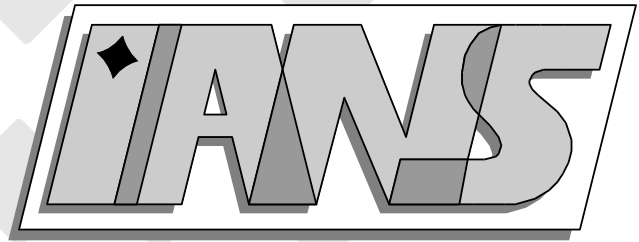


**Universität
Stuttgart**



Distributionentheorie mit Anwendungen
auf partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2004/2005

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Universität Stuttgart

Distributionentheorie mit Anwendungen
auf partielle Differentialgleichungen
Vorlesung im Wintersemester 2004/2005

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische
Simulation**

Vorlesungsskript 2005/003

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de
WWW: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN **1611-4176**

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
IANS-Logo: Andreas Klimke. \LaTeX -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Einleitung | 7 |
| 1 Einführung in die Distributionentheorie | 9 |
| 1.1 Schwache Ableitungen | 9 |
| 1.2 Der Raum der Testfunktionen \mathcal{D} | 17 |
| 1.3 Der Raum der Distributionen \mathcal{D}' | 21 |
| 1.4 Fouriertransformation und temperierte Distributionen | 43 |
| 2 Rand- und Anfangswertprobleme | 53 |
| 2.1 Berechnung von Fundamentallösungen | 53 |
| 2.2 Fundamentallösung des Laplace-Operators | 55 |
| 2.3 Fundamentallösung für die Wärmeleitungsgleichung | 67 |
| 2.4 Fundamentallösung für die Wellengleichung | 72 |
| 3 Einige Anwendungen der Distributionentheorie | 91 |
| 3.1 Der Raum $W^{-k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < \infty$ | 91 |
| 3.2 Das Randdatum $\frac{\partial w}{\partial n}$ für schwache Lösungen der Laplace-Gleichung . . . | 98 |
| 3.3 Regularitätsresultate für lineare elliptische Randwertprobleme in Polygo- nen | 104 |
| Literaturverzeichnis | 123 |

Einleitung

Während das 19. Jahrhundert von dem italienischen Mathematiker V. Volterra das Jahrhundert der Theorie der Funktionen genannt wurde, bezeichnete F. E. Browder das 20. Jahrhundert als das Jahrhundert der Funktionalanalysis.

Die Theorie der Distributionen, auch Theorie der verallgemeinerten Funktionen genannt, ist eine funktionalanalytische Verallgemeinerung der klassischen Analysis. Im Mittelpunkt steht die Definition eines verallgemeinerten Ableitungsbegriffes. Damit ist es möglich, auch klassisch nicht differenzierbare Funktionen, wie stetige, stückweise lineare Funktionen oder auch Sprungfunktionen im Distributionensinn zu differenzieren.

Auf der Grundlage der partiellen Integration führte O. Heaviside um 1900 einen „Calculus“ ein, der es gestattete, Ableitungen von klassisch nicht differenzierbaren Funktionen zu bilden. Dieser Calculus wurde von Physikern und Ingenieuren benutzt. Weil allerdings eine strenge mathematische Begründung fehlte, war nicht eindeutig klar, warum eigentlich „richtig“ gerechnet wurde.

1927 führte der englische Physiker und Mathematiker P. A. M. Dirac (geb. 1902, tätig in Cambridge und Oxford) eine neuartige Funktion ein, die heute *Diracsche Delta-Funktion*, kurz mit δ bezeichnet, genannt wird. Sie sollte die Ableitung der Heavisideschen Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

beschreiben. Die Delta-Funktion, oder besser δ -Distribution, war folgendermaßen definiert worden:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1.$$

Sie kann keine klassisch integrierbare Funktion sein. Um jedoch eine mathematisch fundierte Theorie aufzubauen, reicht eine solche Definition nicht aus.

In den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts untersuchte S. L. Sobolev [32] Anfangswertprobleme für hyperbolische partielle Differentialgleichungen. Er führte einen Raum von Grundfunktionen und darüber einen Raum von stetigen linearen Funktionalen (reell- oder komplexwertige Abbildungen) ein, der später *Distributionenraum* genannt wurde. Sobolev formulierte ebenfalls wesentliche Definitionen, z.B. wie man die linearen stetigen Funktionalen differenziert und was man unter konvergenten Folgen und Reihen im Distributionenraum versteht.

In den vierziger Jahren baute Laurent Schwartz [29, 30, 31] die Theorie der Distributionen systematisch aus. Insbesondere führte er eine Fouriertransformation für Distributionen ein; hinzuweisen ist auch auf die Bücher von I. M. Gelfand und G. E. Šilov [11].

Heute stellt die Distributionentheorie ein wesentliches Mittel bei der Analysis von Differentialgleichungen dar.

Die Vorlesung beginnt mit einer Einführung in die Distributionentheorie, in der Grundbegriffe definiert und Rechenregeln bewiesen werden. Zu den Grundbegriffen gehören neben der Ableitung auch das direkte Produkt, die Faltung und die Fouriertransformation von Distributionen. Danach wird die Distributionentheorie zur Lösung von linearen klassischen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik verwandt. Dem folgend werden Fundamentallösungen für den Laplace-, Wärmeleitungs- und Wellenoperator berechnet und das Cauchysche Anfangswert- sowie Randwertproblem untersucht. Im letzten Kapitel werden einige Anwendungen der Distributionentheorie auf Randwertprobleme untersucht. Der Raum $W^{-k,p}(\Omega)$ wird beschrieben, das Neumann-Randdatum von schwachen Lösungen der Laplace-Gleichung wird eingeführt und es werden Regularitätsaussagen für lineare elliptische Randwertprobleme in Gebieten mit Ecken und Kanten formuliert.

Kapitel 1

Einführung in die Distributionentheorie

1.1 Schwache Ableitungen

Wir wissen aus der klassischen Analysis, dass im Allgemeinen

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

ist. Betrachten wir die Gleichung $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u = 0$, so ist diese für *jede* Funktion $u = u(x)$ erfüllt, jedoch muss

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x) = 0$$

nicht definiert sein. Dies erscheint unnatürlich und erfordert die Definition neuer „Funktionen“, für die die Ableitungen definiert und unabhängig von der Reihenfolge der Ableitungen sind.

Weiterhin sind stückweise polynomiale Funktionen (siehe Abbildung 1.1)

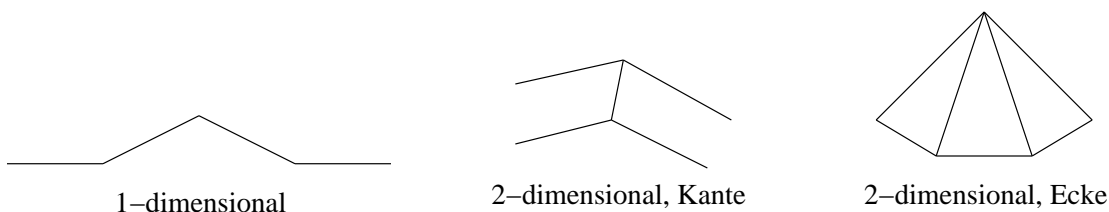


Abbildung 1.1: Stückweise polynomiale Funktionen

im klassischen Sinn an „Ecken“ bzw. „Kanten“ nicht differenzierbar.

Der Schlüssel zur Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs liegt in der Anwendung der partiellen Integration. Um diese beschreiben zu können, führen wir die linearen Räume $C^k(\Omega)$ und $C^k(\overline{\Omega})$ ein.

Die Raumklassen C^k

Wir beginnen mit der Einführung von $C^k(\Omega)$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, d.h. eine **offene** und zusammenhängende Menge des \mathbb{R}^n . Es sei $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion von n Variablen. Um die partiellen Ableitungen möglichst kompakt zu schreiben, führen wir eine Multiindex-Schreibweise ein. Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Multiindex mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die α -te Ableitung der Funktion $u = u(x)$ ist definiert als

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definition 1 Der lineare Raum $C^k(\Omega)$ besteht aus Funktionen u , deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind, kurz

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\}.$$

Hierbei ist $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ der Raum aller auf Ω stetigen Funktionen. Weiterhin ist

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Wir betrachten jetzt $C^k(\overline{\Omega})$, wobei $\overline{\Omega}$ die **Abschließung** von Ω ist. Um Schwierigkeiten mit der Differentiation in den Randpunkten zu umgehen, definiert man:

Definition 2 Der lineare Raum $C^k(\overline{\Omega})$ besteht aus Funktionen u aus $C^k(\Omega)$, für die jede partielle Ableitung bis zur Ordnung k stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden kann. Der Wert der α -ten Ableitung in einem Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ ist also

$$D^\alpha u(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} D^\alpha u(x), \quad |\alpha| \leq k. \quad (1.1)$$

Weiterhin ist analog zur Definition 1

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung

Die Definition (1.1) hängt vom Gebiet Ω ab. Es kann sein, dass $\overline{M} = \overline{\Omega}$ ist, aber $C^k(\overline{\Omega}) \neq C^k(\overline{M})$. Ein Beispiel dazu kann mit Hilfe der Cantorschen Treppenfunktion konstruiert werden.

Der Raum $C^k(\overline{\Omega})$, versehen mit der Norm

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|$$

ist ein Banachraum. Eine äquivalente Norm ist

$$\|u\|_{\overline{\Omega}, k} = \max_{|\alpha| \leq k} \{ \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \} \quad (1.2)$$

$$= \sup \{ |D^\alpha u(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq k \} \quad (1.3)$$

$$= \max \{ |D^\alpha u(x)| : x \in \overline{\Omega}, |\alpha| \leq k \}. \quad (1.4)$$

Bemerkung

Die Einführung einer Norm auf $C^k(\Omega)$ ist problematisch. Jedoch kann man eine Metrik folgendermaßen einführen:

Sei $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Kompakta, die Ω ausschöpfen, d.h.

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega, \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Auf K_j betrachten wir die Norm (1.2)

$$\|u\|_j = \|u\|_{K_j, k}$$

Eine Metrik ϱ ist definiert durch

$$\varrho(u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|u - v\|_j}{1 + \|u - v\|_j}. \quad (1.5)$$

$C^k(\Omega)$, versehen mit der Metrik (1.5), ist ein vollständiger Raum (Frechét-Raum).

Partielle Integration

Wir erinnern, dass für eine beschränkte messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und stetig differenzierbare Funktionen $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:

für $n = 1$, $\Omega = (a, b)$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + u(x)v(x) \Big|_a^b;$$

für $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ glatt:

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \cos(\vec{n}, x_i) d\sigma, \quad (1.6)$$

wobei \vec{n} der äußere Normalenvektor der Fläche $\partial\Omega$ und $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist.

Durch wiederholte Anwendung der partiellen Integration auf Funktionen $u, v \in C^{|\alpha|}(\overline{\Omega})$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx &= - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial^{|\alpha|-1} v}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|-1} v \cos(\vec{n}, x_1)}{\partial x_1^{\alpha_1-1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} d\sigma \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} v dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma. \end{aligned} \quad (1.7)$$

$R(u, v)$ hängt von den Ableitungen von u und v bis zur Ordnung $|\alpha| - 1$ ab. Kurz geschrieben lautet (1.7)

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u v dx + \int_{\partial\Omega} R(u, v) d\sigma. \quad (1.8)$$

Es sei $C_0^{|\alpha|}(\Omega) = \{v \in C^{|\alpha|}(\Omega) : \text{supp } v \text{ beschränkt, } \text{supp } v \subset \Omega\}$

mit $\text{supp } v = \overline{\{x : v(x) \neq 0\}}$,

das heißt, die Funktionen $v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ verschwinden in einem Randstreifen des Gebietes Ω und damit verschwindet das Oberflächenintegral in (1.8) für diese Funktionen.

Entsprechend sei

$$C_0^{\infty}(\Omega) = \{v \in C^{\infty}(\Omega) : \text{supp } v \text{ beschränkt, } \text{supp } v \subset \Omega\}.$$

Wir werden später im Abschnitt 1.2 den Raum $C_0^{\infty}(\Omega)$ noch etwas anders charakterisieren.

Schwache Ableitung

Wir haben folgende Definition motiviert:

Definition 3 (Schwache Ableitungen) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, w \in L_{loc}^1(\Omega)$, das heißt, u und w sind über jedem beschränkten inneren Teilgebiet von Ω integrierbar. $w = u_{\alpha} = D^{\alpha} u$ ist die schwache α -te Ableitung von u **im Gebiet** Ω (nicht punktweise definiert!), falls gilt:

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u v dx \quad \forall v \in C_0^{|\alpha|}(\Omega). \quad (1.9)$$

Durch „Überschiebung“ der Differentiation auf die so genannten Testfunktionen wird durch Formel (1.9) die schwache Ableitung eingeführt. Wir werden später sehen, dass diese Idee in der Distributionentheorie weiter ausgebaut wird, das heißt $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ wird durch $C_0^\infty(\Omega)$ ersetzt und die Distributionen werden als lineare Funktionale über dem Raum $C_0^\infty(\Omega)$ definiert.

Wir überzeugen uns zunächst davon, dass die schwachen Ableitungen in $L_{loc}^1(\Omega)$ eindeutig bestimmt sind und daher mit den klassischen Ableitungen übereinstimmen, falls diese existieren und sich in $L_{loc}^1(\Omega)$ befinden.

Lemma 1 (von Du Bois-Reymond) *Eine im Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lokal integrierbare Funktion f verschwindet im Gebiet Ω fast überall genau dann, wenn $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist.*

Beweis

a) Es sei $f = 0$ fast überall. Dann gilt $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

b) Es sei $\int_{\Omega} f v \, dx = 0$ für alle v aus $C_0^\infty(\Omega)$.

Wir nehmen ein $x_0 \in \Omega$. Es existiert eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ mit $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \subset \Omega$.

Wir betrachten einen beliebigen Zahlenvektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$ und Funktionen (siehe Abbildung 1.2)

$$\Phi_{\vec{k}}(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\Psi_{\vec{k}}(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} & \text{für } |x - x_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei c_ε Normierungskonstanten sind.

Die Funktionen $\Phi_{\vec{k}}$ und $\Psi_{\vec{k}}$ befinden sich in $C_0^\infty(\Omega)$.

Es gilt:

$$\int_{\Omega} f(x) \Phi_{\vec{k}}(x) \, dx = \int_{K_\varepsilon(x_0)} f(x) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} \cos\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \, dx = 0, \quad (1.10)$$

$$\int_{\Omega} f(x) \Psi_{\vec{k}}(x) \, dx = \int_{K_\varepsilon(x_0)} f(x) c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}} \sin\left(\frac{\vec{k} \cdot x}{\varepsilon}\right) \, dx = 0, \quad (1.11)$$

wobei $w_\varepsilon = c_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}}$ gesetzt wurde.

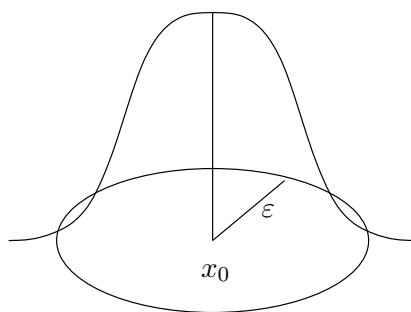


Abbildung 1.2: Hutfunktion $e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}}$

Die Relationen (1.10) und (1.11) besagen, dass die Fourierkoeffizienten von der lokal integrierbaren Funktion $f w_\varepsilon$ verschwinden. Daher ist $f = 0$ fast überall in $K_\varepsilon(x_0)$ [15, Theorem 7.26, S. 257]. Der Punkt x_0 ist jedoch beliebig aus Ω , woraus $f(x) = 0$ fast überall in Ω folgt. ■

Zur Erinnerung: Betrachten wir das Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann kann bezüglich des Systems $\cos\left(\frac{n\pi}{\varepsilon}x\right), \sin\left(\frac{n\pi}{\varepsilon}x\right)$ ($k = n\pi$) die Fourierentwicklung durchgeführt werden. Entsprechende Überlegungen sind für mehrere Variablen möglich.

Weitere Beweise dieses Lemmas finden sich in [30, S. 90], [14, Th. 1.4.2, S. 10] oder in der obigen Form in [34, S. 72].

Folgerung aus Lemma 1

Schwache Ableitungen sind in $L^1_{loc}(\Omega)$ eindeutig definiert und stimmen mit den klassischen Ableitungen überein, falls diese existieren.

Beispiel für eine schwache Ableitung

Es sei $\Omega = (-1, 1)$ und $u(x) = |x|$; siehe Abbildung 1.3.

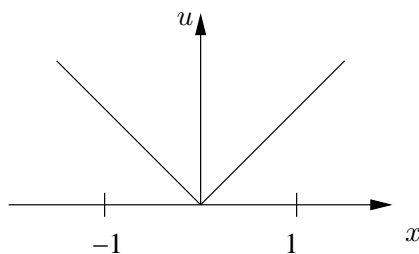


Abbildung 1.3: Die Funktion $u(x) = |x|$

Wir berechnen die schwache Ableitung u' . Dazu betrachten wir die Definitionsgleichung

$$\int_{-1}^{+1} u w' \, dx = - \int_{-1}^{+1} w v \, dx \quad \text{für alle } v \in C_0^1((-1, +1)).$$

Für $u = |x|$ und nach partieller Integration über den Teilintervallen $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |x|v' \, dx &= - \int_{-1}^0 xv' \, dx + \int_0^1 xv' \, dx = \int_{-1}^0 v \, dx - \int_0^1 v \, dx \\ &= - \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)v \, dx = - \int_{-1}^{+1} wv \, dx. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Du Bois–Reymond folgt, dass $u'(x) = w(x) = \operatorname{sgn}(x)$ ist (siehe Abbildung 1.4).

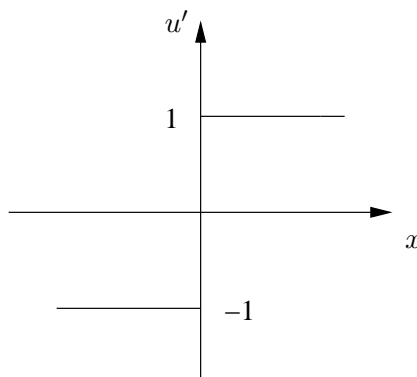


Abbildung 1.4: Schwache Ableitung der Funktion $u(x) = |x|$

Die zweite Ableitung von $u(x) = |x|$ (beziehungsweise die erste Ableitung von $\operatorname{sgn}(x)$) ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn}(x)v' \, dx &= - \int_{-1}^0 v' \, dx + \int_0^1 v' \, dx = -v(0) + \underbrace{v(-1)}_{=0} + \underbrace{v(1)}_{=0} - v(0) \\ &= -2v(0) \quad \forall v \in C_0^1((-1, +1)). \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die Frage, ob es eine integrierbare Funktion $w \in L(-1, +1)$ gibt, so dass $2v(0) = \int_{-1}^{+1} w(x)v(x) \, dx$ ist. Wir nehmen an, dass es ein solches $w \in L(-1, +1)$ gibt und betrachten eine beliebige Funktion $v \in C_0^1((-1, +1))$. Da sich auch xv in $C_0^1((-1, +1))$ befindet, muss gelten:

$$\int_{-1}^1 w(x)xv(x) \, dx = 2v(0) \cdot 0 = 0.$$

Aus dem Lemma von Du Bois–Reymond folgt, dass $w(x)x = 0$ fast überall ist und daher

$w(x) = 0$ fast überall folgt. Damit wäre

$$\int_{-1}^1 w(x)v(x) \, dx = 0 = 2v(0)$$

für alle $v \in C_0^1((-1, +1))$, was nicht sein kann.

Folgerung

Sprungfunktionen besitzen keine schwachen Ableitungen. Die Einführung eines allgemeineren Ableitungsbegriffs erweist sich als notwendig.

1.2 Der Raum der Testfunktionen \mathcal{D}

Es sei Ω eine nichtleere offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ; K sei eine kompakte Teilmenge von Ω . Wir bezeichnen mit $C_K^\infty(\Omega)$ die Menge der Funktionen, die in Ω beliebig oft differenzierbar sind und deren Träger sich in K befinden. In $C_K^\infty(\Omega)$ wird ein abzählbares System von Normen eingeführt:

$$\|v\|_{K,j} = \sup\{|D^\alpha v(x)| : x \in K, |\alpha| \leq j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

wobei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist.

Definition 4 Die Menge $C_0^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} C_K^\infty(\Omega)$

ist der lineare Raum (über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen) aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Es ist $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, versehen mit der induktiven limes „Topologie“, die durch die Topologien in $C_K^\infty(\Omega)$ erzeugt wird (vgl. [4, Kapitel 1]) bzw. $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, versehen mit folgendem Konvergenzbegriff: Eine Folge (v_i) von Elementen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann zum Nullelement, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, so dass $\text{supp } v_i \subset K$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist.
2. $D^\alpha v_i \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$, gleichmäßig in K , für alle Multiindizes α .

$\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein lokal konvexer Raum, aber nicht metrisierbar, das heißt, es gibt keine Metrik ϱ , so dass $\varrho(v_i, 0) \rightarrow 0$, für $i \rightarrow \infty$, äquivalent zu 2. wäre.

In $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein System von Normen definierbar:

$$\|v\|_j = \sup\{|D^\alpha v(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq j\}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (1.13)$$

Wir bemerken, wenn $v \in C_K^\infty(\Omega)$ ist, dann ist $\|v\|_j = \|v\|_{j,K}$.

Bemerkung

$\mathcal{D}(\Omega)$ wird auch als Raum der Test- bzw. Grundfunktionen bezeichnet. Dieser Begriff stammt aus der Variationsformulierung bzw. schwachen Formulierung von Differentialgleichungen und steht in engem Zusammenhang mit der Definition der schwachen Ableitungen; siehe (1.9).

Ein klassisches Beispiel für eine Testfunktion ist die Hutfunktion

$$v(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Durch Multiplikation mit einer Konstanten c kann erreicht werden, dass für $\hat{v}(x) = cv(x)$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x) \, dx = \int_{|x| \leq 1} \hat{v}(x) \, dx = 1 \quad (1.15)$$

ist.

Weitere Testfunktionen können durch Faltungen von \hat{v} mit integrierbaren Funktionen mit kompakten Trägern gewonnen werden.

Satz 1 Es sei u eine integrierbare Funktion, deren Träger eine kompakte Teilmenge K aus Ω ist. Die Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - t) \hat{v}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} dt = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} u(\tau) \hat{v}\left(\frac{x - \tau}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{-n} d\tau, \quad (1.16)$$

wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, befindet sich in $C_0^\infty(\Omega)$ für eine positive reelle Zahl ε mit $\varepsilon < \text{dist}(K, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \delta$ (für $\Omega = \mathbb{R}^n$ entfällt diese Bedingung). Ist u stetig, dann konvergiert u_ε gegen u gleichmäßig für $\varepsilon \rightarrow 0$. Ist $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, dann konvergiert u_ε gegen u in der L_p -Norm.

