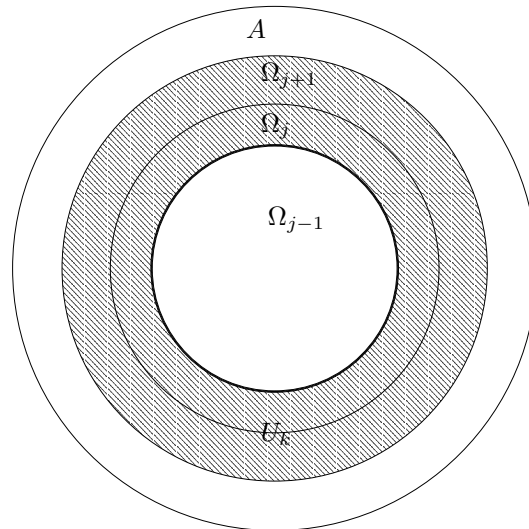


Abbildung 10.5: Veranschaulichung von  $\mathcal{O}$

Sei  $\Psi$  eine  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins für  $\Omega$  bezüglich  $\mathcal{O}$ .  $\psi_k$  sei die Summe endlich vieler  $\psi \in \Psi$ , deren kompakter Träger in  $U_k$  enthalten sind. Somit gilt

$$\psi_k \in C_0^\infty(U_k)$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\mathbf{x}) = 1 \text{ in } \Omega.$$

Nun zeigen wir, dass unsere Forderung in einem Teilbereich von  $\Omega$  erfüllt ist. Wir wählen  $\varepsilon_k$  mit  $0 \leq \varepsilon_k < \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ .

$J_{\varepsilon} * (\psi_k u)$  hat dann seinen Träger in  $\Omega_{k+2} \cap (\Omega_{k-2})^c \subseteq \vartheta_k \subset \Omega$ , da  $\varepsilon$  klein genug gewählt wurde.  $\vartheta_k$  ist kompakt. Der Träger von  $J_{\varepsilon}$  wird also höchstens in die angrenzenden Bereiche hinein vergrößert.

Außerdem ist  $\psi_k u \in W^{m,p}(\Omega)$ , da  $u \in W^{m,p}(\Omega)$ .

Wir erhalten also

$$\| J_{\varepsilon_k^*}(\psi_k u) - \psi_k u \|_{m,p,\Omega} = \| J_{\varepsilon_k^*}(\psi_k u) - \psi_k u \|_{m,p,\vartheta_k} < \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon.$$

- Erweiterung auf ganz  $\Omega$ :

Nun können wir den Beweis auf ganz  $\Omega$  ausdehnen.

Wir definieren dazu eine Funktion  $\phi$  mit  $\phi := \sum_{k=1}^{\infty} J_{\varepsilon_k^*}(\psi_k u)$ . Im kompakten Gebiet  $\Omega' \subset \Omega$  sind nur endlich viele Glieder von  $\phi$  ungleich Null. Damit ist  $\phi$  ein Element aus  $C^\infty(\Omega)$ .

Sei  $\mathbf{x} \in \Omega_k$ , dann ist  $u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$  und  $\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{k+2} J_{\varepsilon_j^*}(\psi_j u)(\mathbf{x})$ .

Wir können zeigen, dass  $\| u(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) \|_{m,p} < \varepsilon$  ist:

$$\begin{aligned} \| u - \phi \|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum_{j=1}^{k+2} \psi_j(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{k+2} J_{\varepsilon_j^*}(\psi_j u)(\mathbf{x}) \right\|_{m,p,\Omega_k} \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{k+2} (\psi_j(\mathbf{x}) \cdot u(\mathbf{x}) - J_{\varepsilon_j^*}(\psi_j u)(\mathbf{x})) \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k+2} \| (\psi_j u)(\mathbf{x}) - J_{\varepsilon_j^*}(\psi_j u)(\mathbf{x}) \|_{m,p,\Omega} \\ &= \sum_{j=1}^{k+2} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{k+2} \frac{1}{2^j} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass  $C^{m,p}(\Omega)$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt. Also ist  $W^{m,p}(\Omega)$  in  $H^{m,p}(\Omega)$  enthalten. Somit ist  $H^{m,p}(\Omega)$  gleich  $W^{m,p}(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ .

□

Es stellt sich die Frage, ob auch  $H^{m,\infty}(\Omega) = W^{m,\infty}(\Omega)$  gilt.

Dies widerlegen wir mit einem Gegenbeispiel:

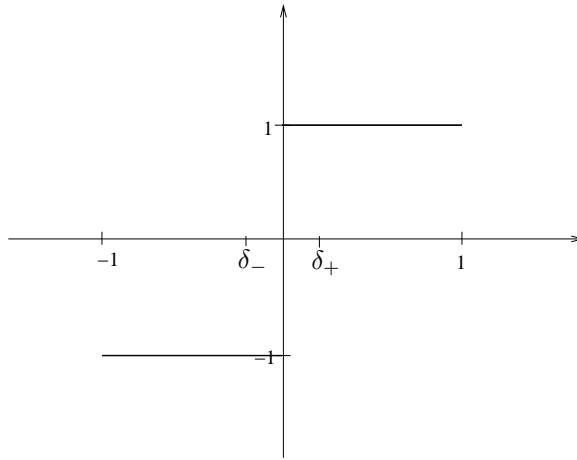
Wir wählen  $\Omega := \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$  und

$$u(x) = |x| = \begin{cases} +x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wir haben bereits bewiesen, dass  $u$  in  $W^{1,\infty}(\Omega)$  enthalten ist. Es stellt sich nun die Frage, ob  $u$  auch ein Element aus  $H^{1,\infty}(\Omega)$  ist.

Als schwache Ableitung von  $u$  erhalten wir

$$u'(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x \geq 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Abbildung 10.6: Schwache Ableitung von  $u$ 

Existiert eine Funktion  $\phi$  aus  $C^1(\Omega)$  durch deren Ableitung  $\phi'$  die schwache Ableitung von  $u$  angenähert werden kann, so ist  $u$  ein Element aus  $H^{1,\infty}(\Omega)$ . Damit suchen wir eine Funktion  $\phi$  aus  $C^1(\Omega)$  für die

$$\|\phi'(x) - u'(x)\|_{L^\infty(\Omega)} < \varepsilon$$

gilt. Das heißt das essentielle Supremum von  $|\phi'(x) - u'(x)|$  ist kleiner  $\varepsilon$ , wobei  $\varepsilon$  beliebig ist. Insbesondere ist  $|\phi'(x) - u'(x)| < \varepsilon$ .

Wir wählen  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

1. Sei  $\delta_+$  beliebig mit  $\delta_+ > 0$ .

Es sei  $|\phi'(\delta_+) - u'(\delta_+)| = |\phi'(\delta_+) - 1| < \varepsilon$ .

Wir machen eine Fallunterscheidung, um den Betrag aufzulösen.

**1. Fall:**  $\phi'(\delta_+) < u'(\delta_+) = 1$ :

Mit  $|\phi'(\delta_+) - 1| = 1 - \phi'(\delta_+) < \varepsilon$  erhalten wir

$$\phi'(\delta_+) = 1 - \tilde{\varepsilon}_1 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon}_1 < \frac{1}{2}.$$

**2. Fall:**  $\phi'(\delta_+) > u'(\delta_+) = 1$ :

Hier liefert  $|\phi'(\delta_+) - 1| = \phi'(\delta_+) - 1 < \varepsilon$  das Ergebnis

$$\phi'(\delta_+) = 1 + \tilde{\varepsilon}_2 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon}_2 < \frac{1}{2}.$$

2. Sei  $\delta_-$  beliebig mit  $\delta_- < 0$ .

Es sei  $|\phi'(\delta_-) - u'(\delta_-)| = |\phi'(\delta_-) + 1| < \varepsilon$ .

Wir machen eine Fallunterscheidung, um den Betrag aufzulösen.

**1. Fall:**  $\phi'(\delta_-) < u'(\delta_-) = -1$ :

Durch auflösen des Betrags  $|\phi'(\delta_-) + 1| = -\phi'(\delta_-) - 1 < \varepsilon$  erhalten wir in diesem Fall

$$\phi'(\delta_-) = -1 - \tilde{\varepsilon}_3 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon}_3 < \frac{1}{2}.$$

**2. Fall:**  $\phi'(\delta_-) > u'(\delta_-) = -1$ :

Dabei ergibt sich aus  $|\phi'(\delta_-) + 1| = \phi'(\delta_-) + 1 < \varepsilon$  das Ergebnis

$$\phi'(\delta_-) = -1 + \tilde{\varepsilon}_4 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon}_4 < \frac{1}{2}.$$

Ist  $\phi$  ein Element von  $C^1(\Omega)$ , dann wäre  $\phi'$  stetig.

Wir untersuchen nun die Stetigkeit von  $\phi'(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$ :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \phi'(x) = 1 \pm \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \phi'(x) = -1 \pm \tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2 \text{ mit } 0 < \tilde{\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

$\phi'(x)$  ist stetig, wenn die obigen zwei Gleichungen übereinstimmen. Aber wenn man  $\varepsilon_1$  mit  $\varepsilon_2$  gleichsetzt führt dies zu einem Widerspruch. Das heißt  $\phi$  ist kein Element aus  $C^{1,\infty}(\Omega)$ . Und somit ist  $H^{m,\infty}(\Omega) \neq W^{m,\infty}(\Omega)$ .

## 10.4 Approximation durch glatte Funktionen in $\mathbb{R}^n$

Bisher wurde gezeigt, dass Elemente aus  $W^{m,p}(\Omega)$  immer durch Funktionen aus  $C^{m,p}(\Omega)$  approximiert werden können.

### Vermutung:

Elemente aus  $W^{m,p}(\Omega)$  können auch durch beschränkte Funktionen mit beschränkten Ableitungen jeder Ordnung  $k > 0$  angenähert werden. Was bedeutet, dass  $C^k(\overline{\Omega})$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  für  $k \geq m$  ist.

Auch diese Vermutung lässt sich mit einem Gegenbeispiel widerlegen:

Wir wählen dazu  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$  und

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$u(x, y)$  ist in  $W^{1,p}(\Omega)$  enthalten.

Also suchen wir eine Funktion  $\phi$  aus  $C^1(\overline{\Omega})$  für die

$\|u(x, y) - \phi(x, y)\|_{1,p} < \varepsilon$  gilt. Diese Norm untersuchen wir nun genauer:

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|u(x, y) - \phi(x, y)\|_{1,p}^p \\ &= \int_{\Omega} |u(x, y) - \phi(x, y)|^p dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial y} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy \\ &\geq \int_{\Omega} |u(x, y) - \phi(x, y)|^p dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 |u(x, y) - \phi(x, y)|^p dx dy + \int_0^1 \int_{-1}^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 |u(x, y) - \phi(x, y)|^p dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |u(x, y) - \phi(x, y)|^p dx dy \\ &\quad + \int_0^1 \int_{-1}^0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} (u(x, y) - \phi(x, y)) \right|^p dx dy \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^0 |0 - \phi(x, y)|^p dx dy + \int_0^1 \int_0^1 |1 - \phi(x, y)|^p dx dy \\ &\quad + \int_0^1 \int_{-1}^0 \left| 0 - \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) \right|^p dx dy + \int_0^1 \int_0^1 \left| 0 - \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) \right|^p dx dy. \end{aligned}$$

Wenn die obige Ungleichung erfüllt ist gilt damit, dass  $|\phi(x, y)|^p < \varepsilon_1$  für  $-1 < x < 0, 0 < y < 1$   $|1 - \phi(x, y)|^p < \varepsilon_2$  für  $0 < x < 1, 0 < y < 1$  und  $\left| \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) \right|^p < \varepsilon_3$  ist, wobei  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$  beliebig

sind.

Man kann zeigen, dass

$$1 - \varepsilon < \|\phi\|_{L_p(\Omega_2)} < C\varepsilon$$

ist, was zu einem Widerspruch führt. Hierbei ist  $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ .

Das obige Beispiel führt uns zu der Überlegung welche Eigenschaft  $\Omega$  besitzen muss, dass sich unsere Vermutung erfüllt. Dies führt zur Segmenteigenschaft, auf die in Kapitel 11 eingegangen wird.