Beweis

Da \hat{v} sich in $C_0^\infty(\Omega)$ befindet, folgt aus (1.16), dass $u_\varepsilon(x) \in C^\infty(\Omega)$ ist. Deshalb müssen wir nur noch zeigen, dass sich der Träger von u_ε in einer kompakten Menge K' befindet.

Für Punkte $x - \varepsilon y \notin K$ gilt, dass $u(x - \varepsilon y) = 0$ und damit $u_\varepsilon(x) = 0$ ist. Betrachten wir einen festen Punkt x , für den $u_\varepsilon(x) \neq 0$ ist, dann muss $x - \varepsilon y \in K$ für ein y , $|y| \leq 1$, sein. Daher befindet sich der Träger von $u_\varepsilon(x)$ in einer Menge K' , deren Abstand von K höchstens gleich ε ist und daher ebenfalls eine kompakte Menge darstellt.

Da $\varepsilon < \delta$ ist, befindet sich K' in Ω .

Wir nehmen nun an, dass u stetig ist. Da $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v} dy = 1$ ist, gilt:

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [u(x - \varepsilon y) - u(x)] \hat{v}(y) dy.$$

Der Ausdruck $u(x - \varepsilon y) - u(x)$ konvergiert über einer kompakten Menge gleichmäßig gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$, woraus die Behauptung folgt.

Wir zeigen nun, dass

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)| \hat{v}(y) dy & (1.17) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u(x - \varepsilon y) - u(x)\|_{L_p(K_1(0))} \|\hat{v}(y)\|_{L_q(K_1(0))} \\ &= \left(\int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{K_1(0)} |\hat{v}(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $p > 1$ ist.

Daher folgt

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p &\leq \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dy \left(\int_{K_1(0)} \hat{v}(y)^q dy \right)^{\frac{p}{q}} \\ &= C \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dy, \end{aligned} \quad (1.18)$$

wobei

$$C = \left(\int_{K_1(0)} \hat{v}(y)^q dy \right)^{\frac{p}{q}}$$

ist. Die Ungleichung (1.18) gilt auch im Fall $p = 1$, falls in (1.17)

$$C = \sup_{y \in K_1(0)} \hat{v}(y)$$

gewählt wird.

Integration der Ungleichung (1.18) über Ω liefert:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx &\leq C \int_{\Omega} \int_{K_1(0)} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dy dx \\ &\stackrel{Fubini}{=} C \int_{K_1(0)} \int_{\Omega} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dx dy. \end{aligned}$$

Da u beschränkten Träger besitzt, ist nach dem Satz über die mittlere Stetigkeit des inneren Integrals [19, S. 70, Theorem 2.4.2]

$$\int_{\Omega} |u(x - \varepsilon y) - u(x)|^p dx < \varepsilon' \quad \text{für } |\varepsilon y| < \delta.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung

Ist Ω beschränkt, dann folgt aus dem obigen Beweis, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ ist. Dies gilt auch für unbeschränkte Gebiete.

Lemma 2 Sei Ω ein Gebiet aus dem \mathbb{R}^n . Der lineare Raum C_0^∞ ist dicht in $L_p(\Omega)$.

Beweis

Wir betrachten ein Element $u \in L_p(\Omega)$. Da u absolut integrierbar ist, existiert zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $u_K \in L_p(\Omega)$ mit beschränktem Träger $K = K(\varepsilon')$, so dass

$$\|u - u_K\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

ist. Nach Satz 1 konvergiert $u_{K,\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} u_K(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) dy$ in der $L_p(\Omega)$ -Norm zu u_K , d.h.

$$\|u_{K,\varepsilon} - u_K\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2}$$

für genügend kleines ε .

Die Funktion $u_{K,\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega)$ approximiert u auch in $L_p(\Omega)$. Zu jedem $\varepsilon' > 0$ existiert nämlich ein ε und ein $K = K(\varepsilon')$, so dass

$$\|u - u_{K,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u - u_K\|_{L_p(\Omega)} + \|u_K - u_{K,\varepsilon}\|_{L_p(\Omega)} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'.$$

■

Satz 2 Für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ gibt es eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, so dass $0 \leq \eta \leq 1$ und $\eta \equiv 1$ auf K ist.

Beweis

Wir betrachten eine abgeschlossene δ -Umgebung K_δ von K , die in Ω enthalten ist:

$$K_\delta = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, K) \leq \delta\}.$$

Zur Umgebung $K_{\frac{\delta}{2}}$ (siehe Abbildung 1.5) betrachten wir die charakteristische Funktion

$$u = \begin{cases} 1 & \text{auf } K_{\frac{\delta}{2}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass

$$\eta(x) = u_\varepsilon(x) = \int_{K_1(0)} u(x - \varepsilon y) \hat{v}(y) \, dy$$

die gewünschte Funktion ist, falls $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ gewählt wird. Es ist $u(x - \varepsilon y) = 1$, falls $x - \varepsilon y \in K_{\frac{\delta}{2}}$ ist. Dies ist sicherlich für $x \in K$ und $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ erfüllt.

Damit ist $\eta(x) \equiv 1$ auf K . Weiterhin ist $0 \leq \eta(x) \leq 1$, $\eta(x) \equiv 0$ für $x \notin K_\delta$ und $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

■

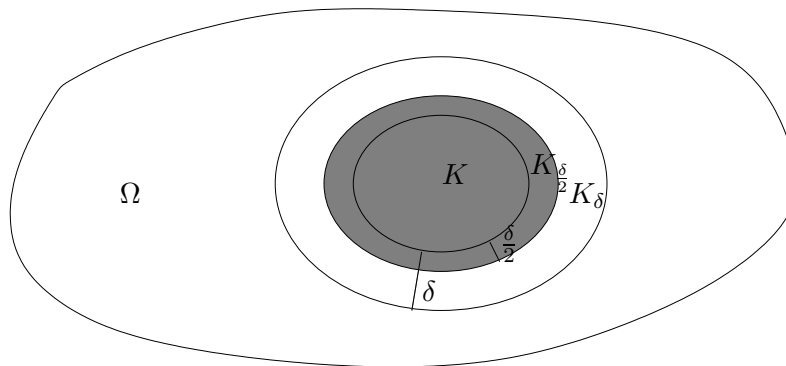


Abbildung 1.5: Umgebung von K

1.3 Der Raum der Distributionen \mathcal{D}'

Definition 5 Der lineare Raum aller über dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$ definierten stetigen linearen Funktionale ist der Raum der verallgemeinerten Funktionen bzw. Distributionen und wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet.

Kurz: Eine Distribution F über Ω ist ein stetiges lineares Funktional über $\mathcal{D}(\Omega)$.

Erläuterung

1. F ist ein Funktional. $Fv = (F, v) = F(v) = \langle F, v \rangle$ ist für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine reelle (komplexe) Zahl; ($\mathcal{D}(\Omega)$ ist im Allgemeinen ein linearer Raum über dem Körper der komplexen Zahlen und enthält komplexwertige Testfunktionen).
2. F ist linear, das heißt $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 Fv_1 + \lambda_2 Fv_2$.
3. F ist stetig: $v_k \rightarrow v$ in $\mathcal{D} \Rightarrow Fv_k \rightarrow Fv$ für $k \rightarrow \infty$.

Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ ist ein linearer Raum:

$$(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)v := \lambda_1 F_1 v + \lambda_2 F_2 v.$$

Damit befindet sich $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Im Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ wird ein schwacher Konvergenzbegriff eingeführt.

Definition 6 Die Folge von Distributionen F_k konvergiert zur Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, falls

$$F_k v \rightarrow Fv \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Satz 3 Ein lineares Funktional F über $\mathcal{D}(\Omega)$ ist eine Distribution genau dann, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ eine Zahl $m = m(K)$, $m \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante M_K existieren, so dass

$$|Fv| \leq M_K \|v\|_{K,m} \quad \forall v \in C_K^\infty(\Omega) \quad (1.19)$$

ist.

Beweis

- a) Es gelte (1.19). Wir betrachten eine konvergente Folge $(v_i)_i$, $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$. Die Elemente dieser Folge sowie ihr Grenzwert befinden sich in $C_K^\infty(\Omega)$, wobei K eine kompakte Teilmenge von Ω ist. Daher ist

$$|F(v_i - v)| \leq M_K \|v - v_i\|_{K,m}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $i \rightarrow \infty$ zu Null für alle m . Daher ist F stetig.

- b) Wir nehmen an, es gäbe eine kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$, so dass für alle $M_K > 0$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$ (1.19) nicht gilt. Insbesondere träfe das für $M_K = m = j > 0$ zu. Daher existiert zu jedem $j \in \mathbb{N}$ ein $v_j \in C_K^\infty(\Omega)$, so dass

$$|Fv_j| > j \|v_j\|_{K,j}$$

ist. Wir setzen $w_j = \frac{v_j}{|F(v_j)|}$. Es ist

$$1 = |F(w_j)| = \frac{|F(v_j)|}{|F(v_j)|} > \frac{j \|v_j\|_{K,j}}{|F(v_j)|} = j \|w_j\|_{K,j},$$

woraus

$$\frac{1}{j} > \|w_j\|_{K,j} = \sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq j}} |D^\alpha w_j(x)|$$

folgt. Die Folge $(w_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Nullfolge in \mathcal{D} , jedoch ist $|F(w_j)| = 1$. Dieser Widerspruch liefert die Behauptung (1.19). ■

Definition 7 Falls m unabhängig von K gewählt werden kann, dann spricht man von Distributionen endlicher Ordnung. Die kleinste Zahl m , für die (1.19) für alle $K \subset \Omega$ gilt, heißt Ordnung von F in Ω .

Im anderen Fall spricht man von Distributionen unendlicher Ordnung.

Beispiele für Distributionen:

- 1) Ist $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, dann ist das lineare Funktional F_f , definiert durch

$$F_f v = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

eine Distribution 0. Ordnung. Es gilt nämlich für $v \in C_K^\infty(\Omega)$:

$$|F_f v| = \left| \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \right| = \left| \int_K f(x)v(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in K} |v(x)| \int_K |f(x)| \, dx = \|v\|_{K,0} \cdot M_K.$$

- 2) Ist $f \in L_{loc}^1(\Omega)$, dann ist das lineare Funktional

$$F_f^\alpha v = \int_{\Omega} f(x)D^\alpha v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution höchstens $|\alpha|$ -ter Ordnung. Für $v \in C_K^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} |F_f^\alpha v| &= \left| \int_{\Omega} f(x)D^\alpha v(x) \, dx \right| \leq \sup_{x \in K} |D^\alpha v(x)| \int_K |f(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{\substack{|\beta| \leq |\alpha| \\ x \in K}} |D^\beta v(x)| \int_K |f(x)| \, dx = \|v\|_{K,|\alpha|} M_K. \end{aligned}$$

Da das Supremum für β mit $|\beta| \leq |\alpha|$ angenommen werden kann, ist die Bezeichnung "höchstens" berechtigt.

3) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\xi \in \Omega$ ein fester Punkt. Die Dirac-Distribution δ_ξ ist durch

$$Fv = \langle \delta_\xi, v \rangle = v(\xi) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. F ist ein lineares stetiges Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ von der Ordnung 0:

$$|\langle \delta_\xi, v \rangle| = |v(\xi)| \leq \|v\|_{K,0}.$$

F ist nicht durch eine integrierbare Funktion darstellbar, d.h. nicht regulär (siehe Definition 8 auf folgender Seite). Dies wurde bereits für den eindimensionalen Fall für δ_0 am Ende des Abschnitts 1.1 gezeigt. Ersetzen wir die dort genutzte Multiplikation mit x durch die Multiplikation mit $(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \cdots (x_n - \xi_n)$, erhalten wir analog die Behauptung.

4) Wir betrachten die Dirac-Distribution auf Oberflächen:

Sei S eine Oberfläche im \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$. Wir definieren für eine auf S lokal integrierbare Funktion f :

$$\begin{aligned} F(v) &= F_f(v) = \int_S f v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \\ |F(v)| &\leq \int_S |f v| \, d\sigma \leq \int_S |f| \, d\sigma \sup_{x \in S} |v(x)| \leq \int_S |f| \, d\sigma \|v(x)\|_{K,0}. \end{aligned}$$

F_f kann als Maß im \mathbb{R}^n , konzentriert auf S , mit der Dichte f interpretiert werden. Man schreibt $\int_S f v \, d\sigma = \langle f \delta_S, v \rangle$, wobei δ_S die Verallgemeinerung von δ_ξ (im Punkt ξ konzentrierte Verteilung) auf eine Oberfläche S darstellt.

5) Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $|f(x)| \leq c|x|^{-m}$ für $|x| \leq 1$, wobei $m \in \mathbb{N}$ und c eine positive Konstante ist.

Es gibt eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ der Ordnung kleiner oder gleich m , so dass $F = F_f$ über $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist.

Es sei $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Wir betrachten die Taylorentwicklung:

$$v(x) = v(0) + xv'(0) + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} v^{(m-1)}(0) + \frac{x^m}{m!} v^{(m)}(\xi(x))$$

für eine Zwischenstelle $\xi = \xi(x)$.

Wir betrachten folgende Distribution F :

$$\begin{aligned} Fv &= \int_{|x|>1} f(x)v(x) \, dx + \int_{|x|\leq 1} f(x) \left[v(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} v^{(k)}(0) \right] \, dx \\ &= \int_{|x|>1} f(x)v(x) \, dx + \int_{|x|\leq 1} f(x) \frac{x^m}{m!} v^{(m)}(\xi(x)) \, dx. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Es ist für $v \in C_k^\infty$, $v(x) = 0$ für $|x| > a$:

$$\begin{aligned} |Fv| &\leq \|v\|_{K,0} \int_{1 < |x| < a} f(x) \, dx + \int_{|x| \leq 1} \frac{c}{m!} |v^{(m)}(\xi(x))| \, dx \\ &\leq A\|v\|_{K,0} + B\|v\|_{K,m} \leq c\|v\|_{K,m}. \end{aligned}$$

Für $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist $v^{(k)}(0) = 0$ für alle k und daher $Fv = \langle f, v \rangle$. F ist eine Fortsetzung der Funktion $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und wird auch als Regularisierung von f bezeichnet.

Wir schreiben $F = \mathcal{R}f$.

Bemerkung

Eine Regularisierung kann auch mit Hilfe des Cauchyschen Hauptwertes eingeführt werden. Wir sehen uns dieses Vorgehen für $f(x) = \frac{1}{x}$ an. Die Distribution $P\frac{1}{x}$, die durch

$$\langle P\frac{1}{x}, v(x) \rangle := pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} v(x) \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.21)$$

definiert wird, heisst Hadamard'sche Regularisierung oder kanonische Fortsetzung von $\frac{1}{x}$. Hierbei bezeichnet pv (principle value) den Cauchyschen Hauptwert, der durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{|x| \geq \varepsilon \\ x \in \text{supp } v}} \frac{1}{x} v(x) \, dx = pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} v(x) \, dx \quad (1.22)$$

gegeben ist. Wir zeigen, dass $P\frac{1}{x}$ durch (1.21) wohldefiniert ist und mit der Regularisierung (1.20) übereinstimmt, also $P\frac{1}{x} = \mathcal{R}\frac{1}{x}$ gilt.

Sei $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $v(x) = 0$ für $|x| > R$. Dann ist

$$\begin{aligned} pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} v(x) \, dx &= \int_{|x| > 1} \frac{1}{x} v(x) \, dx + pv \int_{|x| \leq 1} \frac{1}{x} v(x) \, dx \\ &= \int_{|x| > 1} \frac{1}{x} v(x) \, dx + pv \int_{|x| \leq 1} \frac{v(0) + xv'(\xi(x))}{x} \, dx \\ &= \int_{|x| > 1} \frac{1}{x} v(x) \, dx + pv \int_{|x| \leq 1} \frac{v(0)}{x} \, dx + \int_{|x| \leq 1} v'(\xi(x)) \, dx \end{aligned}$$

Da

$$pv \int_{|x| \leq 1} \frac{v(0)}{x} \, dx = v(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \, dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} \, dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \, dx \right) = 0$$

erhalten wir (1.20).

In diesen Beispielen wurden einerseits Distributionen betrachtet, die mit lokal integrierbaren Funktionen identifizierbar sind und andererseits traten Distributionen auf, die nicht durch lokal integrierbare Funktionen erzeugt werden.

Wir unterscheiden zwischen diesen beiden Typen von Distributionen.

Definition 8 Eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist regulär, wenn es eine lokal integrierbare Funktion f über Ω gibt, so dass

$$Fv = \langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ist. Ist dies nicht der Fall, so nennt man die Distribution singulär.

Die Distribution in Beispiel 4 ist singulär.

Träger einer Distribution

Es ist im Allgemeinen nicht sinnvoll, den Wert einer Distribution in einem beliebigen Punkt aus Ω zu definieren, jedoch können wir sagen, wann eine Distribution in einer offenen Teilmenge von Ω verschwindet.

Definition 9 Es sei $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω_0 eine offene Teilmenge von Ω .

$$F = 0 \text{ auf } \Omega_0 \iff Fv = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_0).$$

Definition 10 Der Träger einer Distribution ist definiert durch

$$\text{supp } F = \{\mathbb{R}^n \setminus \Omega, \text{ wobei } \Omega \text{ die größte offene Menge mit } F = 0 \text{ ist}\},$$

oder

$$\text{supp } F = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{es gibt keine offene Umgebung } U(x), \text{ auf der } F = 0 \text{ ist}\}.$$

Es gilt $Fv = 0$ für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\text{supp } F \cap \text{supp } v = \emptyset$.

Differentiation von Distributionen

Definition 11 Die α -te Ableitung einer Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist das Funktional $D^\alpha F$, das durch

$$\langle D^\alpha F, v \rangle = D^\alpha F(v) = D^\alpha Fv := (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ definiert ist.

$D^\alpha F$ befindet sich in $\mathcal{D}'(\Omega)$, da folgende Eigenschaften gelten:

- $D^\alpha F$ ist linear, da

$$\langle D^\alpha F, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \rangle = (-1)^{|\alpha|} (\lambda_1 \langle F, D^\alpha v_1 \rangle + \lambda_2 \langle F, D^\alpha v_2 \rangle).$$
- $D^\alpha F$ ist stetig.
 Aus $v_k \xrightarrow{\mathcal{D}} v$ folgt $D^\alpha v_k \xrightarrow{\mathcal{D}} D^\alpha v$ für alle α und für $k \rightarrow \infty$.
 Daher gilt $\langle D^\alpha F, v_k \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v_k \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha v \rangle = \langle D^\alpha F, v \rangle$.

Folgerungen

- Jede Distribution ist beliebig oft differenzierbar.
- Das Ergebnis der Differentiation ist nicht von der Differentiationsreihenfolge abhängig:

$$D^\alpha D^\beta F = D^\beta D^\alpha F.$$

- Ist $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \in C^\infty(\Omega)$, dann ist aF durch die Relation

$$\langle aF, v \rangle = \langle F, av \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert. aF befindet sich in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Die Leibniz'sche Regel gilt:

$$D^\alpha(aF) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta a D^{\alpha - \beta} F,$$

mit $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.

Bemerkungen

- In [31] ist gezeigt, dass eine assoziative und kommutative Multiplikation von zwei beliebigen Distributionen nicht definiert werden kann.

Wir betrachten folgendes Beispiel:

$$(x\delta_0)P\frac{1}{x} = 0P\frac{1}{x} = 0,$$

$$(\delta_0x)P\frac{1}{x} = \delta_0(xP\frac{1}{x}) = \delta_0.$$

- Ist $F = 0$ in Ω , so ist auch $D^\alpha F = 0$ in Ω , das heißt $\text{supp } D^\alpha F \subset \text{supp } F$.
- Konvergiert $F_k \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} F$, dann konvergiert $D^\alpha F_k \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} D^\alpha F$ für $k \rightarrow \infty$, das heißt, konvergente Distributionenfolgen/-reihen können beliebig oft differenziert werden.

Beispiele

- Ableitungen der Dirac-Distribution:

$$\langle D^\alpha \delta_\xi, v \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_\xi, D^\alpha v \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(\xi).$$

- Ableitung von $\ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^1$:

$\ln|x|$ ist lokal integrierbar, jedoch ist die klassische Ableitung $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ nicht unmittelbar mit einer Distribution aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ identifizierbar (siehe 5. Beispiel, S.23).

Wir berechnen die Ableitung im Sinne der Distributionentheorie:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d}{dx} \ln |x|, v(x) \right\rangle &= -\langle \ln |x|, v'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |x| v'(x) dx \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| v'(x) dx \right] \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\ln |x| v(x) \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \ln |x| v(x) \Big|_{\varepsilon}^{+\infty} + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) dx \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \varepsilon [v(\varepsilon) - v(-\varepsilon)] + \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) dx \right) \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} v(x) dx = pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} v(x) dx =: \left\langle P \frac{1}{x}, v(x) \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass für kleine ε

$$\begin{aligned}
 v(\varepsilon) &= v(0) + \varepsilon v'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(\xi), \\
 v(-\varepsilon) &= v(0) - \varepsilon v'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} v''(\eta)
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

ist. Damit folgt:

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = P \frac{1}{x}. \tag{1.24}$$

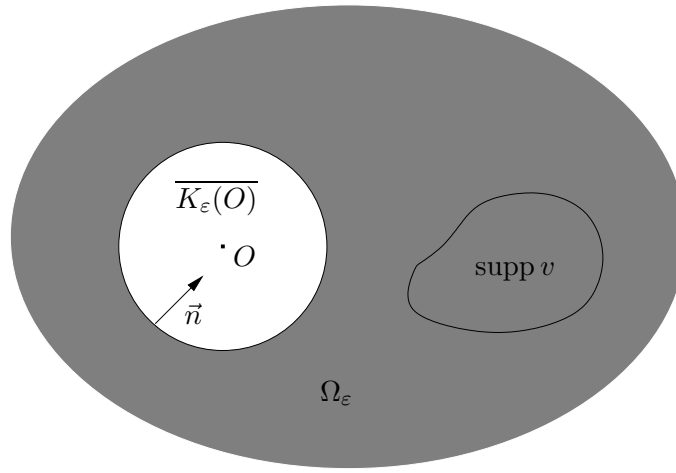
- Ableitung von $P \frac{1}{x}$: Wir zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{d}{dx} P \frac{1}{x}, v \right\rangle &= -\left\langle P \frac{1}{x}, v'(x) \right\rangle = -pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} v'(x) dx \\
 &= -pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{v(x) - v(0)}{x^2} dx \right] \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} v'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x} v'(x) dx - \left[\frac{1}{x} (v(x) - v(0)) \right]_{\varepsilon}^{-\varepsilon} \right] \\
 &= pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} v'(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} [v(-\varepsilon) - v(0) + v(\varepsilon) - v(0)] \right\} \\
 &\stackrel{(1.23)}{=} pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} v'(x) dx,
 \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Abbildung 1.6: Das Gebiet Ω_ε

- Berechnung der Distributionenableitung

$$\Delta \ln |x| = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \ln |x| + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ln |x| \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Aus der Definition folgt, dass

$$\begin{aligned} \langle \Delta \ln |x|, v \rangle &= \langle \ln |x|, \Delta v \rangle \quad \text{für } v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx. \end{aligned}$$

Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$, so dass $\text{supp } v \cup \overline{K_\varepsilon(0)} \subset \Omega$ und $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(0)}$ (siehe Abbildung 1.6).

Die 2. Greensche Formel liefert:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta \ln |x| v(x) \, dx + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left(\ln |x| \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln |x| \right) \, ds.$$

Da v und $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf $\partial \Omega$ verschwinden, erhalten wir

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_{|x| \geq \varepsilon} \Delta \ln |x| v(x) \, dx + \int_{|x| = \varepsilon} \left(\ln |x| \frac{\partial}{\partial n} v(x) - v(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln |x| \right) \, ds.$$

Setzen wir $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, dann ist $\partial_n = -\partial_r$ auf dem Rand $r = \varepsilon$ und damit (wegen $\Delta \ln |x| = 0$ für $|x| \geq \varepsilon$)

$$\int_{|x| \geq \varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \int_0^{2\pi} \left[-\ln \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} v(r, \varphi) \Big|_{r=\varepsilon} + v(\varepsilon, \varphi) \frac{1}{\varepsilon} \right] \varepsilon \, d\varphi.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \ln |x| \Delta v \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} v(\varepsilon, \varphi) \, d\varphi = v(0)2\pi$$

und

$$\Delta \ln |x| = 2\pi \delta_0 \quad (1.25)$$

ist.

- Distributionenableitung $\Delta \frac{1}{|x|}$:
Analog zum vorigen Beispiel erhält man in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$:

$$\Delta \frac{1}{|x|} = -4\pi \delta_0 \quad (1.26)$$

(vgl. [4, Example 2.15, S. 44]).

- Lösen der Gleichung $x^m u = 0$:
Wir lösen die Gleichung $x^m u = 0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. In $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ existiert nur die Lösung $u = 0$ fast überall. Wir zeigen, dass $u = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta_0^{(k)}(x)$ eine Lösung in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist.

Dazu betrachten wir die Gleichung

$$\langle x^m \delta_0^{(k)}, v \rangle = \langle \delta_0^{(k)}, x^m v \rangle = (-1)^k \langle \delta_0, D^k(x^m v) \rangle = (-1)^k (x^m v)^{(k)}|_{x=0} = 0$$

für $k \leq m - 1$ und für beliebige Elemente $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Es gilt allgemeiner: Jede verallgemeinerte Funktion, deren Träger ein Punkt ist, kann als Linearkombination der entsprechenden Delta-Distribution und ihrer Ableitungen dargestellt werden [4, Th.3.2, S. 76–78].

Wir beweisen diese Aussage in mehreren Schritten.

Satz 4 Jede Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit kompaktem Träger ist von endlicher Ordnung.

Beweis

Sei $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\text{supp} F$ und $\text{supp} \eta = K$. Nach Satz 3 existieren eine Konstante M_K und eine Zahl $m = m(K) \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$|\langle F, w \rangle| \leq M_K \|w\|_{K,m} \quad \forall w \in C_k^\infty(\Omega).$$

Wir zeigen, dass m unabhängig von der kompakten Menge K gewählt werden kann. Dazu betrachten wir eine beliebige Funktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Es ist

$$\langle F, v \rangle = \langle F, \eta v \rangle \text{ und } \eta v = w \in C_K^\infty(\Omega).$$

Dann gilt

$$|\langle F, v \rangle| = |\langle F, \eta v \rangle| \leq M_K \|\eta v\|_{K,m} \leq M_K C_\eta \|v\|_{\text{supp} v, m} \quad (1.27)$$

für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$. ■

Wir führen jetzt einen weiteren Raum von Funktionen ein.

Der Raum \mathcal{E}

Sei $\mathcal{E}(\Omega)$ der Raum $C^\infty(\Omega)$, versehen mit folgendem Konvergenzbegriff:

Definition 12 Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $C^\infty(\Omega)$ und $K \subset \Omega$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Die Folge (e_n) konvergiert genau dann zum Nullelement in $\mathcal{E}(\Omega)$, falls $\sup_{x \in K} |D^\alpha e_n(x)| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, für alle Multiindizes α .

Eine Distribution mit kompaktem Träger kann von $\mathcal{D}(\Omega)$ auf $\mathcal{E}(\Omega)$ fortgesetzt werden. Sei $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution mit kompaktem Träger und $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\text{supp } F$, $\text{supp } \eta = K$. Dann können wir für ein beliebiges Element $e \in C^\infty(\Omega)$ definieren:

$$\langle F, e \rangle = \langle \eta F, e \rangle := \langle F, \eta e \rangle = \langle F, v \rangle,$$

wobei $\eta e = v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist.

Es ist offensichtlich, dass F ein lineares Funktional auf $\mathcal{E}(\Omega)$ ist. Wir zeigen die Stetigkeit. Sei (e_n) eine Nullfolge in $\mathcal{E}(\Omega)$. Dann ist (ηe_n) eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\Omega)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle F, e_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle F, \eta e_n \rangle = 0.$$

Aus diesen Überlegungen können wir folgenden Satz folgern:

Satz 5 Jede Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } F = \{0\}$ kann durch eine Linearkombination von Ableitungen der Dirac-Distribution δ_0 dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \langle F, v \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta_0, v \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(0). \end{aligned}$$

Beweis

Aus Satz 4 folgt, dass F eine endliche Ordnung m besitzt. Wir betrachten die Taylorentwicklung von v :

$$v(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha v(0) x^\alpha + R_m(x),$$

wobei $R_m \in \mathcal{E}(\Omega)$ und $D^\alpha R_m(0) = 0$ für $|\alpha| \leq m$ ist. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset K_\varepsilon(0)$, so dass gilt

$$|\langle F, R_m \rangle| = |\langle F, \eta R_m \rangle| \leq M \|R_m\|_{K,m} < \varepsilon.$$

Da ε beliebig gewählt werden kann, ist $\langle F, R_m \rangle = 0$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle F, v \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha v(0) \langle F, x^\alpha \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(0), \end{aligned}$$

wobei $c_\alpha(-1)^{|\alpha|} = \frac{1}{\alpha!} \langle F, x^\alpha \rangle$ gesetzt wurde. Wir zeigen die Eindeutigkeit. Sei

$$F = \sum_{|\alpha| \leq m} k_\alpha D^\alpha \delta_0 = \sum_{|\alpha| \leq m} \widehat{k}_\alpha D^\alpha \delta_0,$$

d.h.

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (k_\alpha - \widehat{k}_\alpha) D^\alpha \delta_0 = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \langle (k_\alpha - \widehat{k}_\alpha) D^\alpha \delta_0, 1 \rangle &= k_{(0, \dots, 0)} - \widehat{k}_{(0, \dots, 0)} = 0 \\ &\vdots \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \langle (k_\alpha - \widehat{k}_\alpha) D^\alpha \delta_0, x^\beta \rangle &= (-1)^{|\beta|} \beta! (k_\beta - \widehat{k}_\beta) = 0, \text{ für } |\beta| \leq m, \end{aligned}$$

woraus die Eindeutigkeit folgt. ■

Tensorprodukt und Faltung

Wir beginnen mit dem Tensorprodukt. Wir erinnern zunächst an die Definition des Tensorproduktes zweier Funktionen.

Es seien $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ und $\Omega_m \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen. Als Produktmenge bezeichnen wir die Menge

$$\Omega_n \times \Omega_m = \{(x, y) : x \in \Omega_n, y \in \Omega_m\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Für Funktionen $f \in L^1_{loc}(\Omega_n)$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega_m)$ ist das direkte Produkt (Tensorprodukt) durch

$$(f \otimes g)(x, y) := f(x)g(y) = g(y)f(x) =: (g \otimes f)(x, y)$$

definiert und es gilt folgende Relation für $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x)g(y)v(x, y) \, dy \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left[\int_{\mathbb{R}^m} g(y)v(x, y) \, dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} g(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x)v(x, y) \, dx \right] dy \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+m}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Tensorprodukt von Distributionen

Mit Hilfe der zugeordneten regulären Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und $G \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$ kann (1.28) geschrieben werden als

$$\langle F \otimes G, v \rangle = \langle F, G(v) \rangle = \langle G, F(v) \rangle, \quad (1.29)$$

wobei

$$G(v) = \langle G(\cdot), v(x, \cdot) \rangle = G(v)(x), \quad F(v) = \langle F(\cdot), v(\cdot, y) \rangle = F(v)(y). \quad (1.30)$$

Falls wir zeigen können, dass für beliebige Distributionen $G(v)(x) \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ und $F(v)(y) \in \mathcal{D}(\Omega_m)$ sind, dann ist die Relation (1.29) als Definition für das Tensorprodukt zweier Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$ korrekt.

Satz 6 Für eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und eine Grundfunktion $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ gilt, dass $\langle F, v \rangle(y)$ aus $\mathcal{D}(\Omega_m)$ ist. Dabei ist:

$$D_y^\beta \langle F, v \rangle(y) = \langle F, D_y^\beta v \rangle(y).$$

Beweis

Die Funktion $\langle F, v \rangle(y) = \langle F(\cdot), v(\cdot, y) \rangle$ hat beschränkten Träger, da $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist. Bezeichnen wir mit e_i den i -ten Einheitsvektor im \mathbb{R}^m , dann gilt

$$\frac{\langle F, v \rangle(y + he_i) - \langle F, v \rangle(y)}{h} = \left\langle F(\cdot), \frac{v(\cdot, y + he_i) - v(\cdot, y)}{h} \right\rangle \quad (1.31)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle F, v \rangle(y + he_i) - \langle F, v \rangle(y)}{h} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \langle F, v \rangle(y) \\ &= \left\langle F(\cdot), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(\cdot, y + he_i) - v(\cdot, y)}{h} \right\rangle = \left\langle F(\cdot), \frac{\partial}{\partial y_i} v(\cdot, y) \right\rangle = \left\langle F, \frac{\partial}{\partial y_i} v \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Analoge Überlegungen gelten auch für die höheren Ableitungen. Der Satz gilt auch, falls F mit G und x mit y vertauscht wird. ■

Satz 7 Es sei $F_n \in \mathcal{D}'(\Omega_n)$ und $G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_m)$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Distribution $F_n \otimes G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m)$, die durch

$$\begin{aligned} (F_n \otimes G_m)(v_n \otimes v_m) &:= F_n(v_n)G_m(v_m) \quad \forall v_i \in \mathcal{D}(\Omega_i), i = n, m, \\ (F_n \otimes G_m)v &:= F_n(G_m(v)) = G_m(F_n(v)) \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m) \end{aligned}$$

definiert ist.

Beweis

Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass die lineare Hülle von $\mathcal{D}(\Omega_n) \otimes \mathcal{D}(\Omega_m)$ dicht in $\mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist [34, Lemma, S. 99]. Wir müssen zeigen, dass $F_n \otimes G_m \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m)$ ist.

- Die Linearität von $F_n \otimes G_m$ ist offensichtlich:
 $(F_n \otimes G_m)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (F_n \otimes G_m)v_1 + \lambda_2 (F_n \otimes G_m)v_2$ für $v_i \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$, $i = 1, 2$.
- Die Stetigkeit zeigen wir durch entsprechende Abschätzungen. Dazu betrachten wir kompakte Mengen $K_n \subset \Omega_n$ und $K_m \subset \Omega_m$. Da F_n und G_m stetig sind, existieren Konstanten M_n und M_m und nichtnegative Zahlen n_0 und m_0 , so dass

$$\begin{aligned} |F_n(v_n)| &\leq M_n \|v_n\|_{n_0} \quad \text{für alle } v_n \in \mathcal{D}(K_n) \quad \text{und} \\ |G_m(v_m)| &\leq M_m \|v_m\|_{m_0} \quad \text{für alle } v_m \in \mathcal{D}(K_m) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Zu der kompakten Menge $K = K_n \times K_m$ wählen wir eine beliebige Funktion $v \in \mathcal{D}(K)$. Nach Satz 6 ist $\langle G_m, v \rangle(\cdot) \in \mathcal{D}(K_n)$ und

$$|(F_n, \langle G_m, v \rangle(\cdot))| \leq M_n \|\langle G_m, v(\cdot) \rangle\|_{n_0} = M_n \sup_{\substack{|\alpha| \leq n_0 \\ x \in K_n}} |\langle G_m, D_x^\alpha v \rangle(x)|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq M_n M_m \sup_{\substack{|\alpha| \leq n_0, x \in K_n \\ |\beta| \leq m_0, y \in K_m}} \{|D_x^\alpha D_y^\beta v(x, y)|\} \\
 &= M_n M_m \sup_{\substack{|\gamma| \leq n_0 + m_0 \\ (x, y) \in K}} |D^\gamma v(x, y)| \\
 &= M_n M_m \|v\|_{n_0 + m_0}.
 \end{aligned}$$

Vertauschen wir die Rolle von F_n und G_m , dann erhalten wir die gleiche Abschätzung und es gilt:

$$F_n \otimes G_m = G_m \otimes F_n \in \mathcal{D}'(\Omega_n \times \Omega_m).$$

Lemma 3 Für die Träger der entsprechenden Funktionale gilt ■

$$\text{supp}(F_n \otimes G_m) = \text{supp} F_n \times \text{supp} G_m,$$

falls $\text{supp} F_n \subset \Omega_n$ und $\text{supp} G_m \subset \Omega_m$ ist.

Beweis

Betrachten wir ein $v \in \mathcal{D}(\Omega_n \times \Omega_m)$ mit der Eigenschaft, dass $\text{supp} v \subset (\Omega_n \setminus \text{supp} F_n) \times \Omega_m$ oder $\text{supp} v \subset \Omega_n \times (\Omega_m \setminus \text{supp} G_m)$. Dann ist $(F_n \otimes G_m)v = 0$ bzw. $(G_m \otimes F_n)v = 0$.

Daher gilt zunächst:

$$\text{supp}(F_n \otimes G_m) \subset \text{supp} F_n \times \text{supp} G_m.$$

Betrachten wir Funktionen $v_n \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ und $v_m \in \mathcal{D}(\Omega_m)$, dann gilt:

$$(F_n \otimes G_m)(v_n \otimes v_m) = F_n(v_n)G_m(v_m)$$

und damit:

$$\text{supp} F_n \times \text{supp} G_m \subset \text{supp}(F_n \otimes G_m).$$

Beispiel:

$$\text{supp}(\delta_\xi \otimes \delta_\eta) = \{(\xi, \eta)\}.$$

Wir gehen nun zur Faltung über.

Faltung

Wir erinnern zunächst an den klassischen Faltungsbegriff für Funktionen.

Seien f und g lokal integrierbare Funktionen im \mathbb{R}^n , so dass

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)| \, dy$$

ebenfalls lokal integrierbar ist. Die Funktion

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x-y) \, dy = (g * f)(x)$$

ist die Faltung der Funktionen f und g .

Die Bedingung, dass $f * g$ lokal integrierbar ist, ist in folgenden Fällen erfüllt:

- 1) Eine der Funktionen hat kompakten Träger; z.B. $\text{supp } f \subset K_{R_1}$ sei kompakt. In K_R gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \int_{K_R} (f * g)(x) \, dx &\leq \int_{K_R} \int_{K_{R_1}} |f(y)| |g(x-y)| \, dy \, dx \\ &\leq \int_{K_{R_1}} \int_{K_R} |f(y)| |g(x-y)| \, dx \, dy \\ &\leq \int_{K_{R_1}} |f(y)| \, dy \int_{K_{R+R_1}} |g(\xi)| \, d\xi < \infty. \end{aligned}$$

- 2) Die Funktionen f und g verschwinden für $x < 0$ ($n = 1$). Dann ist:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} (f * g)(x) \, dx &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_0^x f(y) g(x-y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_0^R f(y) g(x-y) \, dy \right) \, dx \\ &\leq \int_0^R |f(y)| \int_{-R}^R |g(x-y)| \, dx \, dy \\ &\stackrel{x-y=\xi}{\leq} \int_0^R |f(y)| \, dy \int_0^R |g(\xi)| \, d\xi < \infty. \end{aligned}$$

- 3) Die Funktionen f und g sind integrierbar im \mathbb{R}^n . Für Funktionen $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\langle f * g, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\xi) v(\xi) \, d\xi \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(\xi - y) \, dy \right] v(\xi) \, d\xi \\ &\stackrel{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{g(\xi - y)}_{=x} v(\xi) \, d\xi \right] \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) v(x + y) \, dx \, dy \\ &= \langle f \otimes g, v(x + y) \rangle = \langle f, \underbrace{\langle g, v(x + y) \rangle}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n)} \rangle. \quad (1.34) \end{aligned}$$

Da $v(x+y) = w(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ im Allgemeinen keinen beschränkten Träger besitzt, ist die Faltung nicht für alle Distributionen definiert:

$$\text{supp } v(x+y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : x+y \in \text{supp } v \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Besitzt jedoch f oder g beschränkten Träger, dann ist $\text{supp}(f \otimes g) \cap \text{supp } v(x+y) = (\text{supp } f \times \text{supp } g) \cap \text{supp } v(x+y)$ kompakt und (1.34) wohldefiniert.

Definition 13 Besitzt eine der Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ oder $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger, dann ist die Faltung durch die Relation

$$\begin{aligned} \langle (F * G), v \rangle &= \langle F \otimes G, v(x+y) \rangle \\ &= \langle F, Gv(x+y) \rangle = \langle G, Fv(x+y) \rangle \\ &= \langle (G * F), v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{1.35}$$

definiert.

Besitze G kompakten Träger. Dann ist $Gv(x+y) = \langle G, \eta v(x+y) \rangle$, wobei $\eta = \eta(y) \equiv 1$ für $y \in U(\text{supp } G)$ und $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Damit ist $\eta(y)v(x+y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ und $\langle G, \eta v(x+y) \rangle \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Die Wahl der Funktion η spielt hierbei keine Rolle. Man kann für Distributionen G mit kompaktem Träger in dieser Weise auch die Fortsetzung von G auf $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definieren.

Beispiel

Wir betrachten die Faltung von $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der δ_0 -Distribution

$$\langle \delta_0 * F, v \rangle = \langle \delta_0 \otimes F, v(x+y) \rangle = \langle F, \delta_0 v(x+y) \rangle = \langle F, v(y) \rangle = \langle F, v \rangle.$$

Für die Faltung von $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Ableitung der δ_0 -Distribution gilt:

$$\langle D^\alpha \delta_0 * F, v \rangle = \langle F, D^\alpha \delta_0 v(x+y) \rangle = \langle F, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v(y) \rangle = \langle D^\alpha F, v \rangle.$$

Kurz:

$$D^\alpha \delta_0 * F = D^\alpha F = \delta_0 * D^\alpha F.$$

Wir überlegen nun, wie man vorgehen kann, wenn die Voraussetzung in der Definition 13 nicht zutrifft. In diesem Fall müsste $F \otimes G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ auf eine Teilmenge $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^{2n})$ von Funktionen aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{2n})$ fortgesetzt werden, zu der die Funktionen $v(x+y)$ gehören.

Der Raum $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$

Definition 14 [35, §8, S.106] Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge. $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller $e \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (siehe Definition 12) für die $M \cap \text{supp } e$ beschränkt ist.

$\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$ ist ein linearer Raum und $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_M$. Ist M beschränkt, dann ist $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Ist $M = \mathbb{R}^n$, so ist $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Wir betrachten eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $M = \text{supp } F$. Wir definieren eine Fortsetzung von F auf $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$, indem wir $e \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$ außerhalb des Trägers von F so ändern, dass wir ein Element aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ erhalten.

Definition 15 (Fortsetzung von F auf $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$) Sei $e \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$ und $K = M \cap \text{supp } e$. Wir betrachten eine Funktion $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die in einer Umgebung der kompakten Menge K gleich 1 ist. Dann ist

$$\langle F, e \rangle := \langle F, \eta e \rangle \quad \forall e \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n). \quad (1.36)$$

Durch die Relation (1.36) ist F wohl definiert, falls die Funktion η beliebig gewählt werden kann. Seien η_1 und η_2 zwei Funktionen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die in der obigen Definition auftreten. Dann ist nach Definition 10, letzte Bemerkung,

$$\langle F, \eta_1 e \rangle - \langle F, \eta_2 e \rangle = \langle F, (\eta_1 - \eta_2) e \rangle = 0.$$

Kommen wir nun wieder zu unserem Tensorprodukt $F \otimes G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ zurück. In diesem Fall ist nach Lemma 3

$$M = \text{supp}(F \otimes G) = \text{supp } F \times \text{supp } G.$$

Der Ausdruck $\langle F \otimes G, v(x+y) \rangle$ ist wohl definiert, falls $v(x+y) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$ ist. Sei $\text{supp } v(x) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$. Dann ist

$$\text{supp } v(x+y) \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x+y| \leq r\} = T_r,$$

d.h. der Träger von $v(x+y)$ befindet sich in einem unendlichen Streifen T_r (siehe Abbildung 1.3)

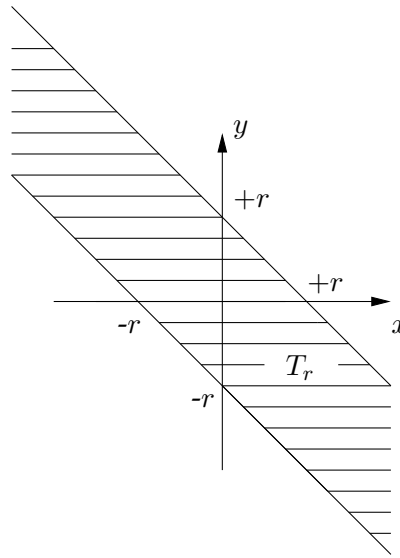


Abbildung 1.7: Streifenbedingung

Damit ist $v(x+y) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^{2n})$, falls $M \cap T_r$ beschränkt ist. Um dies für alle $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zu garantieren, führt man eine Streifenbedingung für M bzw. für die Distributionen F und G ein:

Definition 16 Die Distributionen $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ genügen einer Streifenbedingung, falls

$$M_r = M \cap T_r = \text{supp}(F \otimes G) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x+y| \leq r\} \quad (1.37)$$

für alle $r > 0$ beschränkt ist.

Bemerkung

Wir erhalten als Spezialfall: Falls F oder G beschränkten Träger besitzt, dann ist die Streifenbedingung erfüllt. Besitze G beschränkten Träger, d.h. es gibt ein $b > 0$, so dass $\text{supp } G \subset \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq b\}$ ist. Dann ist auch $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y| \leq r + b$ und M_r ist beschränkt.