**Definition 10.6 (Segment-Eigenschaft).** Es existiere eine endliche offene Überdeckung  $\{U_j\}$  von  $\bar{\Omega}$ , so dass für jedes  $U_j$  mit  $U_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  ein Vektor  $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass  $(\mathbf{x} - t \cdot \mathbf{y}_i)$  in  $\Omega$  liegt für alle  $\mathbf{x}$  aus  $(\bar{\Omega} \cap U_j)$  und  $0 < t < 1$ .

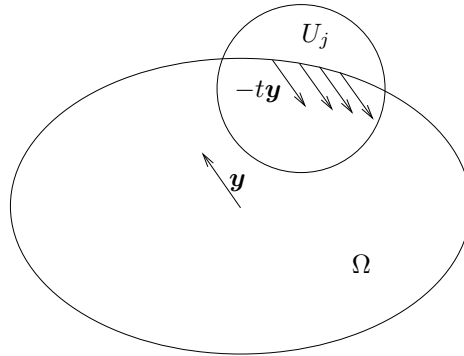


Abbildung 10.7: Segment-Eigenschaft

Besitzt also  $\Omega$  die Segment-Eigenschaft so liegt  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$ . Es gilt damit außerdem, dass  $C^k(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt.

**Satz 10.7.** Die Menge der Funktionen  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  eingeschränkt auf  $\Omega$  ist dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  für  $1 \leq p < \infty$ , wenn  $\Omega$  die Segment-Eigenschaft besitzt.

Den Beweis dieses Satzes findet man in [2, S.54ff].

**Korollar 10.8.** Es gilt:  $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Der Beweis ergibt sich direkt aus Satz 10.7.



# Kapitel 11

## Geometrische Eigenschaften von Gebieten $\Omega$ und die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

AUSGEARBEITET VON CHRISTOPH KOBER

### 11.1 Geometrische Eigenschaften

In diesem Kapitel beschreiben wir geometrische Eigenschaften von beschränkten Gebieten für die Einbettungssätze sowie Approximationseigenschaften bewiesen werden können. Hier folgen wir im Wesentlichen den Büchern [10, 31]. Anschließend beweisen wir eine Ungleichung von Poincaré-Friedrichs, die bei dem Beweis der Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen von Differentialgleichungen eine wesentliche Rolle spielt. Zu diesem Punkt wurde das Skript [21] benutzt. Wir beginnen dieses Kapitel mit der Segmenteigenschaft.

#### Segmenteigenschaft

**Definition 11.1.**  $\Omega$  hat die Segmenteigenschaft, falls für jedes  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U_{\mathbf{x}}$  und ein Vektor  $\mathbf{y}_{\mathbf{x}} \neq 0$  gefunden werden kann, so dass gilt:

$$\text{aus } \mathbf{z} \in \overline{\Omega} \cap U_{\mathbf{x}} \quad \text{folgt} \quad \mathbf{z} + t\mathbf{y}_{\mathbf{x}} \in \Omega \quad \forall 0 < t < 1.$$

#### Konstruktion eines Kegels

- a) Sei  $B(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \rho\}$  eine Kugel mit  $\mathbf{x}$  als Mittelpunkt. Unter einem Kegel  $C(\mathbf{x}, \rho, \Sigma)$  mit der Spitze in  $\mathbf{x}$  verstehen wir die Menge

$$C(\mathbf{x}, \rho, \Sigma) := B(\mathbf{x}, \rho) \cap \{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : \mathbf{y} \in \Sigma, \lambda > 0\},$$

wobei  $\Sigma$  ein offener Kreis auf der Sphäre

$$S(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in S : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \rho\}$$

von  $B(\mathbf{x}, \rho)$  ist.

- b) Für eine andere Möglichkeit einen Kegel zu konstruieren benötigt man eine Kugel  $B_{\mathbf{x}}$  mit Mittelpunkt  $\mathbf{x}$  und eine zweite Kugel  $B_r$ , die  $\mathbf{x}$  nicht enthält. Der gesuchte Kegel ist dann

$$C_{\mathbf{x}} = B_{\mathbf{x}} \cap \{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) : \mathbf{y} \in B_r, \lambda > 0\}.$$

## Kegeleigenschaft

**Definition 11.2.**  $\Omega$  hat die Kegeleigenschaft, falls zu jedem  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  ein Kegel  $C_{\mathbf{x}} \subset \Omega$  (mit Spitze in  $\mathbf{x}$ ) existiert, der kongruent zu einem gegebenen Kegel ist. Kongruent bedeutet, dass Translation und Rotation zugelassen sind.

## Gleichmäßige Kegeleigenschaft

**Definition 11.3.**  $\Omega$  hat die gleichmäßige Kegeleigenschaft, falls zu jedem  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$  eine Umgebung  $U_{\mathbf{x}} \subset \Omega$  und ein Kegel  $C_{\mathbf{x}} \subset \Omega$  existieren, der kongruent zu einem festen gegebenen Kegel  $C_0$  ist, so dass für alle  $\mathbf{z} \in \overline{\Omega} \cap U_{\mathbf{x}}$  gilt, dass  $\mathbf{z} + C_{\mathbf{x}} \subset \Omega$  ist.

**Bemerkung 11.4.** Die gleichmäßige Kegeleigenschaft bedeutet, dass jede Translation  $\mathbf{z} \in U_{\mathbf{x}} \cap \overline{\Omega}$  den Kegel  $C_{\mathbf{x}}$  in  $\Omega$  belässt.

### 11.1.1 $C^{k,\lambda}$ -Eigenschaft (Spezialfall: $C^{0,1}$ -Eigenschaft = Lipschitz-stetiger Rand)

**Definition 11.5.**  $\Omega$  hat die  $C^{k,\lambda}$ -Eigenschaft, falls zu jedem  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U_{\mathbf{x}}$ , eine orthogonale Koordinatentransformation  $A_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ , zwei Zahlen  $\alpha_{\mathbf{x}}, \beta_{\mathbf{x}} > 0$  und eine Funktion  $a_{\mathbf{x}} : \mathbb{R}^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften existiert:

1. Für die Funktion  $a_{\mathbf{x}}$  gilt:

$$a_{\mathbf{x}} \in C^{k,\lambda}(W^{r-1}(\alpha_{\mathbf{x}})).$$

Dabei bezeichnet  $W^{r-1}$  einen  $r - 1$ -dimensionalen Würfel, für den gilt

$$W^{r-1}(\alpha_{\mathbf{x}}) := \{(y_1, \dots, y_{r-1}) : |y_i| < \alpha_{\mathbf{x}}, i = 1, 2, \dots, r - 1\}.$$

2. Das Randstück  $U_{\mathbf{x}} \cap \partial\Omega$  lasse sich in den neuen Koordinaten durch die Funktion  $y_r = a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1})$  beschreiben:

$$U_{\mathbf{x}} \cap \partial\Omega = \{(y_1, \dots, y_r) : (y_1, \dots, y_{r-1}) \in W^{r-1}(\alpha_{\mathbf{x}}), y_r = a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1})\}.$$

3. Wenn wir das Randstück um  $\beta_{\mathbf{x}}$  verschieben, dann bleiben wir in  $\Omega$ :

$$U_{\mathbf{x}} \cap \Omega = \{(y_1, \dots, y_r) : |y_i| < \alpha_{\mathbf{x}}, i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1}) < y_r < a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1}) + \beta_{\mathbf{x}}\}.$$

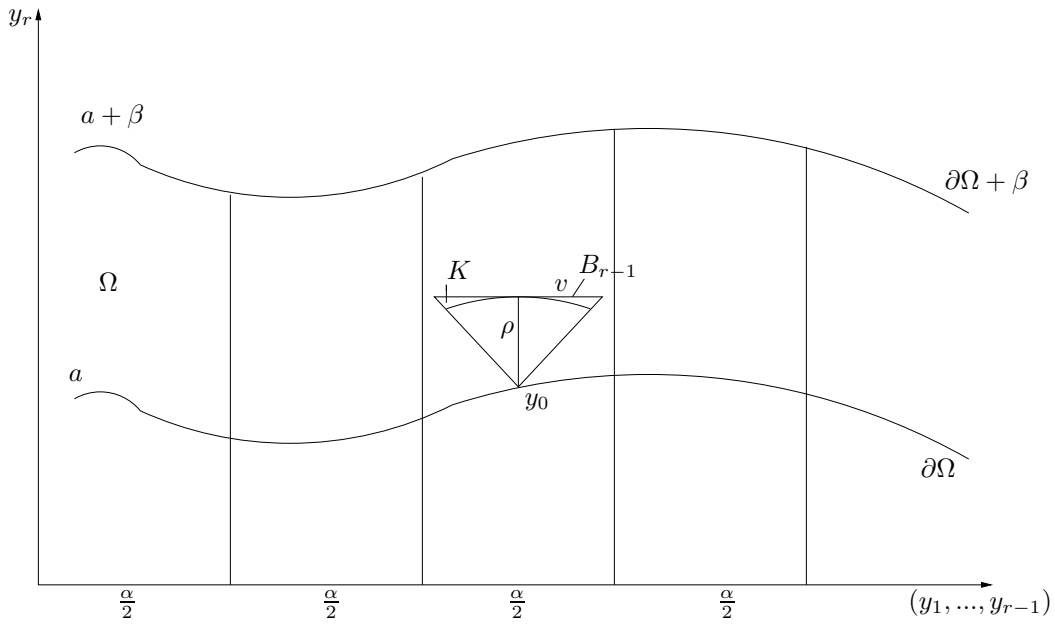
4. Wenn wir das Randstück in der umgekehrten Richtung um  $-\beta_{\mathbf{x}}$  verschieben, dann sind wir außerhalb  $\Omega$ :

$$U_{\mathbf{x}} \cap \overline{\Omega}^c = \{(y_1, \dots, y_r) : |y_i| < \alpha_{\mathbf{x}}, i = 1, 2, \dots, r - 1, \\ a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1}) - \beta_{\mathbf{x}} < y_r < a_{\mathbf{x}}(y_1, \dots, y_{r-1})\}.$$

**Satz 11.6.** Der Bereich  $\Omega$  sei beschränkt und habe die  $C^{0,1}$ -Eigenschaft. Dann besitzt  $\Omega$  auch die gleichmäßige Kegeleigenschaft.

- Beweisskizze:
1. Definition,
  2. Konstruktion des Kegels,
  3. Aufstellen einiger Bedingungen,
  4. Schluss auf die gleichmäßige Kegeleigenschaft.



Abbildung 11.1: Teil des Gebietes  $\Omega$ 

*Beweis.* Zuerst betrachten wir den Rand von  $\Omega$  (vergleiche Abbildung 11.1). Sei  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ; wir wählen  $U_{\mathbf{x}}, \alpha_{\mathbf{x}}, \beta_{\mathbf{x}}$  etc. gemäß der Definition der  $C^{k,\lambda}$ -Eigenschaft und lassen den Index aus Gründen der Vereinfachung weg.

Wir betrachten  $U \cap \Omega$ , das die Eigenschaft 3 hat und verkleinern  $\alpha$  um die Hälfte. Den so erhaltenen Bereich nennen wir  $U' \cap \Omega$ . Sei  $\delta$  der Abstand der unteren Randfläche von der oberen Randfläche von  $U' \cap \Omega$ :

$$\delta := \text{dist}(a(y_1, \dots, y_{r-1}), a(y_1, \dots, y_{r-1}) + \beta) \leq \beta.$$

Es gilt  $\delta > 0$ . Ein gemeinsamer Punkt der beiden Randflächen, hätte die gemeinsame Ordinate  $(y_1, \dots, y_{r-1})$ . Über  $(y_1, \dots, y_{r-1})$  liegen die Flächen aber um  $\beta$  auseinander. Folglich haben wir keinen gemeinsamen Punkt der beiden Randflächen.

Sei  $\mathbf{y}_0 \in \partial\Omega \cap (U' \cap \Omega)$ .  $\mathbf{y}_0$  hat die Koordinaten  $(y_1^0, \dots, y_{r-1}^0, a(y_1^0, \dots, y_{r-1}^0))$ .