Satz 8 Sind F und G aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und genügen sie einer Streifenbedingung, dann ist die Faltung $F * G$ durch die Relation

$$\begin{aligned} \langle F * G, v \rangle &= \langle F \otimes G, v(x + y) \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ &= \langle F \otimes G, \eta(M_r)v(x + y) \rangle \end{aligned} \quad (1.38)$$

wohl definiert und ist ein Element aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Beweis

Die Wohldefiniertheit ist eine unmittelbare Folgerung der Streifenbedingung. Wir zeigen die Linearität von $F * G$. Da für eine Linearkombination

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}, \quad v_i \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2,$$

stets gilt, dass aufgrund der Streifenbedingung $\lambda_1 v_1(x + y) + \lambda_2 v_2(x + y) \in \mathcal{E}_M(\mathbb{R}^{2n})$ ist, folgt unmittelbar die Linearität von $F * G$.

Um die Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir eine Nullfolge (v_k) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } v_k \subset \{|x| : |x| \leq r\}$ für alle k . Es gilt

$$\langle F * G, v_k \rangle = \langle F \otimes G, v_k(x + y) \rangle = \langle F \otimes G, \eta(x, y)v_k(x + y) \rangle$$

für ein $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\eta = 1$ in einer Umgebung von $M_r = M \cap T_r$, $M = \text{supp}(F \otimes G)$. Die Funktionen $w_k = \eta(x, y)v_k(x + y)$ befinden sich in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, $\text{supp } w_k \subseteq \text{supp } \eta$, und die Folge (w_k) ist eine Nullfolge in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Da $F \otimes G$ stetig ist, folgt die Stetigkeit von $F * G$. ■

Eigenschaften des distributionellen Faltungsproduktes

Falls mindestens eine der folgenden Distributionen kompakten Träger besitzt, gilt:

- 1) $\text{supp}(F * G) \subset \text{supp } F + \text{supp } G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = y + z, y \in \text{supp } F, z \in \text{supp } G\}$.
Die Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht. Man betrachte $F = \delta'_0$, $G \equiv 1$. Dann ist $\text{supp}(F * G) = \text{supp}(\delta'_0 * 1) = \text{supp}(\delta_0 * 0) = \emptyset \neq \text{supp } \delta'_0 + \text{supp } 1 = \mathbb{R}$.
- 2) $F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * F_2 * F_3$.
- 3) $D^\alpha(F * G) = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G$.
Es gilt nämlich $D^\alpha(F * G) = (D^\alpha \delta_0) * F * G = (D^\alpha \delta_0 * F) * G = D^\alpha F * G = F * D^\alpha G$.

Bemerkung: Haben weder F noch G beschränkten Träger, dann gilt 3) im Allgemeinen nicht; zum Beispiel $H' * 1 = \delta_0 * 1 = 1$; $H * 1' = H * 0 = 0$ ($n = 1$).

4) Ist $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $h \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Translation τ_h von f um h durch

$$\tau_h f(x) = f(x - h) \in C(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Weiterhin gilt für Funktionen $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x) v(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - h) v(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) v(x + h) \, dx;$$

kurz: $\langle \tau_h f, v \rangle = \langle f, \tau_{-h} v \rangle$.

Daher ist die Definition der Translation einer Distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ durch die Relation

$$\langle \tau_h F, v \rangle := \langle F, \tau_{-h} v \rangle \quad (1.39)$$

sinnvoll.

Für $F = \delta_0$ gilt: $\langle \tau_h \delta_0, v \rangle = \langle \delta_0, \tau_{-h} v \rangle = \langle \delta_0(\cdot), v(\cdot + h) \rangle = v(h) = \langle \delta_h, v \rangle$.

Damit erhalten wir:

$$\langle \tau_h F, v \rangle = \langle F, \tau_{-h} v \rangle = \langle F, v(h + \cdot) \rangle = \langle F, \langle \delta_h(y) v(y + \cdot) \rangle \rangle = \langle \delta_h * F, v \rangle.$$

Kurz: $\tau_h F = \delta_h * F$.

Folgerung

Falls F oder G einen beschränkten Träger besitzt, ist:

$$\tau_h(F * G) = \delta_h * F * G = \tau_h F * G = F * \tau_h G.$$

Beispiel

Wir hatten gezeigt, dass $\Delta \ln |x| = \delta_0 2\pi$ im \mathbb{R}^2 ist. Die Funktion $\ln |x|$ wird auch als Fundamentallösung bezeichnet. Durch sie werden Lösungen der Poissongleichung $\Delta u = 2\pi f$ aufgebaut, falls die folgende Faltung und das Integral im klassischen Sinn existieren:

$$u = \ln |x| * f = \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x - y| f(y) \, dy. \quad (1.40)$$

Es gilt nämlich: $\Delta u = \Delta(\ln |x| * f) = \Delta \ln |x| * f = 2\pi \delta_0 * f = 2\pi f$.

Durch (1.40) wird das „logarithmische“ Volumenintegral definiert (Faltung der Fundamentallösung mit der Dichtefunktion f).

Lösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen

Wir betrachten eine lineare partielle Differentialgleichung der Ordnung m mit variablen Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x) \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ bzw. } f \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Führen wir als Abkürzung den Differentialoperator

$$L(x, D) := \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha$$

ein, so lautet die obige Gleichung

$$L(x, D)u(x) = f(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ (bzw. } x \in \Omega \text{)}. \quad (1.41)$$

Definition 17 Unter einer verallgemeinerten Lösung (Distributionenlösung) von (1.41) im Gebiet Ω versteht man jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, für die

$$\langle L(x, D)u, v \rangle = \langle u, L^*(x, D)v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ist. Durch $L^*(x, D)v = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x)v)$ ist der formal adjungierte Operator definiert.

Definition 18 Unter einer Fundamentallösung des Differentialoperators $L(x, D)$ im \mathbb{R}^n versteht man jede Distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die der Beziehung

$$L(x, D)E = \delta_0$$

bzw. $\langle L(x, D)E, v \rangle = \langle E, L^*(x, D)v \rangle = \langle \delta_0, v \rangle = v(0)$ für alle v aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ genügt.

Bemerkungen

- Die Existenz von Fundamentallösungen für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten wurde von L. Ehrenpreis 1954 [8] bewiesen.
- Für skalare Differentialoperatoren zweiter Ordnung $L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha$ mit $|\alpha|$ -mal Hölder-stetig differenzierbaren Koeffizienten a_α existiert eine Fundamentallösung [24, Theorem 19, III].
- Es gibt elliptische Operatoren höherer Ordnung mit C^∞ -Koeffizienten, für die keine Fundamentallösung existiert [27].
- Es gibt gewöhnliche Differentialoperatoren mit C^∞ -Koeffizienten, für die ebenfalls keine Fundamentallösung existiert (Entartung in einem Punkt).

Wir geben dazu ein Beispiel von N. Ortner (1996) an. Es sei

$$L(x, D) = (1 - x^2)^3 \frac{d}{dx} - 4x \quad (1.42)$$

ein gewöhnlicher linearer Differentialoperator mit polynomialen Koeffizienten. Beachten Sie, dass für $x = \pm 1$ eine Entartung auftritt. Für eine Fundamentallösung

$$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1) \quad (1.43)$$

müsste gelten:

$$(1 - x^2)^3 E' - 4xE = \delta_0. \quad (1.44)$$

Für $1 < x < \infty$ ist $E = ce^{\frac{1}{(1-x^2)^2}}$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Für $\lim_{x \rightarrow 1+} x = 1$ ist E nur dann in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$, wenn $c = 0$ ist. Analoge Überlegungen in $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ und $(0, 1)$ ergeben, dass $\text{supp} E \subset \{0\}$. Da $E \neq 0$ muss $\text{supp} E = \{0\}$ sein und daher eine natürliche Zahl m existiert, so dass $E = \sum_{k=0}^m c_k \delta^{(k)}$, $c_m \neq 0$, ist. Setzen wir E in (1.44) ein, dann ergibt sich

$$(1-x^2)^3(c_0\delta' + c_1\delta'' + \dots + c_m\delta^{(m+1)}) - 4x(c_0\delta + c_1\delta' + \dots + c_m\delta^{(m)}) = \delta,$$

d.h.

$$\begin{aligned} &\langle c_0\delta' + c_1\delta'' + \dots + c_m\delta^{(m+1)}, (1-3x^2+3x^4-x^6)v(x) \rangle \\ & - \langle c_0\delta + c_1\delta' + \dots + c_m\delta^{(m)}, 4xv \rangle = v(0). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Für $h(x) = 1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$ gilt: $h(0) = 1$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -6$, $h'''(0) = 0 \dots$ und für $g(x) = 4x$ haben wir $g(0) = 0$, $g'(0) = 4$, $g^{(k)}(0) = 0$ für $k \geq 2$. Somit ist die Relation (1.45) für alle $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ erfüllt, falls

$$\begin{aligned} &-c_0[h'v + hv'] + c_1[h''v + 2h'v' + hv''] + \dots + (-1)^m c_m [h^{(m+1)}v + \dots + hv^{(m+1)}]_{|_{x=0}} \\ & - c_0[gv] + c_1[g'v + gv'] + \dots + (-1)^{m+1} c_m [g^{(m)}v + \dots + gv^{(m)}]_{|_{x=0}} = v(0) \end{aligned}$$

ist. Durch Vergleich der Koeffizienten vor $v^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \dots, (m+1)$, erhalten wir $(-1)^m c_m h(0)v^{(m+1)}(0) = 0$, woraus $c_m = 0$ folgt.

- Fundamentallösungen sind nicht eindeutig bestimmt:

Ist E_0 Lösung der homogenen Gleichung $L(x, D)u = 0$, dann ist $E + E_0$ ebenfalls Fundamentallösung: $L(x, D)(E + E_0) = L(x, D)E + L(x, D)E_0 = \delta_0$.

- Fundamentallösungen spielen bei der Konstruktion von Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung (1.41) eine „fundamentale“ Rolle.

Satz 9 (Hauptsatz) Die Differentialgleichung (1.41) besitze konstante Koeffizienten und die rechte Seite $f \in \mathcal{D}'$ von (1.41) besitze beschränkten Träger (bzw. $E * f$ existiere).

Dann existiert eine Distributionenlösung von $L(x, D)u = f$ der Gestalt

$$u = E * f.$$

Beweis

$$L(D)u = L(D)(E * f) = L(D)E * f = \delta_0 * f = f.$$

■

Beispiele für Fundamentallösungen

- 1) Wir betrachten einen linearen Differentialoperator im \mathbb{R}^1 :

$$L(x, D) = \frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \dots + a_0(x).$$

Ist u_0 Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L(x, D)u_0 &= 0 && \text{für } x > 0, \\ u_0(0) &= 0 \\ &\vdots \\ u_0^{(m-2)}(0) &= 0 \\ u_0^{(m-1)}(0) &= 1, \end{aligned}$$

dann ist $E(x) = H(x)u_0(x)$ eine Fundamentallösung von $L(x, D)$.

Wir überzeugen uns davon:

$$\begin{aligned} E &= Hu_0, \\ E' &= H'u_0 + Hu_0' = \delta_0 u_0 + Hu_0' = Hu_0' && \text{(im Distributionensinn),} \\ E'' &= H'u_0' + Hu_0'' = \delta_0 u_0' + Hu_0'' = Hu_0'' && \text{(im Distributionensinn),} \\ &\vdots \\ E^{(m)} &= H'u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)} = \delta_0 u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)} && \text{(im Distributionensinn).} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \langle L(x, D)E, v \rangle &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + Hu_0^{(m)}, v \rangle \\ &+ \langle \quad \quad \quad Ha_{m-1}(x)u_0^{(m-1)}, v \rangle \\ &\vdots \\ &+ \langle \quad \quad \quad Ha_0(x)u_0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + HL(x, D)u_0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0 u_0^{(m-1)} + 0, v \rangle \\ &= \langle \delta_0, u_0^{(m-1)}v \rangle \\ &= u_0^{(m-1)}(0)v(0) \\ &= v(0). \end{aligned}$$

2) Für den Operator der Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^1

$$L(x, Dx) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + w^2, \quad w = \text{const.},$$

ist die Funktion u_0 leicht berechenbar:

$$\begin{aligned} u_0''(x) + w^2 u_0(x) &= 0, \\ u_0(0) &= 0, \\ u_0'(0) &= 1. \end{aligned}$$

$u_0 = \frac{1}{w} \sin w x$ ist die Lösung dieses Anfangswertproblems.

Damit ist $E(x) = H(x)\frac{1}{w} \sin w x$ eine Fundamentallösung.

Die Berechnung von Fundamentallösungen ist im Allgemeinen eine anspruchsvolle Aufgabe. Wir werden uns in den folgenden Kapiteln unter Anderem mit diesem Problem (Laplace-, Wärmeleitungs- und Wellenoperator) beschäftigen, indem wir die Eigenschaften der Fouriertransformation ausnutzen.

1.4 Fouriertransformation und temperierte Distributionen

Fouriertransformation von Funktionen

Es sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, das heißt, u ist absolut integrierbar im \mathbb{R}^n . Mit (\cdot, \cdot) bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Die Fouriertransformation ist durch die Relation

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{i(\xi, x)} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.46)$$

definiert. Die Fouriertransformierte \hat{u} besitzt folgende Eigenschaften:

- \hat{u} ist beschränkt im \mathbb{R}^n :

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

- \hat{u} ist stetig in allen Punkten $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi_0)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| dx \\ &= \int_{K_A(0)} |u(x)| |e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_A(0)} 2|u(x)| dx, \end{aligned}$$

wobei $K_A(0)$ eine Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius A ist. In $K_A(0)$ kann das erste Integral wie folgt abgeschätzt werden:

Da für ein $\tilde{\xi}$ aus einer Umgebung von ξ_0 gilt (Taylorentwicklung) bezüglich ξ um ξ_0 :

$$|e^{i(\xi, x)} - e^{i(\xi_0, x)}| = |e^{i(\tilde{\xi}, x)}(x, \xi - \xi_0)| \leq |x| |\xi - \xi_0|,$$

folgt:

$$\int_{K_A(0)} |u(x)| |x| |\xi - \xi_0| dx \leq A |\xi - \xi_0| \int_{K_A(0)} |u(x)| dx < \varepsilon' \underbrace{\int_{K_A(0)} |u(x)| dx}_{\text{endliche Zahl}} < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}$$

für $|\xi - \xi_0| < \frac{\varepsilon'}{A}$.

Das zweite Integral kann ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ gewählt werden, falls A genügend groß ist, da $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist.

Somit folgt:

$$|\hat{u}(\xi) - \hat{u}(\xi_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } |\xi - \xi_0| < \frac{\varepsilon'}{A}.$$

- \hat{u} ist im Allgemeinen nicht aus $L^1(\mathbb{R}^n)$. Wählen wir zum Beispiel

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^1$, dann ist

$$\hat{u}(\xi) = \int_0^1 e^{ix\xi} dx = \frac{1}{i\xi} e^{ix\xi} \Big|_0^1 = \frac{1}{i\xi} (e^{i\xi} - 1) = \frac{\sin \xi}{\xi} - i \frac{\cos \xi - 1}{\xi}.$$

$\hat{u}(\xi)$ wäre aus $L^1(\mathbb{R}^1)$, wenn Real- und Imaginärteil absolut integrierbar sind.

Die Funktion $\frac{\sin \xi}{\xi}$ ist jedoch nicht absolut integrierbar. Falls $\int_0^\infty \frac{|\sin \xi|}{\xi} d\xi < \infty$ wäre,

dann würde auch $\int_1^\infty \frac{\sin^2 \xi}{\xi} d\xi < \infty$ sein, da $\sin^2 \xi \leq |\sin \xi|$ ist. Mit $\sin^2 \xi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\xi)$ erhalten wir, dass $\int_1^\infty \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\cos 2\xi}{\xi}\right) d\xi < \infty$ ist.

Nun ist $\int_1^\infty \frac{\cos 2\xi}{\xi} d\xi < \infty$ [9, S. 565] und damit $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{\xi} d\xi = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A < \infty$, was nicht sein kann.

- Falls \hat{u} aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ ist, dann ist die Umkehrformel

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[u]](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) \end{aligned} \quad (1.47)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gültig [28, Th. 9.11, S. 182–187].

- Ist $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $|x|^k u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, bzw. $(1 + |x|^k)u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für eine natürliche Zahl k , dann besitzt \hat{u} stetige Ableitungen bis zur Ordnung k und es gilt:

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = D_\xi^\alpha \mathcal{F}[u](\xi) = \mathcal{F}[(ix)^\alpha u] \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \quad (1.48)$$

Hierbei ist $(ix)^\alpha = (ix_1)^{\alpha_1} \dots (ix_n)^{\alpha_n}$. Wir zeigen (1.48).

Wir erhalten durch Differentiation unter dem Integral:

$$D_\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) D_\xi^\alpha e^{i(\xi,x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) (ix)^\alpha e^{i(\xi,x)} dx.$$

Da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| |(ix)^\alpha| |e^{i(\xi,x)}| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| (1 + |x|^k) dx < \infty$$

ist, konvergiert das differenzierte Integral absolut und gleichmäßig und wir erhalten die Behauptung (für $|x| < 1$ offensichtlich, für $|x| \geq 1$ benutze man die Abschätzung $|x^\alpha| = |x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}| = |x|^{|\alpha|} \leq |x|^k$, da $|x_i| \leq |x|$ ist).

- Analog kann man zeigen:

Ist $(1 + |\xi|^k)\hat{u}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann muss u stetig differenzierbar sein und

$$D_x^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}[(-i\xi)^\alpha \hat{u}] \quad \text{für } |\alpha| \leq k. \quad (1.49)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha u] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[u] \quad (1.50)$$

ist.

Weiterhin gilt für Funktionen $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\bullet \mathcal{F}[u(x-x_0)](\xi) = e^{i(x_0, \xi)} \mathcal{F}[u](\xi). \quad (1.51)$$

$$\bullet \mathcal{F}[e^{i(x, \xi_0)} u] = \mathcal{F}[u](\xi + \xi_0). \quad (1.52)$$

- Sind f, g und $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (1.53)$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy \right] e^{i(x, \xi)} \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x-y)}_z e^{i(x, \xi)} \, dx \right] g(y) \, dy \\ &\stackrel{(1.48)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(y, \xi)} \hat{f}(\xi) g(y) \, dy \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

- Falls $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann sind $f\hat{g}$ und $\hat{f}g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) \, dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

Diese Relation kann kurz geschrieben werden als

$$\langle f, \mathcal{F}[g] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], g \rangle. \quad (1.54)$$

Die Relation (1.54) liefert eine Idee, wie die Fouriertransformation von Distributionen definiert werden könnte. Jedoch bildet die Fouriertransformation den Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ab (das Fourierbild besitzt i.A. keinen endlichen Träger). Der Raum $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist zu klein und es muss ein $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ umfassender Raum \mathcal{S} gefunden werden, so dass $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Nach Einführung eines entsprechenden Konvergenzbegriffs in \mathcal{S} wird dann der Raum der linearen stetigen Funktionale \mathcal{S}' (der Raum der temperierten Distributionen) eingeführt, für welche die Fouriertransformation durch die Relation (1.54) definiert ist.

Kurz: $\mathcal{S} \supset \mathcal{D}$, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Der Raum \mathcal{S} sollte folgende Eigenschaften besitzen:

- 1) $\mathcal{S} \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- 2) $\mathcal{F}: \mathcal{S} \leftrightarrow \mathcal{S}$.
- 3) Da $D_\xi^\alpha \mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha u] = i^{|\alpha|} \mathcal{F}[x^\alpha u]$, sollte die Multiplikation mit Polynomen nicht aus \mathcal{S} herausführen.

Der Grundraum \mathcal{S}

Definition 19 Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt *schnell fallend*, falls

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty$$

bzw. Konstanten $C_{\alpha,\beta}(\varphi) = C_{\alpha,\beta}$ existieren, so dass

$$|x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \leq C_{\alpha,\beta}(\varphi) = C_{\alpha,\beta} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und}$$

für alle Multiindizes α und β ,

bzw.

$$\sup_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$$

ist. Diese Bedingung besagt, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0 \tag{1.55}$$

sein muss.

Beispiele für schnell fallende Funktionen φ , die nicht in \mathcal{D} liegen, sind $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$,
 $\varphi(x) = x^\alpha e^{-|x|^4}$.

Definition 20 Der Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der lineare komplexwertige Raum der schnell fallenden komplexwertigen Funktionen, versehen mit folgender Konvergenz:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \iff x^\alpha D^\beta \varphi_k \xrightarrow{\text{glm. im } \mathbb{R}^n} x^\alpha D^\beta \varphi$$

für $k \rightarrow \infty$ und für alle Multiindizes α und β .

Bemerkung

In \mathcal{S} ist ein abzählbares System von Seminormen einföhrbar:

$$|\varphi|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Dadurch wird eine Topologie in \mathcal{S} eingeführt, in der \mathcal{S} metrisierbar und vollständig ist (Fréchet Raum).

Satz 10 \mathcal{D} (als Grundraum komplexwertiger Funktionen) ist dicht in \mathcal{S} .

Beweis

Es sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Wir wählen eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ so, dass $\psi(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ ist. Wir setzen $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi(\varepsilon x)$ für ein $\varepsilon > 0$. φ_ε befindet sich in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da $\varphi_\varepsilon - \varphi(x) = \varphi(x)[\psi(\varepsilon x) - 1] \equiv 0$ für $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$, konvergiert $\varphi_\varepsilon(x) \rightarrow \varphi$ in \mathcal{S} für $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Definition 21 Der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist der lineare Raum aller über \mathcal{S} stetigen linearen Funktionale, versehen mit folgender schwachen Konvergenz: Die Folge (F_k) von Elementen $F_k \in \mathcal{S}'$ konvergiert gegen ein Element $F \in \mathcal{S}'$ genau dann, wenn $\langle F_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ für $k \rightarrow \infty$ und für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt.

Die Elemente aus \mathcal{S}' heißen auch verallgemeinerte Funktionen schwachen Wachstums (polynomialen Wachstums). Diese Bezeichnung kann folgendermaßen erklärt werden: Nicht jede lokal integrierbare Funktion f erzeugt eine Distribution aus \mathcal{S}' ; f darf nicht schneller wachsen als eine beliebige Potenz von x für $|x| \rightarrow \infty$, damit $\int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ existiert. Grob gesagt: lokal integrierbare Funktionen, die Elemente aus \mathcal{S}' erzeugen, dürfen nur polynomiales Wachstum besitzen. In diesem Sinne spricht man von temperierten Distributionen als Elementen aus \mathcal{S}' .

Beispiele für temperierte Distributionen

- Jedes Polynom p erzeugt ein Element aus \mathcal{S}' . Es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\langle p, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)\varphi(x)| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)| \frac{(1+|x|^2)^m}{(1+|x|^2)^m} |\varphi(x)| \, dx \\ &\leq \|p(x)(1+|x|^2)^{-m}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^m |\varphi(x)| < \infty \end{aligned}$$

für genügend großes m .

- Jede lokal integrierbare Funktion, die sich für $|x| \rightarrow \infty$ wie eine Potenz von x verhält, erzeugt eine temperierte Distribution. Ihre distributionellen Ableitungen sind wiederum temperierte Distributionen; zum Beispiel erzeugt die Heaviside'sche Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine temperierte Distribution.