Nun wird ein Kegel mit Spitze in  $\mathbf{y}_0$  konstruiert, der in  $U \cap \Omega$  liegt. Zuerst konstruieren wir einen Kegel, der senkrecht auf einer Hyperebene steht, mit den Bestimmungsstücken  $(v, \rho)$ . Den gesuchten Kegel  $C(\mathbf{y}_0, \rho, \Sigma)$  erhalten wir als Durchschnitt des Kegels  $K(v, \rho)$  mit der Kugel  $B(\mathbf{y}_0, \rho)$ :

$$C(\mathbf{y}_0, \rho, \Sigma) := K(v, \rho) \cap B(\mathbf{y}_0, \rho). \quad (11.1)$$

Als Hauptachse von  $K$  nehmen wir die zur  $y_r$ -Achse parallele Gerade, die durch die Spitze  $\mathbf{y}_0$  von  $K$  geht. Im Abstand  $\rho$  von  $\mathbf{y}_0$  auf dieser Geraden legen wir senkrecht eine Hyperebene und zeichnen auf ihr eine Kugel  $B_{r-1}$  mit dem Radius  $v$ . Der Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der zu  $y_r$ -Achse parallelen Geraden mit der Hyperebene.

Den Kegel  $K$  erhalten wir, indem wir die Punkte von  $B_{r-1}$  mit  $\mathbf{y}_0$  verbinden. Wir unterwerfen die Bestimmungsstücke  $(v, \rho)$  des Kegels  $K$  den Bedingungen

$$0 < \rho < \delta, \quad 0 < v < \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\rho}{v} > k, \quad (11.2)$$

wobei  $k$  die Lipschitzkonstante der Funktion  $a(\mathbf{y}') = a(y_1, \dots, y_{r-1})$  ist. Da  $a \in C^{0,1}(W^{r-1}(\alpha))$  ist, gibt es ein  $0 < k < \infty$  derart, dass für alle  $\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_2 \in W^{r-1}(\alpha)$  gilt

$$|a(\mathbf{y}'_1) - a(\mathbf{y}'_2)| \leq k|\mathbf{y}'_1 - \mathbf{y}'_2|_{r-1}. \quad (11.3)$$

Die Bedingungen (11.2) gewährleisten, dass der durch (11.1) gegebene Kegel  $C$  in  $U \cap \Omega$  liegt. Wir prüfen dies nach.

Die Bedingung  $\rho < \delta$  bewirkt in Verbindung mit  $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, \dots, y_{r-1}^0, a(y_1^0, \dots, y_{r-1}^0))$ , dass der Kegel  $C$  die obere Randfläche  $a + \beta$  nicht treffen kann.  $v < \frac{\alpha}{2}$  hat zur Folge, dass  $C$  über dem Würfel  $W(\alpha)$  liegt, aus  $\frac{\rho}{v} > k$  folgt mit (11.3), dass der einzige Schnittpunkt von  $C$  mit der unteren Randfläche  $a$  der Punkt  $\mathbf{y}_0$  ist, das alles zusammen ergibt, dass

$$C \subset U \cap \Omega.$$

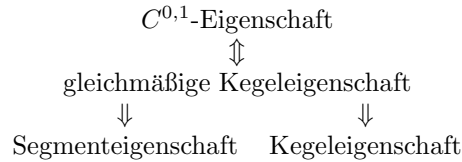
Die Bedingungen (11.2) sind immer erfüllbar, dies folgt trivial aus  $\delta > 0, \alpha > 0$  und  $0 < k < \infty$ . Da die Bedingungen (11.2) nicht von  $y_0$  abhängen, sind alle Kegel  $C, y_0 \in \partial\Omega \cap U'$ , parallel oder translationsgleich.

Sei  $U''$  die Umgebung, die den Zahlen  $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$  entspricht und wir zusätzlich fordern, dass  $\rho < \frac{\beta}{2}$ , dann liegen für  $z \in U'' \cap \Omega$  die Kegel  $z + C$  alle in  $\Omega$ . Damit haben wir gezeigt, dass  $\Omega$  die gleichmäßige Kegeleigenschaft erfüllt.  $\square$

Dieser Satz gilt auch in der umgekehrten Richtung, wie der folgende Satz sagt.

**Satz 11.7.** [10, S.12] *Eine beschränkte, offene Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbf{R}^n$  besitzt die gleichmäßige Kegeleigenschaft genau dann, wenn ihr Rand Lipschitz-stetig ist.*

### 11.1.2 Zusammenfassung



## 11.2 Poincaré-Friedrichs Ungleichung

Wir wiederholen die Definition der Sobolevräume für  $p = 2$ , die in Kapitel 9.3 eingeführt wurden. Im Weiteren folgen wir den Ausführungen, die in [21] zu finden sind.

**Definition 11.8.** Sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Der lineare Raum

$$W^{k,2}(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : D^\alpha u \in L_2(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\},$$

versehen mit den Skalarprodukt

$$(u, v)_k = (u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)}$$

und der Norm

$$\|u\|_k = \|u\|_{W^{k,2}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11.4)$$

heißt Sobolev-Raum.  $W^{k,2}(\Omega)$  ist ein Hilbertraum.

**Definition 11.9.**  $\overset{\circ}{W}^{k,2}(\Omega)$  ist die Abschließung von  $C_0^\infty(\Omega)$  (siehe Kapitel 8.2) bezüglich der Norm 11.4.

**Satz 11.10.** *Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet. In  $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$  gilt die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung*

$$\|u\|_k \leq C|u|_k,$$

wobei

$$|u|_k = \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

die Seminorm in  $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$  bezeichnet.

*Beweis.* Sei  $u$  zunächst ein Element aus  $C_0^\infty(\Omega)$ . Da  $\Omega$  beschränkt ist, gibt es eine Kugel  $K_R(0)$ , so daß  $\Omega \subset K_R(0)$  ist. Für jeden Punkt  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  gilt, dass  $x_1 \in [-R, R]$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\zeta, x_2, \dots, x_n) d\zeta \right|^2 \\ &\stackrel{\text{Schwarz-Ungleichung}}{\leq} (x_1 + R) \int_{-R}^{x_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\zeta, \dots) \right|^2 d\zeta \\ &\leq 2R \int_{-R}^R \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\zeta, \dots) \right|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Nach Integration über  $\Omega$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx &= \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2R \int_{\Omega} \int_{-R}^R \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\zeta, \dots, x_n) \right|^2 d\zeta d\mathbf{x} \\ &= 2R \int_{x_1=-R}^R \int_{x_2, \dots, x_n=-R}^R \int_{\zeta=-R}^R \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(\zeta, \dots, x_n) \right|^2 d\zeta d\mathbf{x} \\ &= 4R^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 4R^2 |u|_1^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + |u|_1^2 \leq 4R^2 |u|_1^2 + |u|_1^2 = (4R^2 + 1) |u|_1^2.$$

Allgemeiner gilt:

$$\begin{aligned} |u|_{j-1}^2 &\leq 4R^2 |u|_j^2, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \|u\|_k^2 &= \sum_{j=0}^k |u|_j^2 \\ &\leq ((4R^2)^k + (4R^2)^{k-1} + \dots + 4R^2 + 1) |u|_k^2 \\ &= \left( \frac{(4R^2)^{k+1} - 1}{4R^2 - 1} \right) |u|_k^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein  $\mathring{W}^{k,2}(\Omega)$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  finden wir ein Element  $\tilde{u} \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\|u - \tilde{u}\| < \varepsilon$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_k &\leq \|u - \tilde{u}\|_k + \|\tilde{u}\|_k \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\ &\leq \varepsilon + C|\tilde{u}|_k \\ &\leq \varepsilon + C|\tilde{u} - u|_k + C|u|_k \\ &\leq \varepsilon(1 + C) + C|u|_k \end{aligned}$$

und folglich  $\|u\|_k \leq C|u|_k$ . □



# Kapitel 12

## Fortsetzungen und Einbettungen von Sobolevräumen

AUSGEARBEITET VON BORIS DALLINGER

Bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen und ihren Lösungen sind die Sobolevräume bestens geeignet. Dabei spielen die Fortsetzungs- und Einbettungssätze eine grundlegende Rolle. Wir werden uns zunächst mit den Fortsetzungen beschäftigen, bevor wir zu den Einbettungssätzen von Sobolev kommen.

Als Literatur wurde benutzt [2, 16, 31].

### 12.1 Fortsetzungen von Funktionen

**Definition 12.1 (Fortsetzung).** Eine Funktion  $U \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  ist eine Fortsetzung von  $u \in W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ , falls gilt:

$$U(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Notwendige Bedingung für die Existenz einer stetigen Fortsetzung von stetigen Funktionen ist, dass  $\Omega$  abgeschlossen ist.

Dies wird im Folgenden durch Beispiele illustriert.

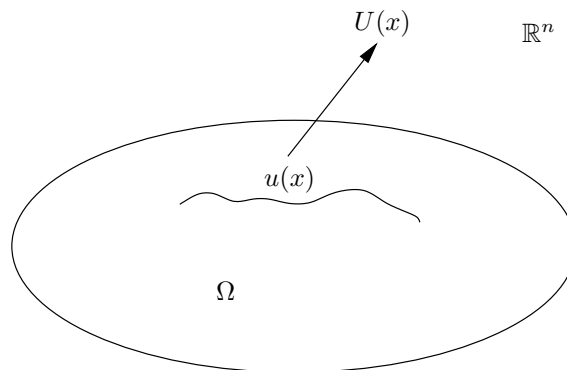


Abbildung 12.1: Fortsetzung

Die Funktion  $u$  könnte man auch fortsetzen, wenn sie auf dem Rand  $\partial\Omega$  definiert ist (siehe Abb. 12.2).

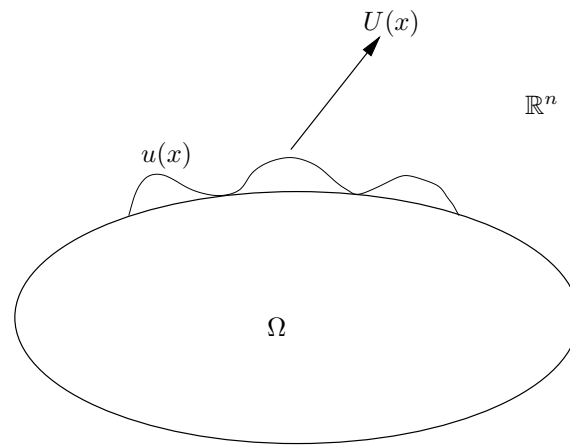


Abbildung 12.2: Fortsetzung

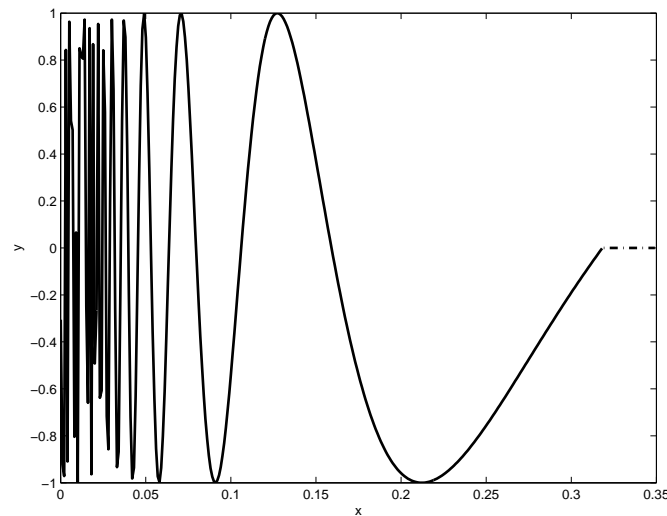
Der triviale Fall einer Fortsetzung tritt dann ein, wenn wir unsere Fortsetzung  $U$  außerhalb von  $\Omega$  Null setzen.

Wir werden nun zwei Beispiele sehen, bei denen stetige Funktionen nicht stetig fortgesetzt werden können, da  $\Omega$  nicht abgeschlossen ist.

**Beispiel 12.2.**

- Wir betrachten die Funktion  $f$  (siehe Abb. 12.3)

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x < \frac{1}{\pi}, \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Abbildung 12.3: Funktion  $f(x)$ 

Je mehr die  $x$ -Werte sich der 0 nähern, desto stärker oszilliert die Funktion  $f$ , da sie an der Stelle  $x = 0$  nicht definiert ist. Folglich können wir bei  $x = 0$  nicht fortsetzen, zumal die Voraussetzung, dass  $M = (0, \frac{1}{\pi}]$  abgeschlossen ist, nicht erfüllt ist.

2. Betrachten wir eine zweite Funktion  $g$  auf dem Intervall  $M = (0, 5]$

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Hier ist die Abgeschlossenheit ebenso nicht erfüllt, weil die Funktion bei  $x = 0$  nicht definiert ist. Man könnte die Funktion z.B. auf dem Intervall  $M = [1, 5]$  fortsetzen, da die Voraussetzung dann erfüllt ist.

Der folgende Satz beschreibt die Existenz von Fortsetzungen von Hölder-stetigen Funktionen.

**Satz 12.3 (J. E. Björk, 1969).** [16, S.48] Sei  $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$  und  $u \in C^{0,\lambda}(M)$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ , dann existiert eine Fortsetzung  $U \in C^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n)$  von  $u$ , so dass gilt:

$$\|U\|_{0,\mathbb{R}^n} = \|u\|_{0,M}, \quad (12.1)$$

$$H_{\lambda,\mathbb{R}^n}(U) = H_{\lambda,M}(u). \quad (12.2)$$

Daher ist  $\|u\|_{0,M} = \sup_{\mathbf{x} \in M} |u(\mathbf{x})|$ ,

$$H_{\lambda,M}(u) = \sup_{\mathbf{x} \in M} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda}.$$

*Beweis.*

i) Konstruktion einer Hilfsfunktion  $v(\mathbf{x})$ :

Da  $M$  abgeschlossen ist, existiert das Supremum an einer Stelle  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  aus dieser Menge. Eingesetzt in die Hölderkonstante haben wir:

$$H_{\lambda,M}(u) = \frac{|u(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{y}_0)|}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda} < \infty.$$

Wir wählen nun  $u(\mathbf{y}_0) \geq u(\mathbf{x}_0)$ , damit der Betrag im Zähler der Hölderkonstante wegfällt und können somit nach  $u(\mathbf{x}_0)$  auflösen:

$$\begin{aligned} H_{\lambda,M}(u) &= \frac{u(\mathbf{y}_0) - u(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda} \\ H_{\lambda,M}(u) |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda &= u(\mathbf{y}_0) - u(\mathbf{x}_0) \\ u(\mathbf{x}_0) &= \underbrace{u(\mathbf{y}_0) - H_{\lambda,M}(u) |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda}_{\sup_{\mathbf{y} \in M} (u(\mathbf{y}) - H_{\lambda,M} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda)}, \end{aligned}$$

Damit ist die Einführung folgender Funktion motiviert:

$$v(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \in M} (u(\mathbf{y}) - H_{\lambda,M} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda). \quad (12.3)$$

ii) Wir definieren  $U(\mathbf{x})$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$U(\mathbf{x}) = \begin{cases} v(\mathbf{x}) & \text{für } \mathbf{x} \text{ mit } |v(\mathbf{x})| \leq \|u\|_{0,M}, \\ -\|u\|_{0,M} & \text{für } \mathbf{x} \text{ mit } v(\mathbf{x}) < -\|u\|_{0,M}. \end{cases} \quad (12.4)$$

$$(12.5)$$

Aus Gleichung (12.3) folgt, dass  $v(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in M$  gilt. Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall:  $v(\mathbf{x}_0) > u(\mathbf{x}_0)$  für ein  $\mathbf{x}_0 \in M$ .

Dann existiert ein  $\mathbf{y}_0 \in M$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}_0) - H_{\lambda, M}(u) |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda &> u(\mathbf{x}_0) \\ u(\mathbf{y}_0) - u(\mathbf{x}_0) &> H_{\lambda, M}(u) |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda \\ \frac{u(\mathbf{y}_0) - u(\mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^\lambda} &> H_{\lambda, M}(u). \end{aligned}$$

Der 1. Fall führt also zu einem Widerspruch mit der Definition von  $H_{\lambda, M}(u)$ . Also kommt nur noch der 2. Fall in Frage.

2. Fall:  $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$  für alle  $\mathbf{x} \in M$ .

Aus der Definition (12.4) folgt:

$$U(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{x} \in M.$$

Damit ist  $U$  Fortsetzung von  $u$ . Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \|U\|_{0, \mathbb{R}^n} &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |U(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \begin{cases} |v(\mathbf{x})| & \text{für } \mathbf{x} \text{ mit } |v(\mathbf{x})| \leq \|u\|_{0, M}, \\ \|u\|_{0, M} & \text{für } \mathbf{x} \text{ mit } v(\mathbf{x}) < -\|u\|_{0, M} \end{cases} \\ &= \|u\|_{0, M}. \end{aligned}$$

Somit ist (12.1) bewiesen.

iii) Wir müssen noch (12.2) zeigen:

Wir nehmen an, dass  $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$  gilt. Dann folgt aus (12.4):

$$0 < U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) \leq v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}).$$

Wir führen nun erneut eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: Für  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{y}$  folgt mit der Bedingung

$|v(\mathbf{x})| \leq \|u\|_{0, M}$  bzw.  $|v(\mathbf{y})| \leq \|u\|_{0, M}$  aus Gleichung (12.4):

$$U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}) \leq v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}).$$

2. Fall: Für  $\mathbf{x}$  mit  $|v(\mathbf{x})| \leq \|u\|_{0, M}$  aus (12.4) und für  $\mathbf{y}$  mit  $v(\mathbf{y}) < -\|u\|_{0, M}$  aus (12.5) folgt:

$$U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) = v(\mathbf{x}) - (-\|u\|_{0, M}) = v(\mathbf{x}) + \|u\|_{0, M} \leq v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}).$$

3. Fall: Für  $\mathbf{x}$  mit  $v(\mathbf{x}) < -\|u\|_{0, M}$  aus (12.5) und für  $\mathbf{y}$  mit  $|v(\mathbf{y})| \leq \|u\|_{0, M}$  aus (12.4) folgt:

$$U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) = -\|u\|_{0, M} - v(\mathbf{y}) \leq \|u\|_{0, M} - \|u\|_{0, M} = 0,$$

d.h. der dritte Fall trifft nicht zu. Es war vorausgesetzt, dass  $U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) > 0$  ist.

4. Fall: Für  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{y}$  folgt mit

$v(\mathbf{x}) < -\|u\|_{0, M}$  bzw.  $v(\mathbf{y}) < -\|u\|_{0, M}$  aus (12.5):



$U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{y}) = -\|u\|_{0,M} + \|u\|_{0,M} = 0$ , was wieder nicht erlaubt ist.

Wir wissen nun für welche  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  unsere Ungleichung definiert ist und können somit weiter auflösen,

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}) &= \sup_{z \in M} (u(z) - H_{\lambda,M}(u) |\mathbf{x} - z|^\lambda) - \sup_{z \in M} (u(z) - H_{\lambda,M}(u) |\mathbf{y} - z|^\lambda) \\ &\leq H_{\lambda,M}(u) \sup_{z \in M} (|\mathbf{y} - z|^\lambda - |\mathbf{x} - z|^\lambda) \\ &\leq H_{\lambda,M}(u) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt durch  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda$  dividieren, erhalten wir die Hölderkonstante,

$$\begin{aligned} \frac{v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} &\leq H_{\lambda,M}(u) \\ \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} \right) &\leq H_{\lambda,M}(u) \\ H_{\lambda, \mathbb{R}^n}(U) &\leq H_{\lambda,M}(u). \end{aligned}$$

Da  $U$  eine Fortsetzung von  $u$  ist, gilt auch die Beziehung:

$$H_{\lambda, \mathbb{R}^n}(U) \geq H_{\lambda,M}(u).$$

Somit haben wir  $H_{\lambda, \mathbb{R}^n}(U) = H_{\lambda,M}(u)$  gezeigt und der Beweis ist fertig.

□

Wir kommen jetzt zu den Sobolevräumen. Der folgende Satz ist in [31, S.100] zu finden.

**Satz 12.4 (Calderon-Zygmund).** *Es sei  $\Omega$  beschränkt und erfülle die gleichmäßige Kegelbedingung. Dann existiert für  $l = 0, 1, \dots$ , ein linearer, stetiger Fortsetzungsoperator*

$$F_\Omega : W^{l,2}(\Omega) \rightarrow W^{l,2}(\mathbb{R}^n).$$

Bevor wir den Satz beweisen, müssen wir zuerst einen linearen, stetigen Operator definieren.

**Definition 12.5 (Linearer, stetiger Operator).**

1. Operator: Eine Abbildung  $A : X \rightarrow Y$  bezeichnen wir als Operator, wobei  $X$  und  $Y$  Funktionenräume sind.
2. Linearität:
  - (a)  $A(x + y) = Ax + Ay$  (Additivität),
  - (b)  $A(\lambda x) = \lambda A(x)$  (Homogenität).
3. Stetigkeit:

$$\text{Aus } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \text{ folgt } \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n - Ax\| = 0.$$

*Beweis.* Den Beweis werden wir nur für den Fall  $l = 0$  durchführen. Der Beweis für  $l \geq 1$  kann in [31, S.100ff] nachgelesen werden. Unser Fortsetzungsoperator  $F_\Omega : W^{0,2}(\Omega) \rightarrow W^{0,2}(\mathbb{R}^n)$  ist äquivalent zu  $F_\Omega : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ . Wir definieren nun einen linearen, stetigen Fortsetzungsoperator, der die Funktion  $u \in L_2(\Omega)$  auf die Funktion  $\tilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$  abbildet:

$$F_\Omega : u \rightarrow \tilde{u}.$$

Die Funktion  $\tilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$  definieren wir folgendermaßen:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

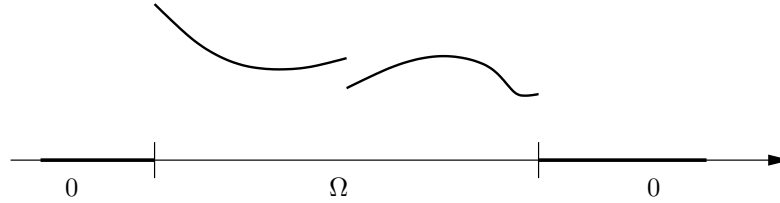


Abbildung 12.4: Funktion  $\tilde{u}(x)$

Nun stellt sich die Frage, ob  $F_\Omega$  linear und stetig ist?

1.1 Linearität: Sei  $u, v \in W^{0,2}(\Omega)$ , dann müssen wir für die Linearität die Additivität und die Homogenität zeigen:

(a) Additivität:

$$\begin{aligned} F_\Omega(u) + F_\Omega(v) &= u + v, \\ F_\Omega(u + v) &= u + v, \end{aligned}$$

Aus den zwei Gleichungen folgt:

$$F_\Omega(u + v)(x) := \begin{cases} F_\Omega u(x) + F_\Omega v(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

(b) Homogenität:

$$\begin{aligned} \lambda F_\Omega(u) &= \lambda u, \\ F_\Omega(\lambda u) &= \lambda u. \end{aligned}$$

Aus den zwei Gleichungen folgt:

$$F_\Omega(\lambda u)(x) := \begin{cases} \lambda F_\Omega u(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

1.2 Stetigkeit:

Zu zeigen: Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L_2(\Omega)$  mit  $u_n \rightarrow u \in L_2(\Omega)$ , dann folgt:  $F_\Omega(u_n) \rightarrow F_\Omega(u)$ . D.h. wir haben  $\|u_n - u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $(\int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$ . Also müssen wir die Stetigkeit bezüglich der  $L_2$ -Norm im Bildraum noch zeigen:  $\|F_\Omega(u_n) - F_\Omega(u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned}
\| F_{\Omega}(u_n) - F_{\Omega}(u) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} | F_{\Omega}(u_n)(\mathbf{x}) - F_{\Omega}(u)(\mathbf{x}) |^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \underbrace{| F_{\Omega}(u_n)(\mathbf{x}) - F_{\Omega}(u)(\mathbf{x}) |^2}_{=0} d\mathbf{x} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} | F_{\Omega}(u_n)(\mathbf{x}) - F_{\Omega}(u)(\mathbf{x}) |^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\Omega} \underbrace{| F_{\Omega}(u_n)(\mathbf{x}) - F_{\Omega}(u)(\mathbf{x}) |^2}_{=u_n(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left( \int_{\Omega} | u_n(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}) |^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| u_n - u \|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

□

## 12.2 Einbettungen von Funktionen

Mit den folgenden Einbettungssätzen wird gezeigt, wie die verschiedenen Räume, speziell die Sobolevräume, ineinander eingebettet sind. Es wird sehr schnell klar, dass die Existenz einer Einbettung von der Ableitungsordnung  $m$ , den Potenzen  $p$  und  $q$  und der Raumdimension  $n$  abhängig ist. Ein Hauptkriterium für die Existenz einer Einbettung ist, dass immer nur Räume mit einer höheren Ableitungsordnung in einen Raum mit einer niedrigeren Ableitungsordnung eingebettet werden können. Bevor wir zu den Einbettungssätzen von Sobolev kommen, müssen wir zuerst definieren, was wir unter einer Einbettung verstehen.