- Jede Funktion $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, erzeugt ein Element aus \mathcal{S}' :

Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Der Träger befinde sich in $K_R = \{x : |x| < R\}$. Dann ist

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int_{K_R} f(x)\varphi(x) \, dx \right| \leq M|\varphi|_0 \|f\|_{L_p}.$$

Da der Raum \mathcal{D} dicht in \mathcal{S} ist, kann f zu einem linearen stetigen Funktional auf \mathcal{S} fortgesetzt werden.

- Jede Distribution mit kompaktem Träger befindet sich in \mathcal{S}' . Der Raum der Distributionen mit beschränktem Träger wird auch als \mathcal{E}' bezeichnet (Dualraum zu $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, siehe Definition 12 für die Definition von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$).

Die Ableitungen von temperierten Distributionen sind zunächst über dem Grundraum \mathcal{D} definiert, können aber auf den Grundraum \mathcal{S} durch die Relation

$$\langle D^\alpha F, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle F, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

fortgesetzt werden (\mathcal{D} ist dicht in \mathcal{S} ; ist $\varphi \in \mathcal{S}$, dann ist auch $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$).

Ebenso ist die Faltung von temperierten Distributionen F und G als Fortsetzung auf \mathcal{S} definierbar, falls eine der beiden Distributionen kompakten Träger besitzt, siehe Definition 13.

Fouriertransformation in \mathcal{S}

Die Funktionen $\varphi \in \mathcal{S}$ sind absolut integrierbar im \mathbb{R}^n und daher Fouriertransformierbar im klassischen Sinn.

Satz 11 Die Fouriertransformation bildet den Grundraum \mathcal{S} eineindeutig auf sich ab.

Beweis

Es sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Die Funktionen $(1 + |x|^k)\varphi$ befinden sich für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ ebenfalls in \mathcal{S} . Aus der Formel (1.48) folgt, dass $\mathcal{F}[\varphi]$ sich in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ befindet. Unter Beachtung von (1.47) erhalten wir:

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) = i^{|\beta|} (-i\xi)^\beta \mathcal{F}[(ix)^\alpha \varphi](\xi) = i^{|\alpha|} i^{|\beta|} \mathcal{F}[D_x^\beta(x^\alpha \varphi)](\xi)$$

und

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\beta(x^\alpha \varphi(x))| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |x|^2)^m}{(1 + |x|^2)^m} |D_x^\beta(x^\alpha \varphi)| \, dx \\ &\leq C_{m,\beta,\alpha}(\varphi) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \, dx < \infty, \end{aligned} \quad (1.56)$$

wobei m entsprechend groß gewählt wurde.

Außerdem besitzt jede Funktion $\psi \in \mathcal{S}$ ein Urbild $\varphi \in \mathcal{S}$. Dies ist offensichtlich, da $\mathcal{F}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[\psi](-x) =: \varphi(x)$ nach den obigen Ausführungen aus \mathcal{S} ist. Folglich ist \mathcal{F} eine eineindeutige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} ($\mathcal{F}[\varphi] = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[\varphi]] = \varphi = 0$). ■

Lemma 4 Die Fouriertransformation ist eine lineare stetige Abbildung von \mathcal{S} auf \mathcal{S} .

Beweis

Die Linearität ist offensichtlich. Wir betrachten eine in \mathcal{S} konvergente Folge von Funktionen (φ_k) , $\varphi_k \in \mathcal{S}$, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Aus (1.56) folgt, dass

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi^\beta D_\xi^\alpha \mathcal{F}[\varphi_k - \varphi]| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m |D^\beta(x^\alpha(\varphi_k - \varphi))| \cdot M$$

ist. Damit konvergiert $\mathcal{F}[\varphi_k] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi]$ (vergleiche mit Definition 20). ■

Fouriertransformation in \mathcal{S}'

Wie angekündigt, wird die Fouriertransformation für temperierte Distributionen mit Hilfe der Relation (1.54) eingeführt:

Definition 22 Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[F]$ ist für ein Element $F \in \mathcal{S}'$ durch die Beziehung

$$\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle = \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (1.57)$$

definiert.

$\mathcal{F}[F]$ befindet sich in \mathcal{S}' , d.h. $\mathcal{F}[F]$ ist ein lineares stetiges Funktional auf \mathcal{S} . Die Linearität, $\langle \mathcal{F}[F], \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathcal{F}[F], \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \mathcal{F}[F], \varphi_2 \rangle$, folgt aus der Linearität der Fouriertransformation \mathcal{F} über dem Grundraum \mathcal{S} .

Betrachten wir nun eine konvergente Folge von Elementen $\varphi_k \in \mathcal{S}$ mit $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.

Nach Lemma 4 ist für ein $\varepsilon > 0$:

$$|\langle \mathcal{F}[F], \varphi_k \rangle - \langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle| = |\langle F, \mathcal{F}[\varphi_k - \varphi] \rangle| < \varepsilon \quad \text{für } k > k_0(\varepsilon).$$

Die inverse Fouriertransformation ist für Elemente $G \in \mathcal{S}'$ durch die Relation

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[G], \varphi \rangle = \langle G, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (1.58)$$

erklärt. Diese Definition ist sinnvoll, da $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[G]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[G]] = G$ ist.

Wir erhalten unmittelbar:

Lemma 5 Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ist ein topologischer Isomorphismus.

Die Eigenschaften (1.48)–(1.53), die für die Fouriertransformation von Funktionen gelten, bleiben im Raum \mathcal{S}' bestehen.

Wir betrachten nun einige Relationen:

- Es ist

$$\begin{aligned} \langle D_\xi^\alpha \mathcal{F}[F], \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}[F], D_\xi^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, \mathcal{F}[D_\xi^\alpha \varphi] \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F, (-ix)^\alpha \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[(ix)^\alpha F], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

das heißt

$$D_\xi^\alpha \mathcal{F}[F] = \mathcal{F}[(ix)^\alpha F].$$

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[D_x^\alpha F], \varphi \rangle &= \langle D_x^\alpha F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle F, D_x^\alpha \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F, \mathcal{F}[(i\xi)^\alpha \varphi] \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \mathcal{F}[F], (i\xi)^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[F], \varphi \rangle, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha F] = (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[F].$$

- Wir verifizieren (1.51) im Raum \mathcal{S}'

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[F(x - x_0)], \varphi \rangle &= \langle \mathcal{F}[\tau_{x_0} F], \varphi \rangle = \langle \tau_{x_0} F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi](\xi + x_0) \rangle = \langle F, \mathcal{F}[e^{i(\xi, x_0)} \varphi] \rangle \\ &= \langle e^{i(\xi, x_0)} \mathcal{F}[F], \varphi \rangle,\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\mathcal{F}[F(x - x_0)] = e^{i(\xi, x_0)} \mathcal{F}[F].$$

Lemma 6 Sei $F \in \mathcal{S}'$ eine Distribution mit beschränktem Träger. Dann ist

$$\mathcal{F}[F](\xi) = \langle F(x), \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle \quad (1.59)$$

für ein beliebiges $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\text{supp} F$.

Beweis

Für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}[F], \varphi \rangle &= \langle F, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle F(x), \eta(x) \mathcal{F}[\varphi](x) \rangle \\ &= \langle F(x), \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\eta(x) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})} d\xi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle F(x), \eta(x) e^{i(x, \xi)} \rangle \varphi(\xi) d\xi \\ &= \langle \langle F(x), \eta(x) e^{i(x, \xi)} \rangle, \varphi(\xi) \rangle.\end{aligned}$$

■

Beispiele

Sei $F = \delta_0$. Dann liefert (1.59):

$$\mathcal{F}[\delta_0] = \langle \delta_0, \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle = \eta(0) e^{i(\xi, 0)} \equiv 1.$$

Für $F = D^\alpha \delta_0$ erhalten wir:

$$\mathcal{F}[D^\alpha \delta_0] = (-i\xi)^\alpha. \quad (1.60)$$

Es gilt nämlich:

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha \delta_0](\xi) = \langle D_x^\alpha \delta_0, \eta(x) e^{i(\xi, x)} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \eta(x) D_x^\alpha e^{i(\xi, x)} \Big|_{x=0} = (-1)^{|\alpha|} (i\xi)^\alpha = (-i\xi)^\alpha.$$

Da $\mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[1] = \delta_0$ ist, folgt: $\mathcal{F}[1] = \delta_0 (2\pi)^n$;

oder allgemeiner

$$\mathcal{F}^{-1}[(-x)^\alpha] = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}[(+x)^\alpha] \stackrel{(1.60)}{=} (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0.$$

Daraus folgt

$$\mathcal{F}[x^\alpha] = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0 (2\pi)^n.$$

Fouriertransformation der Faltung

Seien $F, G \in \mathcal{S}'$ und G oder F besitze kompakten Träger. Dann gilt die Relation

$$\mathcal{F}[F * G] = \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G],$$

wobei $\langle \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G], \varphi \rangle := \langle \mathcal{F}[F], F[G]\varphi \rangle$ ist.

Wir nehmen an, dass G beschränkten Träger besitzt.

Da $\langle F * G, \varphi \rangle = \langle F(x), \langle G(y), \eta(y)\varphi(x+y) \rangle \rangle$ für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist (η ist die oben beschriebene Abschneidefunktion), erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[F * G], \varphi \rangle &= \langle F * G, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle F(x), \langle G(y), \eta(y)\mathcal{F}[\varphi](x+y) \rangle \rangle \\ &\stackrel{(1.42)}{=} \langle F(x), \langle G(y), \eta(y) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{i(x+y, \xi)} d\xi \rangle \rangle \\ &= \langle F(x), \int_{\mathbb{R}^n} \langle G(y), \eta(y) e^{i(\xi, y)} \rangle \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \rangle \\ &\stackrel{(1.49)}{=} \langle F, \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}[G](\xi) \varphi(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \rangle \\ &= \langle F, \underbrace{\mathcal{F}[\mathcal{F}[G]\varphi]}_{\in \mathcal{S}} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[F], \mathcal{F}[G]\varphi \rangle \\ &=: \langle \mathcal{F}[F]\mathcal{F}[G], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Fouriertransformation ist nicht immer einfach; ein Beispiel ist.

Beispiel

Man berechne $\mathcal{F}[H] = \pi\delta_0 + iR\frac{1}{\xi}$ im \mathbb{R}^1 .

Für die Funktion $H(x)e^{-ax}$, $a > 0$, gilt:

$$\mathcal{F}[H(x)e^{-ax}] = \int_0^{\infty} e^{-ax+ix\xi} dx = \frac{1}{-a+i\xi} e^{-ax+ix\xi} \Big|_0^{\infty} = \frac{-1}{-a+i\xi} = \frac{i}{\xi+ia}.$$

Für $a \rightarrow 0_+$ konvergiert $H(x)e^{-ax} \xrightarrow{\mathcal{S}'} H(x)$ und daher ist $\lim_{a \rightarrow 0_+} \mathcal{F}[H(x)e^{-ax}] \stackrel{\mathcal{S}'}{=} \mathcal{F}[H]$.

Ist $\varphi(x) = 0$ für $|x| > R$, dann ist:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0_+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi+ia} d\xi &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \int_{-R}^{+R} \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} \varphi(\xi) d\xi \\ &= \lim_{a \rightarrow 0_+} \left[\varphi(0) \int_{-R}^{+R} \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} d\xi + \int_{-R}^{+R} [\varphi(\xi) - \varphi(0)] \frac{\xi-ia}{\xi^2+a^2} d\xi \right] \\ &= -2i\varphi(0) \lim_{a \rightarrow 0_+} \arctan \frac{R}{a} + \int_{-R}^{+R} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(0)}{\xi} d\xi \\ &= -i\pi\varphi(0) + \left\langle R\frac{1}{\xi}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\xi}{\xi^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(\xi^2 + a^2) \Big|_{-R}^{+R} = 0$$

und

$$\int_{-R}^{+R} \frac{-ia}{\xi^2 + a^2} = -i \arctan \frac{\xi}{a} \Big|_{-R}^{+R}$$

ist.

Da \mathcal{D} in \mathcal{S} dicht ist, folgt die Behauptung.

Kapitel 2

Rand- und Anfangswertprobleme für lineare partielle Differentialgleichungen

Wie wir bereits im Hauptsatz gesehen haben, können mit Hilfe von Fundamentallösungen Lösungen von partiellen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dargestellt werden. Die Fundamentallösungen sind jedoch nicht eindeutig bestimmt. Gelingt es, solche Fundamentallösungen (Greensche Funktionen) zu bestimmen, die gewissen Rand- beziehungsweise Anfangsbedingungen genügen, dann können mit ihrer Hilfe Lösungen von Rand- und Anfangswertproblemen dargestellt werden. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Berechnung von Fundamentallösungen mit Hilfe der Fouriertransformation.

2.1 Berechnung von Fundamentallösungen

Wir beginnen mit der Charakterisierung von Fundamentallösungen $E \in S'$.

Satz 12 Eine verallgemeinerte Funktion $E \in S'$ ist genau dann eine Fundamentallösung des Differentialoperators $L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten, wenn ihre Fouriertransformierte $\mathcal{F}[E]$ der algebraischen Gleichung

$$L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = 1$$

mit $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \xi^\alpha$ genügt.

Beweis

a) Es sei $E \in S'$ eine Fundamentallösung des Operators $L(D)$, das heißt

$$L(D)E = \delta_0.$$

Wenden wir die Fouriertransformation an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[L(D)E] &= \mathcal{F}\left[\sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha E\right] = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha \mathcal{F}[D^\alpha E] \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha (-i\xi)^\alpha \mathcal{F}[E] = L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = \mathcal{F}[\delta_0] = 1.\end{aligned}$$

b) $E \in \mathcal{S}'$ genüge der Beziehung

$$L(-i\xi)\mathcal{F}[E] = 1$$

und daher ist:

$$\mathcal{F}[L(D)E] = \mathcal{F}[\delta_0].$$

Da \mathcal{F} ein topologischer Isomorphismus von \mathcal{S}' auf \mathcal{S}' ist, muss $L(D)E = \delta_0$ sein. ■

Bemerkungen

Die Berechnung von Fundamentallösungen schwachen Wachstums für lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten ist durch Satz 12 auf die Lösung algebraischer Gleichungen

$$L(-i\xi)\hat{E} = 1 \tag{2.1}$$

in \mathcal{S}' zurückgeführt worden. Die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}[\hat{E}] = E$ liefert eine gesuchte Fundamentallösung.

\hat{E} ist nicht eindeutig bestimmt, falls $L(-i\xi)$ eine reelle Nullstelle besitzt.

Sei $N_L = \{\xi \in \mathbb{R}^n : L(-i\xi) = 0\}$. Die Lösungen von (2.1) unterscheiden sich um eine Distribution mit einem Träger in N_L voneinander. Die Konstruktion einer Lösung aus \mathcal{S}' hängt wesentlich von der Struktur von N_L ab. L. Hörmander [14] hat gezeigt, dass stets eine Lösung in \mathcal{S}' existiert.

Ist $\frac{1}{L(-i\xi)}$ in \mathbb{R}^n lokal integrierbar, so ist eine Lösung \hat{E} von (2.1) das dadurch erzeugte Funktional.

Ist $\frac{1}{L(-i\xi)}$ in \mathbb{R}^n nicht lokal integrierbar, dann kann man durch eine Regularisierung eine Lösung von (2.1) konstruieren.

2.2 Fundamentallösung des Laplace-Operators, Behandlung von Randwertproblemen

Im \mathbb{R}^n ist die Distribution $E_n \in \mathcal{S}'$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$\Delta E_n = \delta_0$$

genügt. Die Gleichung (2.1) hat in diesem Fall die Gestalt

$$-|\xi|^2 \hat{E}_n(\xi) = 1.$$

Der Fall $n = 3$

Für $n = 3$ ist $-\frac{1}{|\xi|^2}$ eine lokal integrierbare Funktion ($\int_{\mathcal{S}_2} \int_{r < R} \frac{1}{r^2} r^2 dr d\omega < \infty$), die eine Distribution aus \mathcal{S}' erzeugt.

Damit ist

$$E_3 = \mathcal{F}^{-1} \left[-\frac{1}{|\xi|^2} \right] = -\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{F} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right] (-x). \quad (2.2)$$

Wir berechnen

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{|\xi|^2} \right] (x) = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\xi| < R} \frac{1}{|\xi|^2} e^{i(x, \xi)} d\xi.$$

Wir führen sphärische Koordinaten ein:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \xi_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \xi_3 &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^3$ können wir das Koordinatensystem bezüglich der Variablen $\xi \in \mathbb{R}^3$ so wählen, dass x auf der ξ_3 -Achse liegt und $(x, \xi) = |x||\xi| \cos \vartheta$ ist. Damit wird

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{e^{i|x|r \cos \vartheta}}{r^2} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 2\pi \int_{r=0}^R \int_{\vartheta=0}^{\pi} e^{i|x|r \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta dr \\ &\stackrel{\mu = \cos \vartheta}{=} 2\pi \int_{r=0}^R \int_{\mu=-1}^1 e^{i|x|r\mu} d\mu dr \stackrel{\text{sin ungerade}}{=} 2\pi \int_{r=0}^R 2 \int_0^1 \cos(|x|r\mu) d\mu dr \\ &= 4\pi \int_{r=0}^R \frac{\sin(|x|r)}{|x|r} dr = \frac{4\pi}{|x|} \int_0^R \frac{\sin(|x|r)}{r} dr \stackrel{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{4\pi}{|x|} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2}{|x|}. \end{aligned}$$

Wir erhalten aus (2.2)

$$E_3 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\pi^2}{|x|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}. \quad \blacksquare$$

Im Fall $n \geq 3$ ist

$$E_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}|x|^{2-n},$$

wobei $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ das Oberflächenmaß der Einheitskugel ist.

Im Fall $n = 2$ hatten wir die Fundamentallösung (1.18) bereits berechnet:

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \ln|x| = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}.$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{2\pi} \ln|x| \\ E_3 &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{x} \\ E_n &= -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

Randwertprobleme

Sei Ω ein beschränktes, glatt berandetes Gebiet im \mathbb{R}^n mit dem Rand $\partial\Omega$.

Wir betrachten das *Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und das *Neumannproblem*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} &= k && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei \vec{n} der äußere Normaleneinheitsvektor ist und die rechten Seiten genügend glatt sind.

Das Dirichletproblem besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung. Das Neumannproblem ist nur dann lösbar, falls die Lösbarkeitsbedingung

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} k(x) \, d\sigma(x) = 0 \tag{2.3}$$

gilt. Die Lösbarkeitsbedingung folgt aus der Greenschen Formel für das Paar u und $v \equiv 1$:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, d\sigma.$$

In diesem Fall ist die Lösung bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Angenommen, es gäbe die Lösungen u_1 und u_2 . Dann liefert die 1. Greensche Formel

$$-\int \nabla(u_1 - u_2) \nabla v \, dx = 0 \quad \forall v \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Setzen wir $v = u_1 - u_2$, dann folgt $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ in Ω . Daher ist $u_1 - u_2 = \text{const}$ in Ω .

Die Funktion f kann außerhalb einer Kugel, die Ω enthält, durch 0 fortgesetzt werden, beziehungsweise integrierbare Funktionen f können durch 0-Fortsetzungen außerhalb $\overline{\Omega}$ zu integrierbaren Funktionen im \mathbb{R}^n ergänzt werden.

Die Fortsetzungen haben beschränkten Träger und $f * E_n$ ist in diesem Sinn definiert. Die Distribution $u = f * E_n$ ist Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = f$ in Ω , genügt aber im Allgemeinen nicht den Randbedingungen. Daher soll eine Fundamentallösung (Greensche Funktion) gefunden werden, die den homogenen Randbedingungen genügt und mit deren Hilfe die Lösung des Randwertproblems dargestellt werden kann.

Satz 13 (Greenscher Darstellungssatz) *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet und u eine in $\overline{\Omega}$ zweimal stetig differenzierbare Funktion.*

Dann gilt

$$pu(y) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) \, d\sigma, \quad (2.4)$$

$$\text{wobei } p = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{für } y \in \partial\Omega \\ 0 & \text{für } y \notin \overline{\Omega} \end{cases} \text{ ist.}$$

Das Integral $\int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx$ wird als Volumen- bzw. Newtonpotential bezeichnet, $\int_{\partial\Omega} E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \, d\sigma$ ist das Potential der einfachen Schicht und $\int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x-y) \, d\sigma$ der doppelten Schicht.

Beweis

1. Fall: $y \notin \overline{\Omega}$

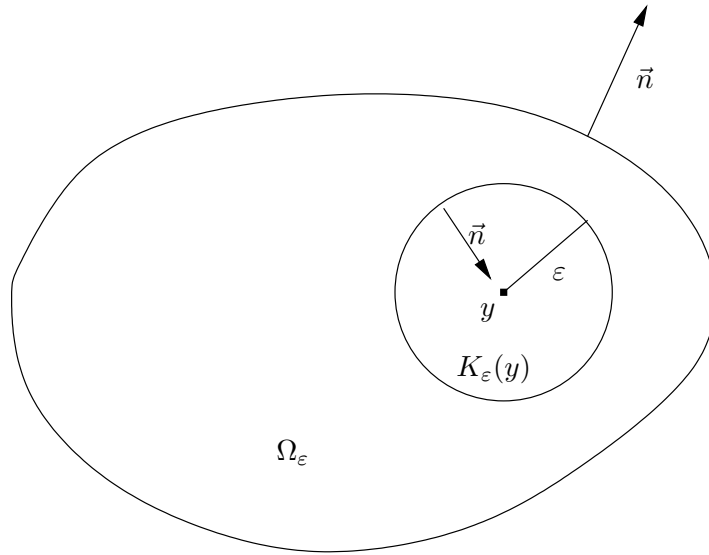
In diesem Fall ist $E_n(x-y)$ in $\overline{\Omega}$ eine (beliebig oft nach y) differenzierbare Funktion.

Die 2. Greensche Formel

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\sigma$$

liefert für $v = E_n(x-y)$:

$$0 - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n_x} - E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) \, d\sigma.$$

Abbildung 2.1: Das Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus K_\varepsilon(y)$ **2. Fall:** $y \in \Omega$

Wir legen um y eine Kugel $K_\varepsilon(y)$ mit dem Radius $\varepsilon > 0$ so, dass $\overline{K_\varepsilon(y)} \subset \Omega$ ist. In $\Omega \setminus K_\varepsilon(y)$ können wir die 2. Greensche Formel für u und $v = E_n(x - y)$ anwenden:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x - y) \Delta u(x) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x - y) - E_n(x - y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] \, d\sigma_x \\
 &\quad + \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x - y) - E_n(x - y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] \, d\sigma_x, \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

wobei $S_\varepsilon(y) = \{x : |x - y| = \varepsilon\}$ die Oberfläche der Kugel $K_\varepsilon(y)$ ist.

Wir führen auf S_ε sphärische Koordinaten ein: $r = |x - y|$, $d\sigma = \varepsilon^{n-1} \, dw$, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$.