**Definition 12.6 (Einbettung).**  $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$  heißt Einbettung, wenn jede Äquivalenzklasse aus  $W^{m,p}(\Omega)$  eine Funktion enthält, die sich in  $W^{j,q}(\Omega)$  befindet und dass der identische Operator

$$I : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{j,q}(\Omega),$$

$$Iu = u \quad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

stetig ist.

Folglich existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass

$$\| Iu \|_{W^{j,q}(\Omega)} = \| u \|_{W^{j,q}(\Omega)} \leq C \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

gilt.

**Satz 12.7 (Sobolev-Einbettungssätze).** Sei  $\Omega$  eine beschränkte Menge in  $\mathbb{R}^n$ , die die Kegeleigenschaft erfüllt, dann gelten folgende Sätze:

- (1)  $W^{j+m,p}(\Omega) \subset W^{j,q}(\Omega)$  für  $mp < n$  und  $p \leq q \leq np/(n - mp)$ ,
- (2)  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  für  $mp < n$  und  $p \leq q \leq np/(n - mp)$ ,
- (3)  $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  für  $mp = n$  und  $p \leq q \leq \infty$ ,

(4)  $W^{m,p}(\Omega) \subset C^j(\overline{\Omega})$  für  $(m-j)p > n$  und  $j \geq 0$ ,

(5)  $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$  für  $(m-j-1)p = n$  und  $0 < \lambda < 1$ .

Weitere Einbettungssätze findet man in [2, S.97f], [16, S.300] und [31, S.110ff].

**Beispiele:**

1.  $W^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  für  $2 \leq q \leq 2n/(n-2)$  und  $n > 2$ ,

2.  $W^{2,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  für  $2 \leq q \leq 2n/(n-4)$  und  $n > 4$ ,

3.  $W^{1,2}(\Omega) \not\subset C(\overline{\Omega})$  aber  $W^{2,2}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$  für  $n = 2, 3$ ,

4.  $W^{m,2}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$  für  $m > n/2$ ,

5.  $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$  für  $n = 2$  und  $p > 2$ .

# Kapitel 13

## Die Multiplikation und äquivalente Normen in Sobolevräumen

AUSGEARBEITET VON HEIKE TSCHESCHNER

In diesem Kapitel wollen wir eine Multiplikation in Sobolevräumen einführen, was nicht so ohne weiteres möglich ist. Damit können wir zeigen, dass Sobolevräume unter gewissen Voraussetzungen Banach-Algebren sind. Danach wenden wir uns äquivalenten Normen zu, und betrachten Beispiele dazu.

Es wurden folgende Literaturquellen verwendet [1, 25, 29].

### 13.1 Wann ist $W^{m,p}(\Omega)$ eine Banach-Algebra ?

**Definition 13.1.** Ein linearer Raum  $X$  mit zusätzlicher binärer Operation  $\cdot$  von  $X \times X \rightarrow X$  (Multiplikation), die folgende Eigenschaften erfüllt,

1.  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ , Assoziativität
2.  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ,  
 $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ , Distributivität  
bezügl. Addition
3.  $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$ ,  $\alpha \in K$ ,  $K$  sei Körper
4. es existiert ein Einselement  $e \in X$  mit  $e \cdot x = x \cdot e = x \quad \forall x \in X$

heißt  $K$ -Algebra.

Wird  $X$  mit einer Norm ausgestattet, so dass

5.  $\|e\| = 1$ ,
6.  $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\|$

gilt, dann heißt  $X$  normierte Algebra oder Banach-Algebra.

#### 13.1.1 Die Multiplikation in $W^{m,p}(\Omega)$

**Definition 13.2.** Es seien  $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$ . Wir definieren eine binäre Operation (Multiplikation) durch

$$\cdot : (u, v) \mapsto u \cdot v$$

als punktweise Multiplikation zweier Funktionen aus  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Der Raum  $W^{m,p}(\Omega)$  ist in der Regel nicht abgeschlossen bezüglich der Multiplikation, da das Produkt zweier Funktionen aus  $L_p(\Omega)$  nicht immer in  $L_p(\Omega)$  liegt, was folgendes Beispiel zeigt: Es sei  $\Omega = [0, 1]$ . Wir betrachten dort die Funktion  $u = x^\lambda$ . Analog zu 7.3.4 (dort ist  $\lambda = -s$ , untersuchen wir, welche Bedingungen diese Funktion erfüllen muss, damit sie in  $L_p(\Omega)$  liegt. Es muss gelten, dass

$$\int_0^1 x^{\lambda p} dx = \left[ \frac{x^{\lambda p + 1}}{\lambda p + 1} \right]_0^1 < \infty$$

ist.

Dieses Integral existiert nicht für

$$\begin{aligned} \lambda p + 1 &\leq 0, \\ \lambda &\leq -\frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Also ist  $u \in L_p(\Omega)$  für  $\lambda > -\frac{1}{p}$ . Analog liegen zwei Funktionen  $u = x^{\lambda_1}$  und  $v = x^{\lambda_2}$  in  $L_p(\Omega)$  für

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> -\frac{1}{p}, \\ \lambda_2 &> -\frac{1}{p}. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Nun untersuchen wir das Produkt von  $u$  und  $v$ ,  $u \cdot v = x^{\lambda_1 + \lambda_2}$ . Wieder muss gelten

$$\int_0^1 x^{(\lambda_1 + \lambda_2)p} dx = \left[ \frac{x^{p(\lambda_1 + \lambda_2) + 1}}{p(\lambda_1 + \lambda_2) + 1} \right]_0^1 < \infty.$$

Das Integral existiert nicht für  $\lambda_1 + \lambda_2 \leq -\frac{1}{p}$ . Also ist  $u \cdot v \in L_p(\Omega)$  für

$$\lambda_1 + \lambda_2 > -\frac{1}{p}. \tag{13.2}$$

Aus (13.1) folgt aber andererseits, dass

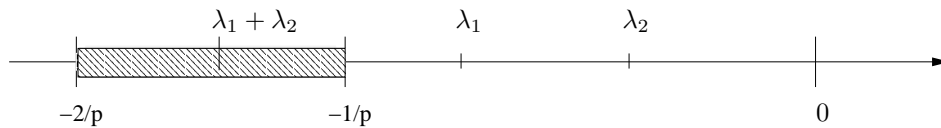
$$\lambda_1 + \lambda_2 > -\frac{2}{p} \tag{13.3}$$

gilt.

Die Gleichungen (13.2) und (13.3) zusammen ergeben also, dass für

$$-\frac{2}{p} < \lambda_1 + \lambda_2 < -\frac{1}{p} \tag{13.4}$$

zwar  $u$  und  $v$  in  $L_p(\Omega)$  liegen, aber nicht das Produkt  $u \cdot v$ .



**Beispiel 13.3.** Es seien  $u, v$  Funktionen in  $L_5(\Omega)$  mit  $u = x^{\lambda_1}$  und  $v = x^{\lambda_2}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p} &= -\frac{1}{5} = -0,2, \\ -\frac{2}{p} &= -\frac{2}{5} = -0,4. \end{aligned}$$

Wähle  $\lambda_1 = -0,18$ ,  $\lambda_2 = -0,19$ . Dann ergibt sich  $\lambda_1 + \lambda_2 = -0,37$ . Also haben wir

$$-\frac{2}{p} = -0,4 < \underbrace{-0,37}_{\lambda_1 + \lambda_2} < -0,2 = -\frac{1}{p}.$$

Wir haben hier genau den Fall, dass  $u$  und  $v$  in  $L_5(\Omega)$  liegen, aber  $u \cdot v$  nicht.

### 13.1.1.1 Wann liegt das Produkt in $W^{m,p}(\Omega)$ ?

Um zu zeigen, dass  $W^{m,p}(\Omega)$  eine Banach-Algebra ist, brauchen wir die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation. Dabei hilft uns folgender Satz, der in [1, S.115-117] zu finden ist.

**Satz 13.4.** *Sei  $\Omega$  ein Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ , das die Kegeleigenschaft für einen Kegel  $C$  besitzt. Ist  $mp > n$ , so existiert eine Konstante  $K^*(m, p, n, C)$ , so dass für alle  $u, v \in W^{m,p}(\Omega)$  gilt: Das Produkt  $u \cdot v$ , welches punktweise definiert ist, liegt in  $W^{m,p}(\Omega)$  und erfüllt*

$$\|u \cdot v\|_{m,p} \leq K^* \|u\|_{m,p} \cdot \|v\|_{m,p}. \quad (13.5)$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass für  $|\alpha| \leq m$  gilt:

$$\underbrace{\int_{\Omega} |D^{\alpha}[u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})]|^p d\mathbf{x}}_{= \|D^{\alpha}(uv)\|_{L^p(\Omega)}^p} \leq K_{\alpha} \|u\|_{m,p}^p \|v\|_{m,p}^p. \quad (13.6)$$

Dann erhält man

$$\underbrace{\left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}(uv)\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\|uv\|_{m,p}} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} K_{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} (\|u\|_{m,p}^p)^{\frac{1}{p}} (\|v\|_{m,p}^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (13.7)$$

also die Gleichung (13.5).

- Wir nehmen für den Moment an, dass  $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$  ist. Dies können wir tun, da  $C^{\infty}(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  liegt. Dann erhalten wir mit der Leibnizregel:

$$D^{\alpha}[uv] = \sum \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^{\beta}u D^{\alpha-\beta}v,$$

wobei  $\alpha! = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_n$ . Damit bleibt zu zeigen, dass für jedes  $\beta \leq \alpha$ , d.h.  $\beta_i \leq \alpha_i$ , und  $|\alpha| \leq m$  gilt, dass

$$\int_{\Omega} |D^{\beta}u D^{\alpha-\beta}v|^p d\mathbf{x} \leq K_{\alpha,\beta} \|u\|_{m,p}^p \|v\|_{m,p}^p, \quad (13.8)$$

da  $\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$  in die Konstante  $K_{\alpha,\beta}$  gezogen werden kann, und dann wieder über die  $K_{\alpha,\beta}$  summiert wird.

Sei  $k$  die größte ganze positive Zahl, so dass  $(m-k)p > n$  ist, bzw.  $mp - kp > n$ . Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

- Für  $|\beta| \leq k$  gilt dann  $(m-|\beta|)p > n$ , und mit dem Einbettungssatz Satz 12.7 (4) folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |D^{\beta}u(\mathbf{x})D^{\alpha-\beta}v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} &\leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |D^{\beta}u(\mathbf{x})|^p \int_{\Omega} |D^{\alpha-\beta}v|^p d\mathbf{x} \\ &\leq K(\beta) \|u\|_{m,p}^p \|D^{\alpha-\beta}v\|_{0,p}^p \\ &\leq K(\beta) \|u\|_{m,p}^p \|v\|_{m,p}^p. \end{aligned}$$

(b) Analog erhält man für  $|\alpha - \beta| \leq k$ :

$$\int_{\Omega} |D^{\beta}u(\mathbf{x})D^{\alpha-\beta}v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq K(\alpha - \beta) \|u\|_{m,p}^p \|v\|_{m,p}^p.$$

Für  $|\beta| > k$  und  $|\alpha - \beta| > k$  gilt, dass  $n \geq (m - |\beta|)p$  bzw.  $n \geq (m - |\alpha - \beta|)p$  ist. Weiter gilt

$$\underbrace{\frac{n - (m - |\beta|)p}{n}}_{< \frac{1}{r}} + \underbrace{\frac{n - (m - |\alpha - \beta|)p}{n}}_{< \frac{1}{r'}} < 1.$$

Man kann also  $r$  und  $r'$  so wählen, dass

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

gilt und

$$p \leq rp \leq \frac{np}{n - (m - |\beta|)p}, \quad p \leq r'p \leq \frac{np}{n - (m - |\alpha - \beta|)p}.$$

Also sind die Voraussetzungen für die Hölderungleichung (HU) (siehe Lemma 7.16) und den Einbettungssatz Satz 12.7 (1) (ES) erfüllt und man erhält:

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} |D^{\beta}u(\mathbf{x})D^{\alpha-\beta}v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right]^1 & \stackrel{\text{HU}}{\leq} \left[ \int_{\Omega} |D^{\beta}u(\mathbf{x})|^{rp} d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{r}} \left[ \int_{\Omega} |D^{\alpha-\beta}v(\mathbf{x})|^{r'p} d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{r'}} \\ & \stackrel{\text{ES}}{\leq} [K(\beta)]^{\frac{1}{r}} [K(\alpha - \beta)]^{\frac{1}{r'}} \|u\|_{m,p}^p \|v\|_{m,p}^p. \end{aligned}$$

Damit sind für  $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$  und  $v \in W^{m,p}(\Omega)$  die Gleichungen (13.8), (13.6) und auch (13.5) erfüllt.