Damit ist $E_n = c_n r^{2-n}$, $c_n = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}$ für $n > 2$ und $E_2 = c_2 \ln r$. Wir erhalten :

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x - y) - E_n(x - y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] \, d\sigma_x \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) \frac{\partial}{\partial r} E_n(x - y) \varepsilon^{n-1} \, dw + \int_{S_\varepsilon(y)} E_n(x - y) \frac{\partial u}{\partial r}(x) \varepsilon^{n-1} \, dw \right] \\
 &= \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) c_2 \, dw + \int_{S_\varepsilon(y)} c_2 \ln \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \varepsilon \, dw \right] & \text{für } n = 2, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{S_\varepsilon(y)} u(x) c_n (2 - n) \, dw + \int_{S_\varepsilon(y)} c_n \frac{\partial u}{\partial r}(x) \varepsilon \, dw \right] & \text{für } n > 2 \end{cases} \\
 &= -u(y) + 0.
 \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$u(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx \right] + \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\sigma_x$$

und schließlich:

$$u(y) = \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta u(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) \right] d\sigma_x.$$

3. Fall: $y \in \partial\Omega$

Da $\partial\Omega$ durch eine glatte Randfläche (beziehungsweise Randkurve) dargestellt wird, schneiden wir eine Halbkugel, die durch die Tangentialfläche in y begrenzt wird, aus. Analoge Überlegungen wie im zweiten Fall führen zur Behauptung. ■

Bemerkung

Die obigen Rechnungen bestätigen, dass E_n eine Fundamentallösung des Laplaceoperators ist. Sei $u \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann gilt für $y \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx \right) &= - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx = - \langle \Delta_x E_n(x-y), u \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = -u(y). \end{aligned}$$

Es folgt: $\Delta_x E_n(x-y) = \delta_y(x)$, bzw. $\Delta_x E_n(x) = \delta_0(x)$.

Der obige Beweis beruhte auf klassischen Rechnungen. Er kann wesentlich vereinfacht werden, wenn man distributionentheoretische Überlegungen direkt anwendet.

Sei $y \in \Omega$ und $u \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx &= - \int_{\Omega} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx = - \langle \Delta_x E_n(x-y), u \rangle \\ &= - \langle \delta_y, u \rangle = -u(y). \end{aligned}$$

Und andererseits nach der zweiten Greenschen Formel, da $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\Omega_\varepsilon} E_n(x-y) \Delta_x u \, dx \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(y)} \left[u(x) \frac{\partial}{\partial n} E_n(x-y) - E_n(x-y) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right] d\sigma_x \\ &= -u(y). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sei nun $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Die Delta-Distribution δ_y kann auf $C^2(\overline{\Omega})$ fortgesetzt werden. Aus der zweiten Greenschen Formel (2.5) folgt mit (2.6) sofort die Behauptung.

Folgerungen

Dirichletproblem

Wir wählen eine modifizierte Fundamentallösung $\tilde{E}_n(x, y) = E_n(x - y) + h(x, y)$ so, dass

$$\begin{aligned}\Delta_x \tilde{E}_n(x, y) &= \delta(x - y) && \text{für alle } x \in \Omega, y \in \Omega \\ \tilde{E}_n(x, y) &= 0 && \text{für alle } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.\end{aligned}$$

Die Funktion $h(x, y)$ ist harmonisch bezüglich x mit y als Parameter, d.h.

$$\begin{aligned}\Delta_x h(x, y) &= 0 && \text{für alle } x \in \Omega, \forall y \in \Omega. \\ h(x, y) &= -E_n(x - y) && \text{für alle } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Wir überlegen, dass wir mit Hilfe von $\tilde{E}_n(x, y)$ eine Lösung des inneren Dirichletproblems

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) && \text{für } x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

darstellen können.

Es gilt nach dem Greenschen Darstellungssatz

$$u(y) = \int_{\Omega} E_n(x - y) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} E_n(x - y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma_x + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x - y) d\sigma_x \tag{2.8}$$

Aus der zweiten Greenschen Formel folgt

$$0 = \int_{\Omega} h(x, y) \Delta u(x) dx - \int_{\partial\Omega} h(x, y) \frac{\partial u}{\partial n}(x) d\sigma_x + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} h(x, y) d\sigma_x. \tag{2.9}$$

Addition von (2.8) und (2.9) unter Beachtung von $h(x, y) = -E_n(x - y)$ auf $\partial\Omega$ liefert

$$u(y) = \int_{\Omega} \tilde{E}_n(x, y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} \tilde{E}_n(x, y) g(x) d\sigma_x. \tag{2.10}$$

$\tilde{E}_n(x, y) = G_D(x, y)$ wird als Greensche Funktion bezeichnet und durch die Relationen

$$\begin{aligned}\Delta_x G_D(x, y) &= \delta(x - y) && \text{für alle } x \in \Omega, y \in \Omega \\ G_D(x, y) &= 0 && \text{für alle } x \in \partial\Omega, y \in \Omega.\end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

Die Formel (2.10) erscheint dann als Summe des Newtonschen Volumenpotentials und des Doppelschichtpotentials

$$u(y) = \int_{\Omega} G_D(x, y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} G_D(x, y) g(x) d\sigma_x. \tag{2.11}$$

Neumannproblem

Würde eine modifizierte Fundamentallösung $\tilde{E}_n = \tilde{E}_n(x, y)$ existieren so, dass $\Delta \tilde{E}_n(x, y) = \delta(x - y)$ und $\frac{\partial}{\partial n_x} \tilde{E}_n(x, y) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und $y \in \Omega$ wäre, dann würde eine Lösung des inneren Neumannproblems durch die Relation

$$u(y) = \int_{\Omega} \tilde{E}_n(x, y) f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} k(x) \tilde{E}_n(x, y) \, d\sigma_x$$

erzeugt werden. Eine solche modifizierte Fundamentallösung existiert jedoch nicht. Setzen wir nämlich

$$\tilde{E}_n(x, y) = E_n(x - y) + H(x, y) = G_N(x, y),$$

dann müsste gelten:

$$\begin{aligned} \Delta_x H(x, y) &= 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ \frac{\partial H}{\partial n_x}(x, y) &= -\frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x - y) \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega. \end{aligned}$$

Wenden wir den Greenschen Darstellungssatz auf $u(x) \equiv 1$, dann erhalten wir für $y \in \Omega$:

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x - y) \, d\sigma. \quad (2.12)$$

Andererseits liefert die 2. Greensche Formel für das Paar $H(x, y) = u(x, y)$, $y \in \Omega$ fest, und $v(x) \equiv 1$ die Lösbarkeitsbedingung für das Neumann-Rand-Datum

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta_x H(x, y) \cdot 1 \, dx - \int_{\Omega} H(x, y) \Delta 1 \, dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) \, d\sigma - \int_{\partial\Omega} H(x, y) \frac{\partial}{\partial n_x} 1 \, d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x - y) \, d\sigma = 0, \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu (2.12) steht. Betrachten wir jedoch ein $H(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta_x H(x, y) &= 0 \quad \text{für } x \in \Omega, y \in \Omega, \\ \frac{\partial H(x, y)}{\partial n_x} &= -\frac{\partial E_n(x - y)}{\partial n_x} + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \quad \text{für } x \in \partial\Omega, y \in \Omega, \end{aligned}$$

wobei $\mu(\partial\Omega)$ das Oberflächenmaß von $\partial\Omega$ ist, dann ist die Lösbarkeitsbedingung nach (2.12)

$$\int_{\partial\Omega} -\frac{\partial E_n}{\partial n_x}(x - y) \, d\sigma + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} d\sigma = 0$$

erfüllt. In diesem Fall existiert eine Lösung $H(x, y)$, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Nach dem Greenschen Darstellungssatz ist

$$u(y) = \int_{\Omega} E_n(x - y) \Delta u(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} E_n(x - y) k(x) \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x - y) \, d\sigma \quad (2.13)$$

und aus der 2. Greenschen Formel folgt:

$$0 = \int_{\Omega} H(x, y) \Delta u \, dx - \int_{\partial\Omega} H(x, y) k(x) \, d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial n_x} H(x, y) \, d\sigma. \quad (2.14)$$

Addieren wir diese beiden letzten Gleichungen, dann erhalten wir eine Lösungsdarstellung des Neumannproblems (Existenz vorausgesetzt):

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{\Omega} G_N(x, y) f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} G_N(x, y) k(x) \, d\sigma + \frac{1}{\mu(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} u(x) \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} G_N(x, y) f(x) \, dx - \int_{\partial\Omega} G_N(x, y) k(x) \, d\sigma + \text{const}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Bemerkung

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ist und f, g und k genügend glatte Funktionen sind. Diese Voraussetzungen können präzisiert werden: $f \in L_2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, $k \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ liefern Lösungen $u \in H^2(\Omega)$, für die die Formeln (2.11) und (2.15) gelten.

Berechnung der Greenschen Funktionen

Die Greenschen Funktionen hängen von der Geometrie des Gebietes ab. Für die Kugel, den Kreis oder den Halbraum kann mit Hilfe der Spiegelungsmethode ([4, S. 221f], [34, S. 322ff]) die Greensche Funktion analytisch berechnet werden.

Beispiel: Die Greensche Formel für die Kugel $K_R(0)$ im Fall $n = 3$ lautet:

$$G_D(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi ||y|^2 x - y|}.$$

Zur Verifikation setze man $|x| = R$ und überprüfe, dass $\Delta_x \frac{R|y|}{4\pi ||y|^2 x - y|}$ ist.

Die Formel (2.11) stellt dann für $f = 0$ die Poissonsche Integral-Darstellungsformel für die Kugel ($n = 3$) dar:

$$u(y) = \frac{1}{4\pi R} \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |y|^2}{|x - y|^3} g(x) \, d\sigma_x.$$

In anderen Fällen ist die Greensche Funktion durch numerische Berechnung der Lösung des Hilfsproblems (2.7) beziehungsweise eines entsprechenden Hilfsproblems für das Neumannproblem näherungsweise bestimmbar. Dieser Weg wird aber meist nicht beschritten, sondern es wird das fehlende Cauchy-Datum in der Darstellungsformel ausgerechnet (Lösung von Integralgleichungen).

Herleitung von Randintegralgleichungen

Indirekte Methode

Als Modellproblem sehen wir uns das innere Dirichletproblem für die Laplace-Gleichung an

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Wir suchen die Lösung in Form eines Doppelschichtpotentials mit unbekannter Dichte $\gamma(y)$ auf $\partial\Omega$ (indirekte Methode)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y. \quad (2.16)$$

Das Doppelschichtpotential genügt der Laplace-Gleichung im offenen Gebiet Ω (Vertauschung von Differentiation und Integration ist möglich für $x \neq y$). Die Dichte γ ist so zu bestimmen, dass u die vorgeschriebenen Werte g auf $\partial\Omega$ annimmt.

Dazu müssen die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ berechnet werden, hier ist $x_0 \in \partial\Omega, x \in \Omega$. Wir definieren den direkten Wert des Doppelschichtintegrals:

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0 - y) d\sigma_y := K[\gamma](x_0).$$

Bemerkung

Der direkte Wert ist wohldefiniert, $K : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Lemma 7 Sei $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \frac{1}{2} \gamma(x_0) + K[\gamma](x_0).$$

Beweis

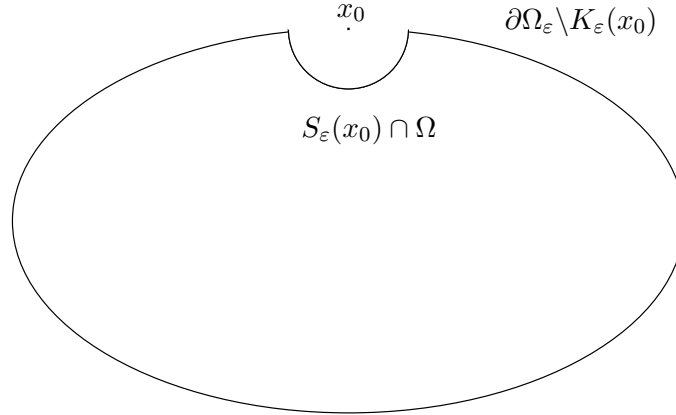
Für Funktionen $v \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\gamma \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt die erste Greensche Formel

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} v(y) d\sigma_y = \int_{\Omega} \gamma(y) \Delta v(y) dy + \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla v(y) dy.$$

Wir betrachten nun einen festen Punkt $x \in \Omega$ und eine Kugel $K_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Wie im Beweis des Darstellungssatzes betrachten wir das Gebiet $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x)}$ und die glatte Funktion $v(y) = E_n(x-y)$ in Ω_ε .

Es ist

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y + \int_{S_\varepsilon(x)} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) d\sigma_y = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) dy.$$

Abbildung 2.2: Das Gebiet $\Omega \setminus K_\varepsilon(x_0)$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir analog zu vorne

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) \, d\sigma_y - \gamma(x) = \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) \, dy.$$

Es folgt:

$$u(x) \stackrel{(2.16)}{=} \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x-y) \, d\sigma_y = \gamma(x) + \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x-y) \, dy.$$

Damit ist:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \Omega}} u(x) = \gamma(x_0) + \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy. \quad (2.17)$$

Für $x_0 \in \partial\Omega$ wenden wir ebenfalls die Beweisideen des Darstellungssatzes an und schneiden eine Halbkugel heraus.

Die erste Greensche Formel liefert in $\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon(x_0) \cap \bar{\Omega}$ (siehe Abbildung 2.2)

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus K_\varepsilon(x_0) \cap \partial\Omega_\varepsilon} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y) \, d\sigma_y + \int_{S_\varepsilon(x_0) \cap \Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0-y) \, d\sigma_y = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir

$$K[\gamma](x_0) - \frac{1}{2}\gamma(x_0) = \int_{\Omega} \nabla \gamma(y) \cdot \nabla E_n(x_0-y) \, dy. \quad (2.18)$$

Aus den Gleichungen (2.17) und (2.18) folgt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \frac{1}{2}\gamma(x_0) + K[\gamma](x_0).$$

■

Folgerung

Die Lösung γ der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art

$$\frac{1}{2}\gamma(x_0) + \int_{\partial\Omega} \gamma(y) \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x_0 - y) \, d\sigma_y = g(x_0)$$

liefert die gesuchte Dichte. Die Formel (2.16) stellt die Lösung des Randwertproblems dar.

Neben dieser „Ansatzmethode“ zur Herleitung von Integralgleichungen wird häufig ein anderer direkter Zugang gewählt.

Direkte Methode

Wir betrachten folgende Potentiale

$$V[\psi](x) = \int_{\partial\Omega} E_n(x - y) \psi(y) \, d\sigma_y \quad \text{Potential der einfachen Schicht,}$$

$$U[\varphi](x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n(x - y)}{\partial n_y} \varphi(y) \, d\sigma_y \quad \text{Potential der doppelten Schicht.}$$

Lemma 8 [6], [22] Die Randwerte von V und U und ihre Normalableitungen sind durch folgende Relationen beschrieben: für $x_0 \in \partial\Omega$, $x \in \Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} V[\psi](x) &= \int_{\partial\Omega} E_n(x_0 - y) \psi(y) \, d\sigma_y = V[\psi](x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} U[\varphi](x) &= \frac{1}{2} \varphi(x_0) + K[\varphi](x_0), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial n_x} V[\psi](x) &= -\frac{1}{2} \psi(x_0) + K^*[\psi](x_0) \\ &= -\frac{1}{2} \psi(x_0) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_x} E_n(x_0 - y)|_{x=x_0} \psi(y) \, d\sigma_y, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial n_x} U[\varphi](x) &= \left(\frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} E_n(x - y) \varphi(y) \, d\sigma_y \right)_{x=x_0} \\ &= D[\varphi](x_0). \end{aligned}$$

Definitions- und Wertebereiche der entsprechenden Randoperatoren sind:

$$\begin{aligned} V &: H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ K &: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ K^* &: H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ D &: H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{aligned}$$

Folgerung

Sei u Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Für u gilt der Darstellungssatz:

$$u(x) = U[u](x) - V \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] (x) \quad \text{für } x \in \Omega.$$

Aus Lemma 8 folgen Beziehungen zwischen den Randdaten u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf $\partial\Omega$:

$$u(x_0) = \frac{1}{2}u(x_0) + K[u](x_0) - V \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] (x_0) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) = D[u](x_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) - K^* \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] (x_0). \quad (2.20)$$

Daher ist auf dem Rand:

$$\frac{1}{2}u - K[u] = -V \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial n} + K^* \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = D[u]. \quad (2.22)$$

Ist $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ (Neumannproblem) auf dem Rand vorgeschrieben, dann kann u aus der Fredholm'schen Integralgleichung

$$\frac{1}{2}u(x_0) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial E_n}{\partial n}(x_0 - y)u(x_0) \, dy = - \int_{\partial\Omega} E_n(x_0 - y)g(y) \, dy = G(x_0)$$

auf dem Rand $\partial\Omega$ berechnet werden.

Eine andere Möglichkeit ist, auf die Gleichung (2.20) zurückzugreifen

$$D[u](x_0) = \frac{1}{2}g(x_0) + K^*[g](x_0) = \tilde{G}(x_0).$$

2.3 Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitungsgleichung und das Cauchysche Anfangswertproblem

Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta \right) u(x, t) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.23)$$

beschreibt den Wärmefluss in einem homogenen isotropen Medium, das das Gebiet Ω einnimmt, $u = u(x, t)$ beschreibt die Temperatur am Ort x zum Zeitpunkt t , beziehungsweise die Teilchenkonzentration von chemischen Substanzen; a^2 ist der thermische Diffusionskoeffizient beziehungsweise die Temperaturleitfähigkeitszahl; f charakterisiert den Einfluss von Wärmequellen beziehungsweise Wärmesenken und stellt deren Dichte dar (Quelldichte).

Eine Fundamentallösung $E = E(x, t)$ ist durch die Distributionengleichung

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial t} - a^2 \Delta E, \varphi \right\rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \varphi = \varphi(x, t),$$

beziehungsweise

$$(\partial_t - a^2 \Delta_x) E(x, t) = \delta_0(x, t) = \delta_0(x) \otimes \delta_0(t) \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$$

definiert.

Wir wenden die Fouriertransformation bezüglich x an und erhalten:

$$[\partial_t + a^2 |\xi|^2] \mathcal{F}_x[E](\xi, t) = \delta_0(t).$$

$\mathcal{F}_x[E]$ ist bei festem ξ Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialoperators

$$L(\partial_t) = \partial_t + A^2, \quad A^2 = a^2 |\xi|^2.$$

Wir hatten gezeigt (S. 40, Beispiel 1), dass $H(t)u_0(t)$ eine Fundamentallösung von $L(D)$ ist, wobei $u_0(t)$ durch $L(\partial_t)u_0(t) = 0$ für $t > 0$ und $u_0(0) = 1$ gegeben ist. Wir erhalten daher

$$\mathcal{F}_x[E](\xi, t) = H(t)e^{-a^2 |\xi|^2 t}$$

und

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[H(t)e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2 |\xi|^2 t} e^{-i(x, \xi)} \, d\xi \\ &= \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) t} e^{-i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} \, d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

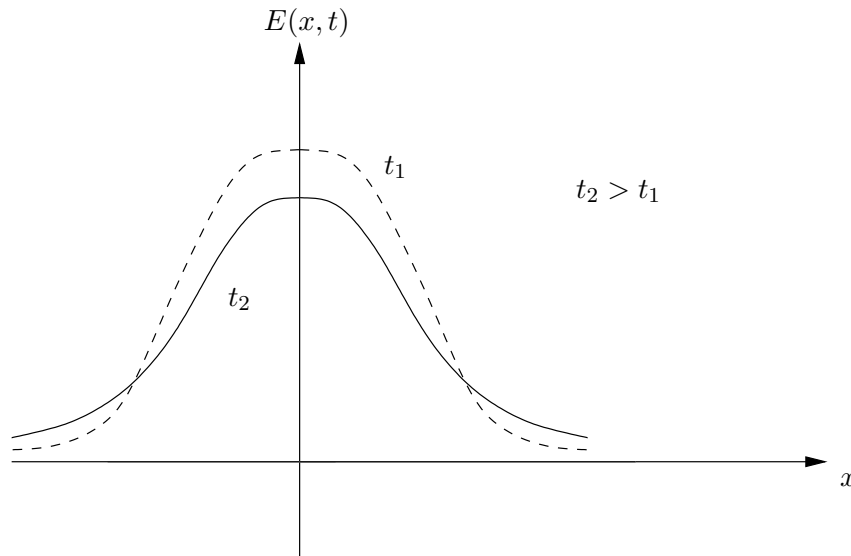


Abbildung 2.3: Abfließen der Temperatur

Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \xi_1^2 t} (\underbrace{\cos x_1 \xi_1 - i \sin x_1 \xi_1}_{\text{ungerade}}) d\xi_1 = 2 \int_0^{\infty} e^{-a^2 t \xi_1^2} \cos x_1 \xi_1 d\xi_1$$

$$\stackrel{([5, S. 350 (5)])}{=} \frac{2\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4a^2 t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x_1^2}{4a^2 t}}.$$

Folglich ist:

$$E(x, t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^n} \frac{(\sqrt{\pi})^n}{(a\sqrt{t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}. \quad (2.24)$$

Die Fundamentallösung hat folgende Eigenschaften:

- $E(x, t) > 0$ für $t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $E(x, t) = 0$ für $t < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(x, t) = \delta_0(x)$. (2.25)

$$\bullet \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) dx = \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} 2^n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} dx_1 \dots dx_n = H(t) = 1 \quad \text{für } t > 0.$$

(vgl. [5, S. 350]) (2.26)

Die Fundamentallösung beschreibt die Temperaturverteilung für die Punktquelle $\delta_0(x) \otimes \delta_0(t)$ (Abfließen mit wachsendem t).

Wir zeigen, dass $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(x, t) = \delta_0(x)$ ist.