2. Nun können wir annehmen, dass  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  liegt.

Da  $C^{\infty}(\bar{\Omega})$  dicht in  $W^{m,p}(\Omega)$  ist, existiert eine Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $u_n \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ , die gegen  $u$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  konvergiert. Genauso existiert eine Cauchy-Folge  $(u_n v)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $W^{m,p}(\Omega)$ , die gegen ein  $w$  in  $W^{m,p}(\Omega)$  konvergiert.

Also erhält man, da  $mp > n$  ist und  $u, v$  stetig und beschränkt auf  $\Omega$  sind,

$$\begin{aligned} \|w - uv\|_{0,p} & \leq \|w - u_n v\|_{0,p} + \|(u_n - u)v\|_{0,p} \\ & \leq \|w - u_n v\|_{0,p} + \|v\|_{0,\infty} \|u_n - u\|_{0,p} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wir haben jetzt gezeigt, dass  $u \cdot v = w$  in  $L_p(\Omega)$  liegt. Aufgrund der Definition der schwachen Ableitung, liegt die schwache Ableitung von  $uv$  auch in  $L_p(\Omega)$ . Demnach gilt, dass  $uv \in W^{m,p}(\Omega)$  ist.

Daraus und mit dem ersten Teil des Beweises erhalten wir weiter:

$$\|uv\|_{m,p} = \|w\|_{m,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n v\|_{m,p} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} K^* \|u_n\|_{m,p} \|v\|_{m,p} = K^* \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,p}$$

mit der Konstanten  $K^*$  als Summe der  $K_{\alpha}^{\frac{1}{p}}$  aus (13.7).

**Bemerkung 13.5.** Die Voraussetzung, dass  $\Omega$  die Kegeleigenschaft besitzt, haben wir gebraucht um die Einbettungssätze anwenden zu können.

□

Somit können wir zeigen, dass  $W^{m,p}(\Omega)$  eine Banach-Algebra ist.



### 13.1.2 Der Raum $W^{m,p}(\Omega)$ ist eine Banach-Algebra.

Wir führen jetzt eine äquivalente Norm in  $W^{m,p}(\Omega)$  ein und verweisen dazu auf die nachfolgende Definition 13.10.

**Lemma 13.6.** Die Norm  $\| |u| \| = \sup_{\|z\|_{m,p} \leq 1} \|uz\|_{m,p}$  ist äquivalent zur Norm  $\|u\|_{m,p}$ .

*Beweis.* Aus der  $\| | \cdot \|$ -Norm erhalten wir,

$$\| |x| \| = \sup_{\|z\|_{m,p} \leq 1} \|xz\|_{m,p} \leq c \cdot \sup_{\|z\|_{m,p} \leq 1} \|x\|_{m,p} \|z\|_{m,p} = c \|x\|_{m,p} .$$

Weiter gilt,

$$\| |x| \| = \sup_{\|z\|_{m,p} \leq 1} \|xz\|_{m,p} \geq \|x \frac{1}{\text{const}}\|_{m,p} = \left\| \frac{x}{\text{const}} \right\|_{m,p} = \frac{1}{\text{const}} \|x\|_{m,p} .$$

Dabei ist  $\| \frac{1}{\text{const}} \|_{m,p} = 1$ . Es ergibt sich

$$\frac{1}{\text{const}} \|x\|_{m,p} \leq \| |x| \| \leq c \|x\|_{m,p} ,$$

die Normen sind also äquivalent. □

**Satz 13.7.** Der Sobolevraum  $W^{m,p}(\Omega)$  ist zusammen mit der punktweisen Multiplikation und der Norm  $\| |u| \|$  eine Banach-Algebra.

*Beweis.* Der Raum  $L_p(\Omega)$  ist ein linearer Raum.

Außerdem ist  $W^{m,p}(\Omega)$  aufgrund der Eigenschaften der schwachen Ableitung abgeschlossen bezüglich der Addition und der skalaren Multiplikation. Also ist  $W^{m,p}(\Omega)$  ein linearer Raum.

Mit der vorher definierten Multiplikation ergibt sich für  $u, v, w \in W^{m,p}(\Omega)$ :

Die Bedingungen Assoziativität, Distributivität über der Addition,  $\alpha(uv) = (\alpha u)v = u(\alpha v)$ , Existenz des Einselements sind erfüllt, da sie für die punktweise Multiplikation gelten. Einselement ist die Funktion  $e \equiv 1$ .

Ebenso gilt mit der  $\| | \cdot \|$ -Norm, dass  $\| |e| \| = 1$  ist und  $\| |xy| \| \leq \| |x| \| \| |y| \|$  (Siehe [29, S.385/386]). Damit ist der Sobolevraum  $W_{m,p}(\Omega)$  eine Banach-Algebra. □

### 13.1.3 Weitere Möglichkeiten der Multiplikation.

Natürlich kann man auch eine Multiplikation von Elementen verschiedener Sobolevräume definieren:

**Lemma 13.8.** Angenommen  $\Omega$  habe die Kegeleigenschaft und  $p, q, r$ , seien Zahlen  $\geq 1$ , so dass  $p \geq r$ ,  $q \geq r$  und

$$\frac{m}{n} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$$

gilt ( $m \geq 0$ ). Dann liegt für  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  und  $v \in W^{m,q}(\Omega)$  das Produkt  $w$  in  $W^{m,r}(\Omega)$ , und es existiert eine Zahl  $C > 0$ , unabhängig von  $u$  und  $v$ , so dass gilt:

$$\|uv\|_{m,r} \leq C \|u\|_{m,p} \|v\|_{m,q} .$$

Einen Beweis findet man in [25, S.22].

**Satz 13.9.** *Angenommen  $\Omega$  habe die Kegeleigenschaft und  $m, h, k$ , seien ganze Zahlen  $\geq 0$  und  $p, q, r$ , reelle Zahlen  $\geq 1$ , so dass gilt*

$$\frac{m+h+k}{n} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$

Seien weiter

$$\begin{aligned} \frac{np}{n-hp} &\geq r \text{ für } hp < n \text{ und} \\ \frac{nq}{n-kq} &\geq r \text{ für } kq < n, \end{aligned}$$

dann liegt für  $u \in W^{m+h,p}(\Omega)$  und  $v \in W^{m+k,q}(\Omega)$  das Produkt  $uv$  in  $W^{m,r}(\Omega)$  und es existiert eine Zahl  $C > 0$ , unabhängig von  $u$  und  $v$ , so dass gilt:

$$\|uv\|_{m,r} \leq C \|u\|_{m+h,p} \|v\|_{m+k,q}.$$

Auch hierzu findet man einen Beweis in [25, S.26].

In beiden Fällen haben wir eine Multiplikation, die von zwei verschiedenen Sobolevräumen in einen größeren Sobolevraum führt.

## 13.2 Äquivalente Normen

Äquivalente Normen spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, da oft gewisse Eigenschaften einer Norm einfacher für eine äquivalente Norm zu zeigen sind. Wegen der Äquivalenz können wir diese Eigenschaften dann auf die ursprüngliche Norm übertragen (siehe Kapitel 13.1.2).

**Definition 13.10.** Sei  $B$  ein Banachraum. Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  heißen äquivalent in  $B$ , wenn

$$\alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_1$$

für  $u \in B$  mit positiven Konstanten  $\alpha, \beta$  gilt.

**Satz 13.11.** *Diese Relation zwischen Normen ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Eine Äquivalenzrelation ist eine reflexive, symmetrische, transitive Relation.

### 1. Reflexivität:

Es soll gelten  $\|u\|_1 \sim \|u\|_1$  für alle  $\|u\|_1$ .

Dies ist trivialerweise erfüllt, da gilt:

$$\alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_1 \leq \beta \|u\|_1 \text{ für } \alpha = \beta = 1.$$

### 2. Symmetrie:

Es ist zu zeigen, wenn  $\|u\|_1 \sim \|u\|_2$  gilt, dann ist auch  $\|u\|_2 \sim \|u\|_1$ .

Wir haben

$$\alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \|u\|_1.$$

Daraus folgt leicht,

$$\frac{1}{\beta} \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_2,$$

wobei  $\frac{1}{\alpha} > 0$  und  $\frac{1}{\beta} > 0$ , da  $\alpha, \beta > 0$ .

## 3. Transitivität:

Wir müssen zeigen, falls  $\|u\|_1 \sim \|u\|_2$  und  $\|u\|_2 \sim \|u\|_3$ , dann gilt  $\|u\|_1 \sim \|u\|_3$ .

Wir haben

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|u\|_1 &\leq \|u\|_2 \leq \beta_1 \|u\|_1, \\ \alpha_2 \|u\|_2 &\leq \|u\|_3 \leq \beta_2 \|u\|_2. \end{aligned} \tag{13.9}$$

Wenn wir Gleichung (13.9) einmal mit  $\alpha_2$  und einmal mit  $\beta_2$  multiplizieren, können wir folgende Ungleichung aufstellen:

$$\alpha_2 \alpha_1 \|u\|_1 \leq \alpha_2 \|u\|_2 \leq \|u\|_3 \leq \beta_2 \|u\|_2 \leq \beta_1 \beta_2 \|u\|_1.$$

Das heißt mit  $\alpha_2 \alpha_1 = \alpha$  und  $\beta_1 \beta_2 = \beta$  haben wir,

$$\alpha \|u\|_1 \leq \|u\|_3 \leq \beta \|u\|_1,$$

also  $\|u\|_1 \sim \|u\|_3$ .

Damit ist bewiesen, dass die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist.  $\square$

### 13.2.1 Drei äquivalente Normen

**Lemma 13.12.** *Folgende Normen sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &: \|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \|u\|_2 &: \|u\|_{m,p,1} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}, \\ \|u\|_3 &: \|u\|_{m,p,\max} = \max_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}). \end{aligned}$$

*Beweis.* Da es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, müssen wir nur zeigen, dass  $\|u\|_1 \sim \|u\|_3$  und  $\|u\|_2 \sim \|u\|_3$ . Aufgrund der Transitivität folgt dann automatisch, dass  $\|u\|_1 \sim \|u\|_2$  ist.

1. • Aus der ersten Norm erhalten wir,

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} (\max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( d (\max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d^{\frac{1}{p}} \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \\ &= d^{\frac{1}{p}} \|u\|_3, \end{aligned}$$

wobei  $d$  die Anzahl der Summanden ist.

- Aus der dritten Norm erhalten wir,

$$\begin{aligned} \|u\|_3 &= \max_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}) = \|D^{\alpha_0} u\|_{L_p(\Omega)} \\ &= \left( [\|D^{\alpha_0} u\|_{L_p(\Omega)}]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir,

$$\|u\|_3 \leq \|u\|_1 \leq d^{\frac{1}{p}} \|u\|_3,$$

also  $\|u\|_1 \sim \|u\|_3$ .

2. • Auf dieselbe Weise gehen wir bei der zweiten Norm vor,

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \\ &= d \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \\ &= d \|u\|_3. \end{aligned}$$

- Für die dritte Norm erhalten wir hier,

$$\begin{aligned} \|u\|_3 &= \max_{|\alpha| \leq m} (\|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}) = \|D^{\alpha_0} u\|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \\ &= \|u\|_2. \end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\|u\|_3 \leq \|u\|_2 \leq d \|u\|_3,$$

und somit  $\|u\|_2 \sim \|u\|_3$ .