Es sei $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist (beachte $v(x) - v(0) = x \cdot \nabla v(\hat{x})$ mit $\hat{x} \in (0, x)$)

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) v(x) \, dx - v(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} E(x, t) [v(x) - v(0)] \, dx \right| \\
&\leq K(v) t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |x| e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \, dx \\
&= K(v) w_{n-1} t^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^{n-1} \, dr \quad [5, \text{S. 350, Formel 2}] \\
&= \tilde{K}(v) t^{-\frac{n}{2}} t^{\frac{n+1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Falls die rechte Seite f der Wärmeleitungsgleichung (2.23) eine Distribution mit kompaktem Träger bezüglich x ist, dann existiert das Wärmepotential

$$u = E * f.$$

Darüber hinaus gilt folgender Satz:

Satz 14 Falls die Dichtefunktion f lokal integrierbar ist, für $t < 0$ verschwindet und in jedem Streifen $0 \leq t \leq T$ gleichmäßig beschränkt ist, dann existiert das Wärmepotential

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}} \, d\xi \, d\tau \\
&= f * E.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Es gilt folgende Abschätzung:

$$|u(x, t)| \leq t \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)|, \quad t > 0, \tag{2.28}$$

und

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 0. \tag{2.29}$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned}
(f * E)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(t - \tau, x - \xi) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{H(t - \tau)}{(2a\sqrt{\pi(t - \tau)})^n} e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)}} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|x - \xi|^2}{4a^2(t - \tau)}}}{(2a\sqrt{\pi(t - \tau)})^n} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau,
\end{aligned}$$

$$\text{da } H(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } t - \tau \geq 0, \text{ also } t \geq \tau, \\ 0 & \text{für } t - \tau < 0, \text{ also } t < \tau \end{cases}$$

$$\text{und } f(\xi, \tau) = 0 \text{ für } \tau < 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten die Existenz der Faltung aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} |(f * E)(x, t)| &\leq \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(t - \tau, x - \xi) \, d\xi \, d\tau \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} |f(\xi, \tau)| t \leq Mt. \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar die Relation (2.29). ■

Folgerung: Das Wärmepotential $u(x, t)$, gegeben durch (2.27), ist Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0_+} u(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein Anfangswertproblem mit inhomogenem Anfangsdatum und $f(x, t) = 0$:

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)v(x, t) &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow 0_+} v(x, t) &= v(x, 0) = g(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Durch Überlagerung von $v(x, t)$ und $u(x, t)$ erhält man die Lösung des allgemeinen Problems mit nichtverschwindenden rechten Seiten. Um $v(x, t)$ zu konstruieren, wenden wir auf (2.30) die Fouriertransformation bezüglich x an; voraussetzend, dass g Fouriertransformierbar ist.

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{v}(\xi, t) + a^2 |\xi|^2 \hat{v}(\xi, t) &= 0, \\ \hat{v}(\xi, 0) &= \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung ist:

$$\hat{v}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t}. \tag{2.31}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\hat{g}(\xi) e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] (x) \\ &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\mathcal{F}_x[g] \cdot \mathcal{F}_x \left[\mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right] \right] (x) \\ &= \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\mathcal{F}_x \left[g * \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right] \right] (x) \\ &= \left(g * \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[e^{-a^2 |\xi|^2 t} \right] \right) (x) \\ &\stackrel{(2.24)}{=} g * \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{1}{(4a^2 \pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \, d\xi. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen.

Lemma 9 Es sei f eine lokal integrierbare Dichtefunktion, die für $t < 0$ verschwindet und in jedem Streifen $0 \leq t \leq T$ beschränkt ist, und g sei eine beschränkte lokal integrierbare Funktion. Dann ist die Lösung des Cauchyschen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)w(x, t) &= f(x, t) && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ w(x, 0) &= g(x) && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (2.33)$$

durch

$$w(x, t) = u(x, t) + v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(4a^2\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} d\xi d\tau + \frac{1}{(4a^2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} d\xi$$

gegeben.

Lemma 10 Die Lösung w des Problems (2.33) ist eindeutig bestimmt.

Beweis

Wir zeigen die Eindeutigkeit. Es seien w_1 und w_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (2.33). Dann gilt für die Differenz $v(x, t) = w_1(x, t) - w_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)v(x, t) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Nach Anwenden der Fouriertransformation bezüglich der Ortsvariablen erhalten wir

$$\hat{v}(\xi, t) = 0$$

und damit $v(x, t) = 0$. ■

2.4 Fundamentallösung des Operators der Wellengleichung und das Cauchysche Anfangswertproblem

Die Wellengleichung

$$(\partial_{tt} - a^2 \Delta)u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < \infty,$$

beschreibt die Auslenkung (transversale Schwingungen) einer Saite ($n = 1$), einer Membran ($n = 2$) beziehungsweise eines Volumens ($n = 3$) unter Einwirkung einer äußeren Störung $f(x, t)$ am Ort x zum Zeitpunkt t . Die Konstante a charakterisiert die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Lemma 11 Die Fundamentallösungen des Wellenoperators

$$\partial_{tt} - a^2 \Delta$$

lauten:

in der Raumdimension $n = 1$

$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|), \quad (2.34)$$

in der Raumdimension $n = 2$

$$E_2(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \quad (2.35)$$

in der Raumdimension $n = 3$

$$E_3(x, t) = H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x). \quad (2.36)$$

Beweis

Die Fundamentallösung $E_n(x, t)$ genügt der Gleichung

$$(\partial_{tt} - a^2 \Delta)E_n(x, t) = \delta_0(x, t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (2.37)$$

Nach Anwendung der Fouriertransformation bezüglich x erhalten wir

$$[\partial_{tt} + a^2 |\xi|^2] \mathcal{F}_x[E_n](\xi, t) = \delta_0(t).$$

$\mathcal{F}_x[E_n]$ ist bei festem ξ Fundamentallösung des gewöhnlichen Differentialoperators

$$L(\partial_t) = \partial_{tt} + A^2, \quad A^2 = a^2 |\xi|^2.$$

Da $u_0(t) = \frac{\sin At}{A}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L(\partial_t)u_0(t) &= 0 \quad \text{für } t > 0, \\ u_0(0) &= 0, \\ u_0'(0) &= 1 \end{aligned}$$

ist, folgt, dass $u_0(t)H(t) = H(t)\frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} = \mathcal{F}_x[E_n](\xi, t)$ ist.

Folglich gilt:

$$E_n(x, t) = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[H(t) \frac{\sin a|\xi|t}{a|\xi|} \right] = H(t) \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{a} \mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x). \quad (2.38)$$

1. Fall: $n = 1$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos x\xi - i \sin x\xi) \underbrace{\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|}}_{\text{ungerade}} d\xi \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos x\xi \sin a\xi t}{\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{\sin[(at-x)\xi] + \sin[(at+x)\xi]}{\xi} d\xi, \end{aligned}$$

da $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(b-a) + \sin(b+a)]$ ist.

Unter Beachtung, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin Ay}{y} dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } A > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } A < 0 \end{cases}$$

gilt (vgl. [5, Formel 11, S. 351]), erhalten wir (siehe Abbildung 2.4)

$$\mathcal{F}_\xi \left[\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|} \right] (-x) = \begin{cases} \pi & \text{für } at > |x| \\ 0 & \text{für } at < |x| \end{cases} = \pi H(at - |x|)$$

und

$$E_1(x, t) = H(t) \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{a} H(at - |x|).$$

Weiterhin ist $H(t)H(at - |x|) = H(at - |x|)$ und daher

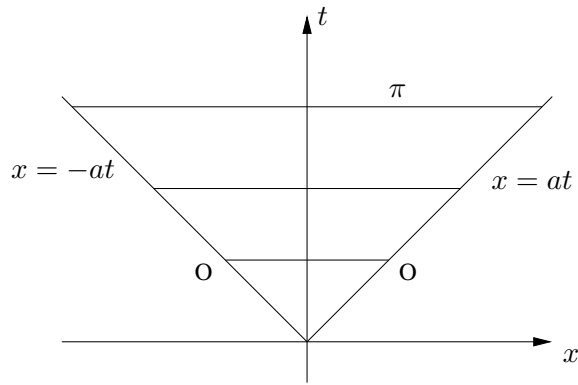
$$E_1(x, t) = \frac{1}{2a} H(at - |x|). \quad (2.39)$$

2. Fall: $n = 3$

Wir erinnern an Beispiel 4, S. 23, in dem eine Klasse von Distributionen, die auf Oberflächen S konzentriert sind,

$$F_f(v) = \int_S f v d\sigma \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

eingeführt wurde.

Abbildung 2.4: Die Funktion $\pi H(at - |x|)$

Wir betrachten die folgende Distribution auf der Kugeloberfläche $S_R = \{x : |x| = R\}$,

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi \rangle = \int_{S_R} \varphi(x) \, d\sigma \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

δ_{S_R} ist ein lineares, stetiges Funktional mit beschränktem Träger und befindet sich daher in \mathcal{S}' .

Wir zeigen, dass

$$\delta_{S_R} = \mathcal{F}_\xi^{-1} \left[\frac{4\pi R \sin(|\xi|R)}{|\xi|} \right],$$

beziehungsweise

$$\mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] = \frac{4\pi R \sin(|\xi|R)}{|\xi|}$$

ist. Aus Lemma 6 folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] &= \langle \delta_{S_R}, \eta e^{i(\xi, x)} \rangle = \int_{S_R} e^{i(\xi, x)} \, d\sigma_x \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{i|\xi|R \cos \vartheta} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= R^2 \cdot 2\pi \int_0^\pi e^{i|\xi|R \cos \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned}$$

Durch die Variablen-Transformation $\tau = \cos \vartheta$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x[\delta_{S_R}] &= 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} e^{i|\xi|R\tau} (-1) \, d\tau \\ &= 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} (\cos |\xi|R\tau + \underbrace{i \sin |\xi|R\tau}_{\text{ungerade}}) \, d\tau \\ &= 4\pi R^2 \left[\frac{1}{|\xi|R} \sin |\xi|R\tau \right]_{-1}^{+1} = \frac{4\pi R}{|\xi|} \sin |\xi|R. \end{aligned}$$

Setzen wir $R = at$, dann liefern (2.38) und die Relation

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\sin at|\xi|}{a|\xi|} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{4\pi at \sin at|\xi|}{4\pi a^2 t |\xi|} \right] = \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}$$

die Fundamentallösung

$$E_3(x, t) = H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}, \quad (2.40)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \langle E_3, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{S_{at}} \frac{1}{t} \varphi(x, t) \, d\sigma_x \, dt \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{|x|=t'} \frac{1}{t'} \varphi \left(x, \frac{t'}{a} \right) \, d\sigma_x \, dt' \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{|x|}{a})}{|x|} \, dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

3. Fall: $n = 2$

Wir benutzen die Hadamardsche Absteigemethode (Reduktion bezüglich einer Variablen [34, S. 149ff]), um eine Fundamentallösung E_2 zu berechnen. E_2 wird durch die Relation

$$\langle E_2, \varphi \rangle = \langle E_2(x_1, x_2, t), \varphi(x_1, x_2, t) \rangle := \langle E_3(x_1, x_2, x_3, t), \hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) \rangle$$

mit $\hat{\varphi}(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_1, x_2, t)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, definiert.

Diese Definition ist sinnvoll:

$$\begin{aligned} \langle (\partial_{tt} - a^2 \Delta_2) E_2, \varphi \rangle &= \langle E_2, (\partial_{tt} - a^2 \Delta_2) \varphi \rangle \\ &= \langle E_3, (\partial_{tt} - a^2 \Delta_3) \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle (\partial_{tt} - a^2 \Delta_3) E_3, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0, 0, 0, 0) = \langle \delta_2, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\langle E_2, \varphi \rangle = \langle E_3, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x_1, x_2, t) \, d\sigma_x \, dt.$$

Das Integral auf der Kugeloberfläche soll durch ein zweidimensionales Bereichsintegral ausgedrückt werden.

Auf der Kugeloberfläche S_{at} gilt: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (at)^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} x_3 &= \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2)}, \quad \text{d.h.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \pm \sqrt{a^2 t^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \end{pmatrix} \\ d\sigma_x &= \sqrt{EG - F^2} \, dx_1 \, dx_2 = \pm \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \, dx_1 \, dx_2, \\ E &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1}, \quad G = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2}, \quad F = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \langle E_2, \varphi \rangle &= \frac{2a}{4\pi a^2} \int_0^\infty \int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \leq at} \frac{\varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_1 dx_2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(at - |x|)\varphi(x_1, x_2, t)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}} dx_1 dx_2 dt. \end{aligned}$$

Der Faktor 2 realisiert die Vorzeichen \pm , $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Daraus folgt:

$$E_2(x, t) = \frac{H(at - |x|)}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}.$$

■

Eigenschaften der Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= \frac{1}{2a} H(at - |x|), \\ E_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |x|^2}}, \\ E_3(x, t) &= H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x). \end{aligned}$$

Die Träger von E_1 und E_2 stimmen mit der Abschließung des in die Zukunft gerichteten Vollkegels überein (vgl. Abbildung 2.5).

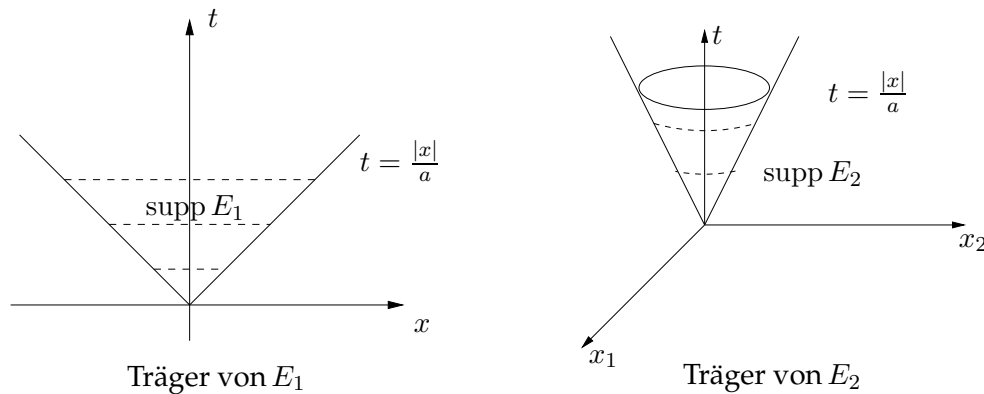


Abbildung 2.5: Träger der Fundamentallösungen

Der Träger von E_3 besteht aus den Randpunkten des Kegels $\{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty] : at = |x|\}$. Die Abbildungen 2.6 a), b), c) skizzieren die entsprechenden Graphen von E_1, E_2 und E_3 .

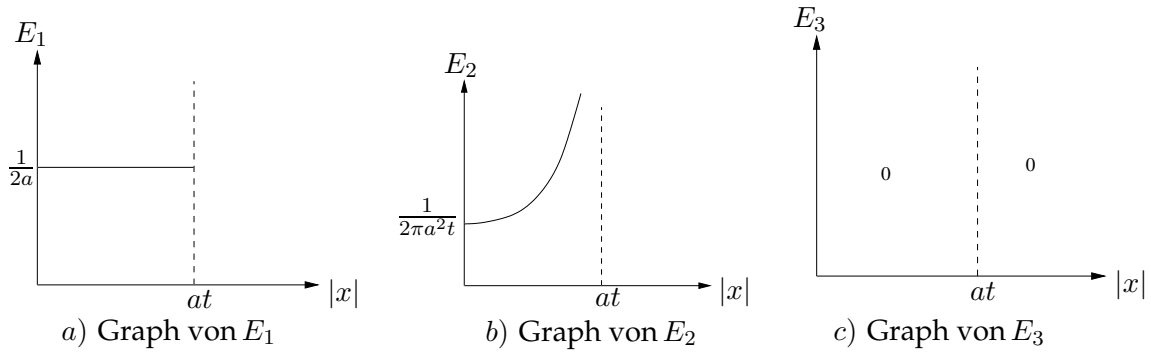


Abbildung 2.6: Graphen der Fundamentallösungen

Wir beschreiben das Verhalten von $E_n(x, t)$ in Bezug auf die Zeitvariable t . Wir beginnen mit einigen allgemeinen Aussagen.

Definition 23 Sei $F = F(x, t)$ aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $v = v(x)$ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Die Distribution

$$\langle F(x, t), v(x) \rangle = h(t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$$

ist durch die Relation

$$\langle \langle F(x, t), v(x) \rangle, \psi(t) \rangle = \langle F(x, t), v(x)\psi(t) \rangle$$

für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ definiert.

Lemma 12 Es gilt im Distributionensinn:

$$\left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x) \right\rangle = \frac{d^k}{dt^k} \langle F(x, t), v(x) \rangle. \quad (2.42)$$

Beweis

Wir berechnen die obige Relation:

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x) \right\rangle, \psi(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^k F(x, t)}{\partial t^k}, v(x)\psi(t) \right\rangle \\ &= (-1)^k \left\langle F(x, t), v(x) \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right\rangle \\ &= (-1)^k \left\langle \langle F(x, t), v(x) \rangle, \frac{d^k \psi(t)}{dt^k} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d^k}{dt^k} \langle F(x, t), v(x) \rangle, \psi(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

■

Definition 24 Die Distribution $F = F(x, t)$ gehört bezüglich der Variablen t zur Klasse $C^k(I)$ in einem Zeitintervall I , falls $\langle F(x, t), v(x) \rangle$ für alle $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ aus $C^k(I)$ ist.

Lemma 13 Die Fundamentallösungen $E_n(x, t)$, $n = 1, 2, 3$ gehören zur Klasse $C^\infty(0, \infty)$ bezüglich t . Für $t \rightarrow 0_+$ werden die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} E_n(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial E_n(x, t)}{\partial t} = \delta(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial^2 E_n(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ angenommen.

Beweis

Wir beweisen nur den Fall $n = 3$ und empfehlen die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ als Übungsaufgabe.

Sei $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\langle E_3(x, t), v(x) \rangle = \frac{H(t)}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} v(x) \, d\sigma_x.$$

Wir setzen $x = aty$ und erhalten $d\sigma_x = (at)^2 d\sigma_y$

$$\begin{aligned} \langle E_3(x, t), v(x) \rangle &= \frac{H(t)t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \quad \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $E_3(x, t) \in C^\infty(0, \infty)$ bezüglich t .

Weiterhin gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \langle E_3(x, t), v(x) \rangle = 0.$$

Wir betrachten jetzt die Ableitungen

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle &\stackrel{(2.42)}{=} \frac{d}{dt} \left[\frac{t}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y + \frac{t}{4\pi} \frac{d^2}{dt^2} \int_{S_1} v(aty) \, d\sigma_y. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Wir berechnen nun die Grenzwerte der Ableitungen für $t \rightarrow 0_+$.

Aus (2.43) folgt unmittelbar

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left\langle \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d\sigma_y v(0) = v(0)$$

und daher

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial E_3(x, t)}{\partial t} = \delta(x).$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{d}{dt} \int_{S_1} v(aty) d\sigma_y &= \int_{S_1} \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{d}{dt} v(aty) d\sigma_y \\ &\stackrel{g=aty}{=} \int_{S_1} \lim_{t \rightarrow 0_+} (\nabla_g v(aty) \cdot ay) d\sigma_y \\ &= \int_{S_1} a \nabla_g v(0) \cdot y d\sigma_y = \int_{S_1} \vec{c} \cdot y d\sigma_y \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (c_1 \sin \vartheta \cos \varphi + c_2 \sin \vartheta \sin \varphi + c_3 \cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^\pi c_3 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = c_4 \sin^2 \vartheta \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Die Relation (2.44) liefert

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left\langle \frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2}, v(x) \right\rangle = 0$$

und somit folgt

$$\frac{\partial^2 E_3(x, t)}{\partial t^2} = 0.$$

■

Cauchysches Anfangswertproblem für die Wellengleichung

Das Cauchysche Anfangswertproblem für die Wellengleichung lautet: Finde eine Distribution (Funktion) $u = u(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ so, dass

$$\left. \begin{aligned} (\partial_{tt} - a^2 \Delta)u(x, t) &= f(x, t) && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) \\ u_t(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned} \right\} \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.45)$$

gilt, wobei $f = f(x, t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $f = 0$ für $t < 0$; $u_0, u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Wir stellen eine neue Differentialgleichung auf, in der die Anfangsbedingungen in der rechten Seite der Differentialgleichung berücksichtigt werden. Dazu betrachten wir zunächst glatte Funktionen $u = u(x, t)$ und $v = v(x, t)$. Für die Funktion f hatten wir vorausgesetzt, dass sie für $t < 0$ verschwindet. Die Funktion u setzen wir in den Halbraum $t < 0$ ebenfalls durch Null fort, indem wir folgende Funktion einführen

$$U = U(x, t) = H(t)u(x, t).$$

Die Funktion U ist in \mathbb{R}^{n+1} lokal integrierbar und erzeugt eine reguläre Distribution. Für eine Funktion $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \partial_{tt}U, v \rangle &= \langle U, \partial_{tt}v \rangle \\ &= \langle H(t)u(x, t), \partial_{tt}v(x, t) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty u(x, t) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[- \int_0^\infty \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) dt + \left[u(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} v(x, t) dt - \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) v(x, t) \right]_{t=0}^{t=\infty} + \left[u(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^{t=\infty} \right] dx \\ &= \left\langle H \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, v(x, t) \right\rangle - u(x, 0) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) v(x, 0) \\ &= \left\langle H \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, v(x, t) \right\rangle + \langle u_0(x) \delta'(t), v(x, t) \rangle + \langle u_1(x) \delta(t), v(x, t) \rangle. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} (\partial_{tt} - a^2 \Delta)U(x, t) &= H(t)f(x, t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t) \\ &= f(x, t) + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die verallgemeinerte Cauchysche Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung besteht darin, eine Distribution $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ zu finden, die der Relation (2.46) im Distributionensinn genügt.

Satz 15 Es seien u_0 und $u_1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $f = 0$ für $t < 0$. Dann existiert eine Lösung $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ des verallgemeinerten Cauchyschen Anfangswertproblems als Summe von drei Potentialen

$$U = E_n * f + E_n * \delta(t)u_1 + \frac{\partial}{\partial t} E_n * u_0 \delta(t). \quad (2.47)$$

Sind f , u_0 und u_1 integrierbare Funktionen, dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (2.45), die folgendermaßen gegeben ist:

$n = 1$, $t > 0$, **d'Alembertsche Formel:**

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \left\{ u_0(x+at) + u_0(x-at) + \frac{1}{a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi \right\} \quad (2.48)$$

$n=2, t>0$, **Poisson Formel:**

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{K_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} d\xi d\tau \\
&+ \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi \\
&+ \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} d\xi
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$n=3, t>0$, **Kirchhoffsche Formel:**

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(x)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi \\
&+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi \\
&+ \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{S_{at}(x)} u_0(\xi) d\sigma_\xi \right].
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Hierbei bedeutet $K_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^2 : |x' - x| < r\}$, $B_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x| < r\}$ und $S_r(x) = \{x' \in \mathbb{R}^3 : |x' - x| = r\}$.

Beweis

a) Wir befassen uns zunächst mit der Formel (2.47) und weisen die Existenz der dort auftretenden Faltungen nach.