Nun haben wir gezeigt, dass alle drei Normen äquivalent sind (Transitivität!).

□

# Kapitel 14

## Spurräume

AUSGEARBEITET VON ACHIM MEYER

### 14.1 Motivation

Viele Probleme in der Physik lassen sich mit Hilfe von Differentialgleichungen mathematisch modellieren. Betrachten wir z.B. Folgendes: Ein Metallstab wird an beiden Enden in eine Vorrichtung eingespannt. Zusätzlich geben wir Randwerte vor. Wir legen z.B. fest, dass die Temperatur am linken Ende  $0^\circ\text{C}$  und die am rechten  $100^\circ\text{C}$  betragen soll. Uns interessiert nun die Temperaturverteilung im Innern des Stabs. Diese können wir mit Hilfe einer Differentialgleichung (stationäre Wärmeleitungsgleichung) ermitteln. In zweidimensionalen Gebieten erhält man ein analoges Problem (siehe Abbildung 14.1).

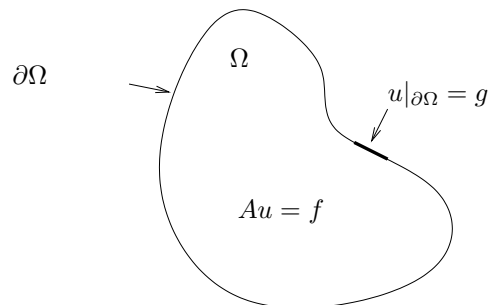


Abbildung 14.1: Gebiet  $\Omega$

Wir suchen in diesem Fall eine Funktion  $u$ , die in einem Gebiet  $\Omega$  die Differentialgleichung  $Au = -\Delta u = f$  erfüllt und auf dem Rand  $\partial\Omega$  der Bedingung  $u = g$ , d.h.  $u|_{\partial\Omega} = g$  genügt. In diesem Vortrag wurden folgende Bücher benutzt [16, 30, 31].

### 14.2 Begriffsklärung

Wir kennen den Begriff der *Spur* schon aus der Linearen Algebra. Dort war die Spur die Summe der Diagonalelemente einer quadratischen Matrix, z.B. für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist  $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ . Hier bezeichnet der Begriff *Spurbildung* etwas anderes, nämlich die Einschränkung einer gegebenen Funktion  $u$  auf den Rand  $\partial\Omega$ :  $u|_{\partial\Omega}$  ( $u$  eingeschränkt auf den Rand des Gebietes  $\Omega$ ).

Wenn wir die Räume (= *Spurräume*) untersuchen wollen, in denen die auf den Rand eingeschränkten Funktionen von Elementen aus  $W^{1,p}(\Omega)$  existieren, benötigen wir Sobolevräume mit nichtganzzahliger Ableitungsordnung.

Also stellt sich uns folgende Aufgabe: In welchem Raum landen wir, wenn wir eine Funktion  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  auf den Rand des Gebietes  $\Omega$  einschränken?

$$W^{1,p}(\Omega) \ni u \longrightarrow u|_{\partial\Omega} \in ?$$

Wir werden sehen, dass wir an die Stelle des Fragezeichens den Raum  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  setzen müssen, damit wir eine lineare, stetige Abbildung erhalten.

$W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  ist ein Sobolev-Raum mit reeller Ableitungsordnung, der im Abschnitt 14.4 eingeführt wird.

### 14.3 Spuren von Elementen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$

Wir wissen, dass der Raum  $C^\infty(\overline{\Omega})$  dicht in  $W^{1,p}(\Omega)$  liegt, falls  $\partial\Omega$  Lipschitz-stetig ist (siehe Satz 10.7). Für Funktionen  $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  kennen wir die Spur, da diese Funktionen stetig bis zum Rand sind (und damit dort auch sinnvoll definiert sind). Deshalb wählen wir uns einen Operator  $\gamma$ , der die unendlich oft stetig-differenzierbaren Funktionen  $\phi$  auf den Rand  $\partial\Omega$  einschränkt:

$$\gamma : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega) \quad , \quad \phi \longmapsto \phi|_{\partial\Omega}$$

Dies ist im klassischen Sinne möglich und wohl definiert. Wählen wir jedoch eine Funktion  $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ , so können wir diese durch eine Folge  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$  in der Norm von  $W^{1,p}(\Omega)$  approximieren. Die Frage ist, ob die Folge der Spuren  $\{\gamma\phi_n\}$  in einer noch näher zu bestimmenden Norm  $\|\cdot\|_?$  zu einem Grenzwert  $\gamma\phi$  konvergiert, d.h.  $\|\gamma\phi_n - \gamma\phi\|_? \longrightarrow 0$ . Natürlich fordern wir, falls  $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  ist, dass  $\gamma\phi$  die klassische Einschränkung ist.

Mit anderen Worten, wir werden uns bemühen, den klassischen Spurbegriff, der auf  $C^\infty(\overline{\Omega})$  definiert ist, auf  $W^{1,p}(\Omega)$  fortzusetzen.

Der resultierende Spurraum wird nicht  $C^1(\partial\Omega)$  oder  $W^{1,p}(\partial\Omega)$  sein, sondern ein Sobolevraum mit reeller Ableitungsordnung, der mit  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  bezeichnet wird. Es wird sich zeigen, dass  $\|\cdot\|_? = \|\cdot\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)}$  ist.

### 14.4 Der Raum $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

Zunächst knüpfen wir an bekannte Aussagen an und vergleichen den Raum der Hölder-stetigen mit  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ . Wir betrachten dabei im folgenden nur beschränkte Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .

#### 14.4.1 Definition der Räume

Der Raum der Hölder-stetigen Funktionen enthält solche, die stetig sind und deren sogenannte Hölderkonstante  $H_\lambda$ , die sehr an den Differenzenquotienten erinnert, endlich ist. Der Hölderexponent  $\lambda$  ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Für  $\lambda = 1$  erhalten wir die bekannte Lipschitz-Stetigkeit.

$$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : H_\lambda(u) = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\lambda} < \infty\}$$

Der Raum  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  enthält dagegen Funktionen, die in der  $p$ -ten Potenz integrierbar sind und die zusätzlich folgende Eigenschaft erfüllen: das Supremum über ein Oberflächenintegral muss wiederum endlich - und damit eine Konstante sein.

$$W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \{u \in L_p(\partial\Omega) : I_\lambda^p(u) = \sup_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial\Omega \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}}} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})|^p}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(n-1)+p\lambda}} ds_{\mathbf{x}} ds_{\mathbf{y}} < \infty\}$$

$ds_{\mathbf{x}}$  und  $ds_{\mathbf{y}}$  bezeichnen jeweils die Oberflächenelemente, und im Nenner steht  $(n-1)$ , also eine Dimension weniger, da wir uns auf dem Rand von  $\Omega$  befinden.

### 14.4.2 Einbettung

Die Hölder-stetigen Funktionen sind 'besser' als die 'nur' stetigen Funktionen, da sie eine zusätzliche Eigenschaft erfüllen, aber sie sind nicht einmal stetig-differenzierbar. Es lässt sich folgende Einbettung vornehmen:

$$\begin{aligned} C^1(\overline{\Omega}) &\subset C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^0(\overline{\Omega}) \\ W^{1,p}(\partial\Omega) &\subset W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \subset L_p(\partial\Omega), \quad 1 < p < \infty, \end{aligned}$$

d.h. der Raum  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  lässt sich einordnen zwischen den obigen Räumen. Funktionen aus  $W^{1,p}(\partial\Omega)$  sind einmal schwach ableitbar, die aus  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  nur  $(1-\frac{1}{p})$ -mal, und das ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Jedoch sind die in  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  enthaltenen Funktionen mit einer zusätzlichen Eigenschaft gegenüber dem Raum  $L_p(\partial\Omega)$  ausgestattet und daher 'besser' als solche aus  $L_p(\partial\Omega)$ . Man sieht nicht sofort, dass  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  größer ist als  $W^{1,p}(\partial\Omega)$ . Um dies deutlich zu machen, kann man auf approximierende Folgen aus  $C^\infty(\partial\Omega)$  zurückgreifen und technisch aufwendige Normabschätzungen durchführen.

### 14.4.3 Normen

Auch hier lässt sich sehr schön die Analogie zum Raum der Hölder-stetigen Funktionen veranschaulichen, da sich die Norm der betrachteten Räume jeweils aus der des nächstgrößeren Raumes und einem Zusatz, nämlich der Konstante aus der geforderten Zusatzeigenschaft, zusammensetzt.

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} &= \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + H_\lambda(u) \\ \|u\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} &= (\|u\|_{L_p(\partial\Omega)}^p + I_\lambda^p(u))^\frac{1}{p} \end{aligned}$$

Die Norm von  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  erhält zusätzlich eine gewisse 'Mittelung' durch das in der Formel enthaltene  $p$  bzw.  $\frac{1}{p}$ .

Der Raum  $W^{1,p}(\Omega)$  ist bereits bekannt aus Kapitel 9.3. Sowohl  $W^{1,p}(\Omega)$  als auch  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  sind Banachräume und separabel für  $p \geq 1$ .

## 14.5 Spursatz

**Satz 14.1.** Sei  $p > 1$  und  $\Omega \in C^{0,1}$  (d.h.  $\Omega$  ist ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand).

Dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung  $\gamma$  von  $W^{1,p}(\Omega)$  nach  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , so dass  $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$  für alle  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  ist.

Der Satz besagt also, dass es eine stetige lineare Abbildung  $\gamma$  von  $W^{1,p}(\Omega)$  nach  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  gibt, die die Spurbildung, die für Funktionen  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  sinnvoll definiert ist, auf eine größere Funktionenklasse, nämlich  $W^{1,p}(\Omega)$  erweitert. Dabei landen wir dann automatisch im Raum  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ .

*Beweis.* Wir führen den Beweis nur teilweise. Den ausführlichen Beweis findet man in [16, Theorem 6.8.13, Seite 337].

Wir betrachten die Abbildung  $\gamma$ , die die klassische Spurbildung auf  $C^\infty(\overline{\Omega})$  ist und fassen die Spuren aus  $C^\infty(\overline{\Omega})$  als Elemente von  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  auf.

$$\begin{aligned} \gamma: \quad C^\infty(\overline{\Omega}) &\longrightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \\ \phi &\longmapsto \phi|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

wobei  $\gamma$  folgende Eigenschaften hat:

1.  $\gamma$  ist linear
2.  $\gamma$  ist stetig.

Die Hauptschwierigkeit wird sein zu zeigen, dass  $\gamma$  stetig ist. Daher wird der Beweis an dieser Stelle auch nicht komplett geführt.

Wir untersuchen hier nur die Linearität von  $\gamma$  und geben eine Beweisskizze für die Stetigkeit an.

### 1. Schritt (Linearität)

Wir müssen zeigen, dass für alle  $a, b \in C^\infty(\overline{\Omega})$  und alle  $m \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) gilt:

$$\begin{aligned}\gamma(a+b) &= \gamma a + \gamma b \\ \gamma(ma) &= m\gamma a\end{aligned}$$

Das ist aber schnell gezeigt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}\gamma(a+b) = (a+b)|_{\partial\Omega} &= (a+b)|_{\partial\Omega} \\ &= a|_{\partial\Omega} + b|_{\partial\Omega} \\ &= \gamma a + \gamma b.\end{aligned}$$

$\gamma(ma) = m\gamma a$  zeigt man ganz analog.

### 2. Schritt (Stetigkeit) Zu zeigen ist:

Wenn eine Folge von Funktionen  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$  bezüglich der  $W^{1,p}(\Omega)$ -Norm gegen eine Funktion  $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  konvergiert, dann soll daraus folgen, dass die Bildfolge  $\gamma\phi_n \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  bezüglich der  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ -Norm ebenfalls eine konvergente Folge bildet.

Nach einem Satz aus der Funktional-Analyse folgt die Stetigkeit einer linearen Abbildung aus einer Ungleichung der Form:

Es existiert ein  $c > 0$ , so dass für alle  $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$  gilt:

$$\|\gamma\phi\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq c \|\phi\|_{W^{1,p}(\Omega)} \text{ für alle } \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

(z.B. [30, S.45 Def. II,1.1 und Satz II,1.2]).

Eben diese Abschätzung macht den Beweis technisch sehr aufwendig. Dabei wird der Rand  $\partial\Omega$  durch kleine Kugeln überdeckt. Diese werden dann durch eine geschickte Koordinatentransformation, d.h. eine, die die Eigenschaften der gewählten Räume respektiert, in den Halbraum überführt. Dabei sollen die einzelnen Randstücke jeweils auf die  $x_1$ -Achse abgebildet werden. Dort kann dann die Abschätzung leichter gezeigt werden. Anschließend werden die einzelnen Randstücke wieder rücktransformiert und zusammengesetzt.

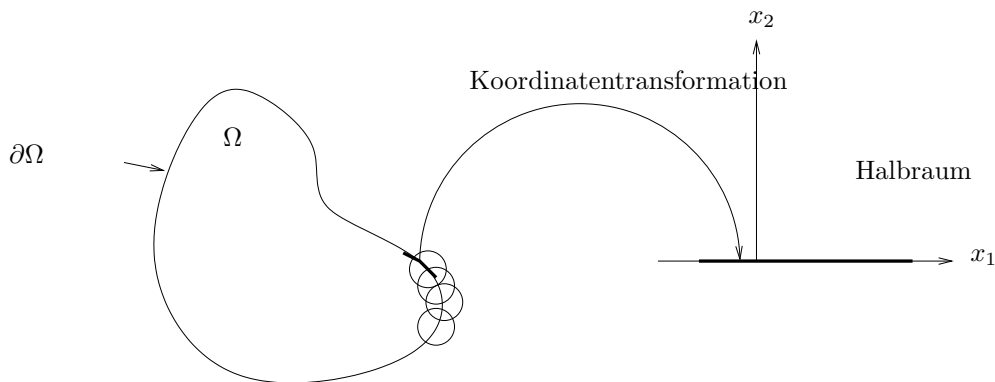


Abbildung 14.2: Transformation des Gebietes  $\Omega$  auf die  $x_1$ -Achse



Wie schon erwähnt, brauchen wir dazu eine gewisse Glattheit des Gebietes  $\Omega$ , was genau dann gewährleistet ist, wenn  $\Omega$  ein Lipschitz-stetiges Gebiet ist.  $\square$

## 14.6 Die Umkehrung des Spursatzes

Natürlich können wir das Problem der Spurbildung auch umgekehrt stellen.

Dazu gehen wir von Funktionen aus, die zunächst nur auf dem Rand definiert sind. Wir können uns gut vorstellen, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, diese Funktionen ins Gebiet fortzusetzen. Der Fortsetzungssatz besagt, dass es unter allen diesen Fortsetzungen mindestens eine gibt, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) &\longrightarrow W^{1,p}(\Omega) \\ t &\longmapsto u \end{aligned}$$

stetig ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma t &= u \quad \text{und} \\ t &= \gamma u. \end{aligned}$$

**Satz 14.2.** *Sei  $\Omega$  ein Lipschitz-stetiges Gebiet. Dann existiert ein linearer stetiger Fortsetzungsoperator  $\sigma$  von  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  nach  $W^{1,p}(\Omega)$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $t \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  gilt:  $\sigma t = u \in W^{1,p}(\Omega)$  und  $\gamma(u) = \gamma(\sigma t) = t$ .*

**Bemerkung 14.3.** Die Stetigkeit von  $\sigma$  kann folgendermaßen ausgedrückt werden: es existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$\|\sigma t\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \|t\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \quad \text{für alle } t \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Dieser Satz, den wir hier ohne Beweis anführen, besagt also, dass wir umgekehrt einen Operator  $\sigma$  finden, der jede Funktion  $t$  aus  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , die auf dem Rand  $\partial\Omega$  existiert, so ins Gebiet  $\Omega$  fortsetzt, dass genau dann wieder die ursprüngliche Funktion  $t$  herauskommt, wenn wir den Operator  $\gamma$  (vgl. Spursatz 14.1) auf  $\sigma(t) = u$  anwenden.

Zum Schluss betrachten wir noch den Raum  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

## 14.7 Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$

Wir wissen aus Abschnitt 11.2, dass der Raum  $W_0^{1,p}(\Omega)$  die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\Omega)$  ist.  $C_0^\infty(\Omega)$  enthält alle Funktionen  $u$  aus  $C^\infty(\mathbb{R})$ , deren Träger in  $\Omega$  liegen.

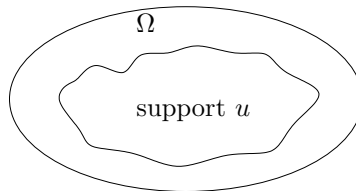


Abbildung 14.3: Der abgeschlossene Träger berührt den Rand des offenen Gebietes  $\Omega$  nicht

Wir betrachten im folgenden nur beschränkte Lipschitz-stetige Gebiete  $\Omega$ .

**Behauptung 14.4.**  $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$

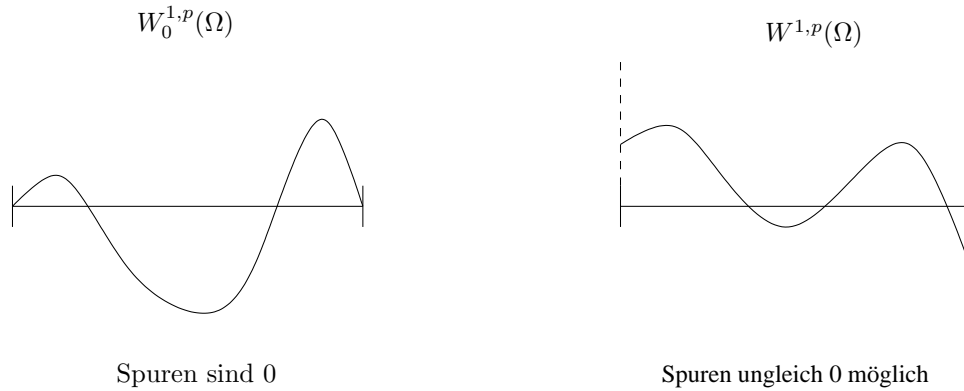


Abbildung 14.4: Vergleich der Spuren von  $W_0^{1,p}(\Omega)$  und  $W^{1,p}(\Omega)$

Der Raum  $W_0^{1,p}(\Omega)$  enthält also alle Funktionen  $u$ , die in  $W^{1,p}(\Omega)$  liegen und deren Spuren zusätzlich den Wert 0 annehmen.

Um die obige Behauptung zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für beliebige Funktionen  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  gilt:  $\gamma u = 0$ .

*Beweis.* Per definitionem liegt der Raum  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Dann können wir wieder eine beliebige Funktion  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  durch eine Folge  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , die in  $C_0^\infty(\Omega)$  liegt, approximieren. Für Funktionen  $u_n$  aus  $C_0^\infty(\Omega)$  kennen wir die Spuren:  $\gamma u_n = 0$ . Aus der Stetigkeit des Spuroperators  $\gamma$  (s. Spursatz 14.1) folgt nun, dass  $\gamma u = 0$  ist.  $\square$

Nun lässt sich auch ganz leicht eine Folgerung daraus ziehen:

**Folgerung 14.5.**  $W_0^{1,p}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega)$ .

*Beweis.* Wir wissen, dass  $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ . In  $C^\infty(\overline{\Omega})$  liegen aber auch Funktionen, deren Spuren nicht verschwinden (z.B. Konstanten). Konstanten  $\neq 0$  liegen nach der obigen Behauptung aber nicht in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  und damit haben wir die Folgerung schon gezeigt.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*, vol. 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, vol. 65 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Boston, 1992.
- [3] ALT, H. *Lineare Funktionalanalysis*, 3. ed. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [4] ALT, H. W. *Lineare Funktionalanalysis*, 2. ed. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [5] BARNER, M., AND FLOHR, F. *Analysis 1*. de Gruyter Lehrbuch, 2000.
- [6] BRONSHTEJN, I., AND SEMENDYAEV, K. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil 2*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1995.
- [7] DIPPER, R. *Lineare Algebra und analytische Geometrie 1*. Vorlesungsskript WS 2001/2002, Universität Stuttgart, 2001.
- [8] ELSTRODT, J. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.
- [9] ENFLO, P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. *Acta Mechanica* 130 (1973), 309–317.
- [10] GRISVARD, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Press, Bath, Avon, 1985.
- [11] GROSSMANN, C., AND ROOS, H.-G. *Numerik partieller Differentialgleichungen*, 2 ed. Teubner Verlag, Stuttgart, 1994.
- [12] HEUSER, H. *Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [13] HEUSER, H. *Funktionalanalysis*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [14] HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Teubner, Stuttgart, 2000.
- [15] HEUSER, H. *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, Stuttgart, 2000.
- [16] KUFNER, A., JOHN, O., AND FUČIK, S. *Function Spaces*. Noordhof International Publishing and Academia, Leyden and Prag, 1977.
- [17] LJUSTERNIK, L., AND SOBOLEW, W. *Elemente der Funktionalanalysis*. Akademie Verlag, 1968.
- [18] NAAS, J., AND SCHMID, H. *Mathematisches Wörterbuch, Band 2*. Akademie Verlag, 1961.
- [19] N.MEYERS, AND J.SERRIN. H=W. *Proc. Nat.Acad.Sci.USA* (1964), 1055–1056.
- [20] OXTOBY, J. *Maß und Kategorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.
- [21] SÄNDIG, A.-M. *Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen*. Preprint 96-8, Universität Stuttgart, 1996.

- [22] S.L.SOBOLEV. *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*. Akademie Verlag, 1964.
- [23] SMIRNOW, W. I. *Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II*. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.
- [24] TRIEBEL, H. *Höhere Analysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [25] VALENT, T. *Boundary Value Problems of Finite Elasticity*. Springer Verlag Inc., New York, 1988.
- [26] WALTER, W. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 2 ed. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [27] WENDLAND, W. *Analysis 1. Vorlesungsskript WS 2001/2002*, Universität Stuttgart, 2002.
- [28] WENDLAND, W. *Analysis 2. Vorlesungsskript SS 2002*, Universität Stuttgart, 2002.
- [29] WERNER, D. *Funktionalanalysis*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [30] WERNER, D. *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [31] WLOKA, J. *Partielle Differentialgleichungen*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1982.



## Erschienenene Preprints ab Nummer 2003/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2003/001 *Lamichhane, B. P., Wohlmuth, B. I.*: Mortar Finite Elements for Interface Problems.
- 2003/002 *Dryja, M., Gantner, A., Widlund, O. B., Wohlmuth, B. I.*: Multilevel Additive Schwarz Preconditioner For Nonconforming Mortar Finite Element Methods.
- 2003/003 *Klimke, A., Hanss, M.*: On the Reliability of the Influence Measure in the Transformation Method of Fuzzy Arithmetic.
- 2003/004 *Klimke, A.*: RANDEXPR: A Random Symbolic Expression Generator.
- 2003/005 *Klimke, A.*: How to Access Matlab from Java.
- 2003/006 *Merkle, T.*: Phase separation in solid mixtures under elastic loadings with application to solder materials.
- 2003/007 *Lamichhane, B. P., Wohlmuth, B. I.*: Second Order Lagrange Multiplier Spaces for Mortar Finite Elements in 3D.
- 2003/008 *Fritz, A., Hübner, S., Wohlmuth, B. I.*: A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity.
- 2003/009 *Klimke, A.*: An Efficient Implementation of the Transformation Method of Fuzzy Arithmetic
- 2003/010 *Steinbach, O.*: A Note on the Ellipticity of the Single Layer Potential in two-dimensional Linear Elastostatics
- 2003/011 *Steinbach, O.*: Artificial Multilevel Boundary Element Preconditioners
- 2003/012 *Bürger, R., Karlsen, K.H.*: On a diffusively corrected kinematic-wave traffic model with changing road surface conditions
- 2003/013 *Wohlmuth, B. I.*: A short note on: An optimal a priori estimate for non linear multibody contact problems.
- 2003/014 *Sändig, A.-M.*: Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Vorlesung im Wintersemester 2002/03.
- 2003/015 *Sändig, A.-M.*: Proseminar Funktionenräume, Wintersemester 2002/2003.