Da $\frac{\partial}{\partial t} E_n * u_0(x)\delta(t) = E_n * u_0(x)\delta'(t)$ ist und die Distributionen

$$f, \delta(t)u_1(x) = \delta(t) \otimes u_1, u_0(x)\delta(t) = u_0 \otimes \delta'(t)$$

aus $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ sind und alle Distributionen für $t < 0$ verschwinden, genügt es, die Existenz von $E_n * f$, $n = 1, 2, 3$, zu zeigen. Wir erinnern, dass gilt

$$\begin{aligned}
E_1(x, t) &= \frac{1}{2a} H(at - |x|), \\
E_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi a} \frac{H(at - |x|)}{\sqrt{a^2t^2 - |x|^2}}, \\
E_3(x, t) &= H(t) \frac{1}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Streifenbedingung (Definition 16) für die Distributionen $E_n \in S'(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ erfüllt ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$M_r = \text{supp}(E_n \otimes f) \cap \{(t, x), (\tau, y) \in \mathbb{R}^{2n+2} : |(t, x) + (\tau, y)| \leq r\}.$$

Für Elemente $((t, x), \tau, y) \in M_r$ gilt:

$$|t + \tau| \leq r, \tau \geq 0, t \geq 0, at \geq |x|.$$

Daher ist $t \leq r, \tau \leq r, |x| \leq ar, |y| = |y + x - x| \leq |y + x| + |x| \leq r(1 + a)$, woraus die Beschränktheit von M_r folgt. Der Hauptsatz (Satz 9, Seite 40), der für lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und rechter Seite als Distribution mit kompaktem Träger bewiesen wurde, kann ohne Schwierigkeiten auch in diesem Fall angewandt werden. Dies liefert uns die Existenz einer Lösung der Form (2.47).

b) Wir berechnen die einzelnen Faltungen für $n = 1, 2, 3$.

Wir beginnen mit dem Fall $n=1$.

Für $E_1(x, t) = \frac{H(at - |x|)}{2a}$ haben wir die Faltung mit den rechten Seiten von (2.47) zu berechnen:

$$\begin{aligned} E_1 * f &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * f(x, t) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(a(t - \tau) - |x - \xi|) f(\xi, \tau) \, d\tau \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{a(t-\tau) > |x-\xi|} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \end{aligned}$$

Wir haben benutzt, dass $f(x, \tau) = 0$ für $\tau < 0$ und $H(a(t - \tau) - |x - \xi|) = 0$ für $a(t - \tau) < |x - \xi|$ und daher auch für $\tau > t$ ist.

Da $f * \delta_0 = f$ ist (vgl. Beispiel auf Seite 35), erhalten wir

$$\begin{aligned} E_1 * \delta(t)u_1 &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * \delta(t)u_1(x) \\ &= \frac{H(at - |x|)}{2a} * u_1(x) \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} H(at - |x - \xi|)u_1(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) \, d\xi, \end{aligned}$$

beachtend, dass

$$H(at - |x - \xi|) = 1, \text{ falls } at > x - \xi (x > \xi) \text{ oder falls } at > \xi - x (\xi > x).$$

Weiterhin ist für stetiges u_0

$$\begin{aligned} E_1 * \delta'(t)u_0 &= \frac{\partial}{\partial t}[E_1 * u_0] = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi) \, d\xi \\ &= \frac{1}{2a} [u_0(x+at)a - u_0(x-at)(-a)] = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]. \end{aligned}$$

Wir gehen jetzt zum Fall $n = 2$ über. Es ist

$$\begin{aligned} E_2 * f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(a(t-\tau) - |x-\xi|)}{2\pi a \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{a(t-\tau) > |x-\xi|} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{K_{a(t-\tau)}(x)} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi \, d\tau, \end{aligned}$$

wobei $K_{a(t-\tau)}(x)$ ein Kreis mit dem Radius $a(t-\tau)$ um den Mittelpunkt x ist.

Weiterhin ist $E_2 * \delta u_1 = E_2(x, t) * \delta(t)u_1(x) = E_2(x, t) * u_1(x)$, wobei auf der rechten Seite die Faltung nur bezüglich der Ortsvariablen auszuführen ist (wir erinnern noch einmal daran, dass $f(t) * \delta(t) = f(t)$ ist).

Damit ist

$$E_2 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{2\pi a} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(at - |x-\xi|)u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi = \frac{1}{2\pi a} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_1(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi.$$

Durch analoge Überlegungen ($f * \delta' = f'$) erhalten wir

$$E_2 * \delta'(t)u_0 = \frac{\partial}{\partial t}[E_2(x, t) * u_0(x)] = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{K_{at}(x)} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi.$$

Schließlich kommen wir zum Fall $n = 3$.

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt nach (2.41):

$$\langle E_3 * f, \varphi \rangle = \langle E_3, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(y, \frac{|y|}{a})}{|y|} \, dy,$$

wobei $\psi = \psi(y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y, t-\tau) \varphi(x, t) \, dx \, dt$ ist.

Daher ist

$$\begin{aligned} \langle E_3 * f, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a}) \varphi(x, t)}{|y|} dx dt \right\} dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x, t) \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy \right] dx dt. \end{aligned}$$

Da $f(x-y, t - \frac{|y|}{a}) = 0$ für $ta < |y|$ ist, muss die Integration bezüglich y nur über die Kugel $B_{at}(0)$ ausgeführt werden. Folglich ist:

$$E_3 * f = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(0)} \frac{f(x-y, t - \frac{|y|}{a})}{|y|} dy.$$

Setzen wir $x-y = \xi$, dann erhalten wir die Kugel $B_{at}(x)$ als Integrationsgebiet und schließlich aufgrund von Symmetrieeigenschaften

$$E_3 * f = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(x)} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi,$$

was zum ersten Teil der Kirchhoffschen Formel führt. Wir berechnen nun die restlichen Integrale. Es ist

$$E_3 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t} (\delta_{S_{at}(0)}(x) * u_1(x)),$$

was bedeutet, für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{S_{at}(0)} * u_1, \varphi \rangle &= \langle \delta_{S_{at}(0)} \otimes u_1, \varphi(\xi + y) \rangle = \langle \delta_{S_{at}(0)}(y), u_1(\xi) \varphi(\xi + y) \rangle \\ &\stackrel{\xi+y=x}{=} \int_{S_{at}(0)} \left[\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x-y) \varphi(x) dx \right] d\sigma_y \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(x) \left[\int_{S_{at}(0)} u_1(x-y) d\sigma_y \right] dx. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\delta_{S_{at}(0)}(x) * u_1(x) = \int_{S_{at}(0)} u_1(x-y) d\sigma_y = \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi$$

und schließlich

$$E_3 * \delta(t)u_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_1(\xi) d\sigma_\xi.$$

Analog ist

$$E_3 * \delta'(t)u_0(x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(x)} u_0(\xi) \, d\xi \right].$$

■

Wir überlegen nun, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right] u(x, t) &= f(x, t) && \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, die durch (2.48), (2.49) und (2.50) gegeben ist. Analog wie bei der Wärmeleitungsgleichung (Lemma 9) wenden wir die Fouriertransformation bezüglich des Ortes auf das homogene Problem

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - a^2 \Delta)v(x, t) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ v(x, 0) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

an. Es folgt

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 + a^2 |\xi|^2) \hat{v}(\xi, t) &= 0 && \text{in } (0, \infty), \\ \hat{v}(\xi, 0) &= 0, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(\xi, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Diese Anfangswertaufgabe besitzt für jedes ξ eine eindeutige Lösung $\hat{v}(\xi, t) = 0$. Die inverse Fouriertransformation bezüglich ξ liefert $v(x, t) = 0$.

Retardierte Potentiale

Wir betrachten jetzt etwas genauer die einzelnen Bestandteile der verallgemeinerten Lösung U , siehe (2.47).

Definition 25 Sei $f \in f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ und verschwinde für $t < 0$, $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die Faltung $v_n = E_n * f$ heißt retardiertes Potential mit der Dichte f . Die Faltungen

$$\begin{aligned} V_n^{(0)} &= E_n * u_1(x) \otimes \delta(t) \\ V_n^{(1)} &= E_n * u_0(x) \otimes \delta'(t) \end{aligned}$$

heißen retardierte Oberflächen-Potentiale mit den Dichten u_1 bzw. u_0 .

Lemma 14 Es gilt, dass $V_n = V_n(x, t) = 0$ für $t < 0$ ist.

Beweis

Es sei $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\text{supp } v \subset \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t < 0\}$. Nach Satz 8 ist

$$\langle E_n * f, v \rangle = \langle E_n \otimes f, v(t + \tau, x + \xi) \rangle.$$

Nun ist $\text{supp}(E_n \otimes f) \subset \{((x, t), (\xi, \tau)) : t \geq 0, \tau \geq 0\}$ und $\text{supp } v(t + \tau, x + \xi) \subset \{((x, t), (\xi, \tau)) : t + \tau < 0\}$. Daher ist der Durchschnitt der beiden Träger die leere Menge und

$$\langle E_n * f, v \rangle = 0.$$

■

Wir schätzen die retardierten Potentiale mit stetigen Dichten f ab. Dazu führen wir zu jedem Punkt $(x, t), t > 0$, einen endlichen Kreiskegel $C^-(x, t)$ ein, dessen Spitze sich in (x, t) befindet (siehe Abbildung 2.7)

$$C^-(x, t) = \{(\xi, \tau) : |x - \xi| \leq a(t - \tau), 0 \leq \tau \leq t\}.$$

$C^-(x, t)$ besitzt die Mantelfläche

$$\Gamma^-(x, t) = \{(\xi, \tau) : |x - \xi| = a(t - \tau), 0 \leq \tau \leq t\}.$$

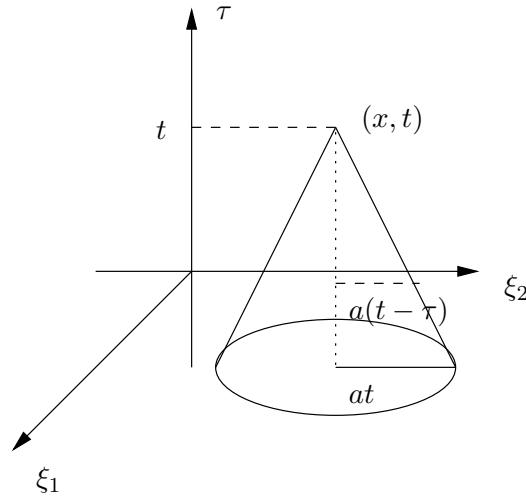


Abbildung 2.7: Der Kegel $C^-(x, t)$

Lemma 15 Ist die Dichtefunktion $f = f(x, t)$ stetig für $t \geq 0$, dann können die retardierten Potentiale folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$|v_i(x, t)| \leq \frac{t^2}{2} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|, \quad i = 1, 2, \quad (2.51)$$

$$|v_3(x, t)| \leq \frac{t^2}{2} \max_{(\xi, \tau) \in \Gamma^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|. \quad (2.52)$$

Beweis

Aus Formel (2.48) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|v_1(x, t)| &= \left| \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2a} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\xi \, d\tau \\
&= \frac{1}{2a} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)| 2a \int_0^t (t-\tau) \, d\tau = \frac{t^2}{2} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|.
\end{aligned}$$

Analog können wir aus (2.49) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|v_2(x, t)| &= \left| \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{|\xi-x| \leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\xi-x|^2}} \, d\xi \, d\tau \right| \\
&\leq \frac{1}{2a\pi} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)| \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{r \leq a(t-\tau)} \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} r \, dr \, d\varphi \, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi a} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)| a 2\pi \int_0^t (t-\tau) \, d\tau = \frac{t^2}{2} \max_{(\xi, \tau) \in C^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|
\end{aligned}$$

gewinnen. Für $v_3(x, t)$ gilt nach (2.50)

$$\begin{aligned}
|v_3(x, t)| &= \left| \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi| \leq at} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} \, d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{4\pi a^2} \max_{(\xi, \tau)} \left\{ |f(\xi, \tau)|, \tau = t - \frac{|x-\xi|}{a}, 0 \leq t \leq \tau \right\} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{at} \frac{1}{r} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi a^2} \max_{(\xi, \tau) \in \Gamma^-(x, t)} |f(\xi, \tau)| 4\pi \frac{a^2 t^2}{2} = \frac{t^2}{2} \max_{(\xi, \tau) \in \Gamma^-(x, t)} |f(\xi, \tau)|.
\end{aligned}$$

Aus diesen Abschätzungen folgt, dass die retardierten Potentiale der Wellengleichung genügen und verschwindende Anfangswerte besitzen. ■

Lemma 16 Sei f stetig für $t > 0$, $f = 0$ für $t < 0$. Dann gilt im Distributionensinn

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \right) v_n = f \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (2.53)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} v_n(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial}{\partial t} v_n(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.55)$$

Beweis

Die Gleichung (2.53) gilt für $v_n = E_n * f$ im Distributionensinn. Für $t \rightarrow 0_+$ ziehen sich der Kegel $C^-(x, t)$ bzw. die Mantelfläche $\Gamma^-(x, t)$ auf einen Punkt zusammen. Die Abschätzungen (2.51), (2.52) liefern unmittelbar (2.54). Für die Ableitungen gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left| \frac{v_n(x, t) - v_n(x, 0_+)}{t} \right| \leq \lim_{t \rightarrow 0_+} t \max_{\substack{(\xi, \tau) \in C^- \\ (\xi, \tau) \in \Gamma^-}} |f(\xi, \tau)| = 0,$$

und (2.55) ist gezeigt. ■

Die retardierten Oberflächenintegrale haben folgende Eigenschaften.

Lemma 17 Seien $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt im Distributionensinn

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) V_n^{(i)} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, i = 0, 1. \quad (2.56)$$

Weiterhin gehören die Potentiale $V_n^{(0)}$ und $V_n^{(1)}$ bezüglich $t \in (0, \infty)$ zur Klasse C^∞ und

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} V_n^{(0)}(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t} = u_1(x), \quad (2.57)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} V_n^{(1)}(x, t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial V_n^{(1)}(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.58)$$

Beweis

Da

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) V_n^{(0)} = u_1 * \delta(t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) V_n^{(1)} = u_0 * \delta'(t) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n, t > 0,$$

erhalten wir (2.56). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \langle V_n^{(0)}(x, t), v(x) \rangle &= \langle E_n(x, t) * u_1(x) \delta(t), v(x) \rangle \\ &\stackrel{\text{Übung}}{=} \langle E_n(x, t) * u_1(x), v(x) \rangle \\ &= \langle E_n(x, t), \langle u_1(\xi), v(x + \xi) \eta(x, \xi) \rangle \rangle \\ &= \langle E_n(x, t), \psi(x) \rangle, \end{aligned}$$

wobei $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist. Nach Lemma 13 ist $E_n(x, t)$ bezüglich $t \in (0, \infty)$ beliebig oft differenzierbar und $\lim_{t \rightarrow 0_+} E_n(x, t) = 0$. Analog können wir folgern, dass die zweite Relation in (2.57) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \left\langle \frac{\partial V_n^{(0)}(x, t)}{\partial t}, v(x) \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\partial}{\partial t} \langle E_n(x, t), \psi(x) \rangle = \langle \delta(x), \psi(x) \rangle = \langle u_1(\xi), v(\xi) \rangle.$$

Beachten wir, dass

$$\begin{aligned} E_n * u_0(x) \otimes \delta'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} E_n * u_0(x) \delta(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} E_n * u_0(x) \end{aligned}$$

ist, erhalten wir aus Lemma 14 die Grenzwerte (2.58).

Interpretation der d'Alembertschen Formel

Die d'Alembertsche Formel

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) \, d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] \end{aligned}$$

beschreibt den Einfluss des Quellterms und der Anfangsdaten in den entsprechenden Intervallen und deren Endpunkten.

Setzen wir $f(\xi, \tau) \equiv 0$, dann kann der Einfluss der Anfangsdaten auf das Verhalten im Punkt (x_0, t_0) folgendermaßen charakterisiert werden:

Definition 26 Als *Abhängigkeitsgebiet* $\mathcal{A}(x_0, t_0)$ des Punktes (x_0, t_0) bezeichnet man die Punktmenge auf der x -Geraden ($t = 0$) (im mehrdimensionalen Fall auf der Hyperebene $t = 0$), auf der die Kenntnis der Anfangsdaten ausreichend ist, um $u(x_0, t_0)$ zu berechnen.

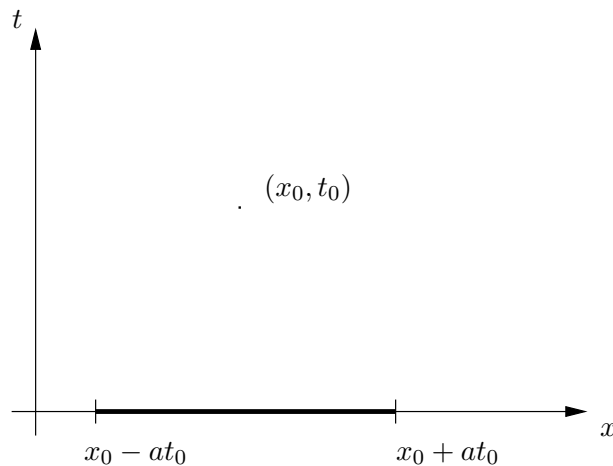


Abbildung 2.8: $\mathcal{A}(x_0, t_0) = [x - at_0, x + at_0]$

Im eindimensionalen Fall ist $\mathcal{A}(x_0, t_0) = [x - at_0, x + at_0]$ (siehe Abbildung 2.8). Liegen räumlich begrenzte Anfangsbedingungen vor, z.B. $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset [a_1, a_2]$, so interessiert die Frage, in welchem Zeitraum ein Punkt $x_0 \notin [a_1, a_2]$ von der Welle erreicht wird, d.h. für welche t ist $u(x_0, t) \neq 0$.

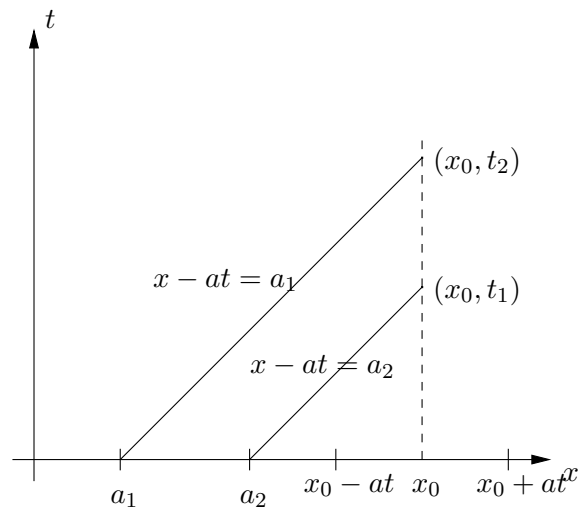


Abbildung 2.9: Ausbreitung der Welle

Wir betrachten den Fall $x_0 > a_2$:

Die Welle erreicht x_0 zur Zeit $t_2 = \frac{x_0 - a_2}{a}$ mit einer scharf begrenzten Wellenfront. Sie ändert sich bis zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{x_0 - a_1}{a}$ und ist danach konstant. Ist $u_1 \equiv 0$, dann hört die Störung zur Zeit t_1 auf und es liegt eine scharf begrenzte Rückfront vor.

Der Punkt x_0 kann natürlich auch im Intervall $[a_1, a_2]$ liegen, bzw. links davon. Diese allgemeinere Situation ist in Abbildung 2.10 dargestellt.

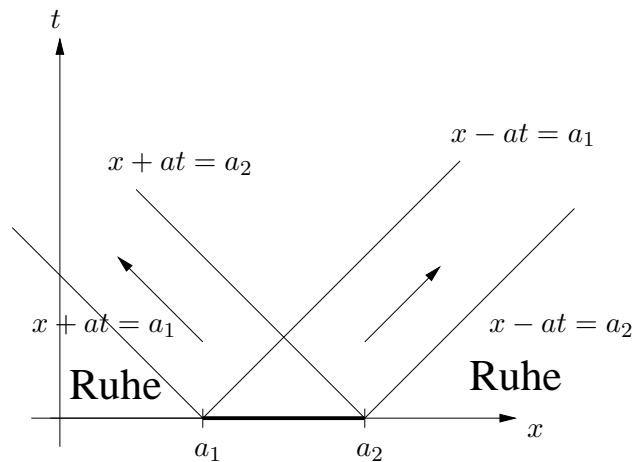


Abbildung 2.10: Ausbreitung der Wellenberge

Ist $u_1 \equiv 0$, dann gilt das Huygensche Prinzip. Eine räumlich lokalisierte Anfangserregung ruft in jedem Punkt eine zeitlich begrenzte Erregung mit scharf begrenzter Vorder- und Rückfront hervor.

Dieses Prinzip gilt auch im dreidimensionalen Fall ($f \equiv 0$), im zweidimensionalen Fall jedoch nicht [34, S. 178ff].

Kapitel 3

Einige Anwendungen der Distributionentheorie

In diesem Kapitel werden einige Anwendungen der Distributionentheorie in der Theorie der Randwertprobleme behandelt. Es wird die Struktur von Elementen des Raumes $W^{-k,p}(\Omega)$ untersucht, die als "rechte Seiten" bei einer schwachen Formulierung von Randwertproblemen auftreten. Danach wird das Neumann-Randdatum $\frac{\partial w}{\partial n} \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ für ein $w \in W^{1,2}(\Omega)$ definiert, das der Laplace-Gleichung genügt. Im dritten Abschnitt wird eine Einführung in die Regularitätstheorie für elliptische Randwertprobleme in Gebieten mit Ecken und Kanten gegeben.

3.1 Der Raum $W^{-k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 < p < \infty$

Wir wiederholen, wie der Sobolevraum $W^{k,p}(\Omega)$ für ein offenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Definition 27 Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $W^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionen, deren schwache Ableitungen $D^\alpha u$ für alle α mit $|\alpha| \leq k$ sich ebenfalls in $L^p(\Omega)$ befinden. Genauer:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq k\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.1)$$

In $W^{k,2}(\Omega)$ ist zusätzlich ein Skalarprodukt definiert

$$(u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} = (u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Bemerkung $W^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum [1, S. 45].

Die Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ können durch glattere Funktionen approximiert werden, jedoch im Allgemeinen nicht durch Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$, falls $k > 0$ ist. Um diese Approximation zu beschreiben, führen wir den Raum $H^{k,p}(\Omega)$ ein:

Definition 28 $H^{k,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ in der Norm (3.1).

Im Jahre 1964 haben Meyers und Serrin [23] folgenden Satz bewiesen.

Satz 16 Für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega).$$

Bemerkung

$C^\infty(\bar{\Omega})$ ist nicht immer dicht in $W^{k,p}(\Omega)$. Es gilt jedoch die Aussage:

Satz 17 Besitzt Ω die Segment-Eigenschaft, dann sind die Einschränkungen auf Ω von Elementen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

Die Segment-Eigenschaft (bzw. Kegeleigenschaft) ist wie folgt definiert:

Definition 29 Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Ω besitzt die gleichmäßige Segment- bzw. Kegeleigenschaft, falls es für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung V von x in \mathbb{R}^n gibt und neue Koordinaten $\{y_1, \dots, y_n\}$, so dass:

- (a) V ein Quader in den neuen Koordinaten ist,
 $V = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) : -a_j < y_j < a_j, \quad 1 \leq j \leq n\}$,
- (b) für jedes $y \in \bar{\Omega} \cap V$ und $z \in C$ ist $y - z \in \Omega$. Hierbei ist C ein offenes Segment
 $\{z : (0, \dots, 0, z_n) : 0 < z_n < h\}$ bzw. ein offener Kegel
 $C = \{z = (z', z_n) : \cot\theta|z'| < z_n < h\}$ für ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und für ein $h > 0$.

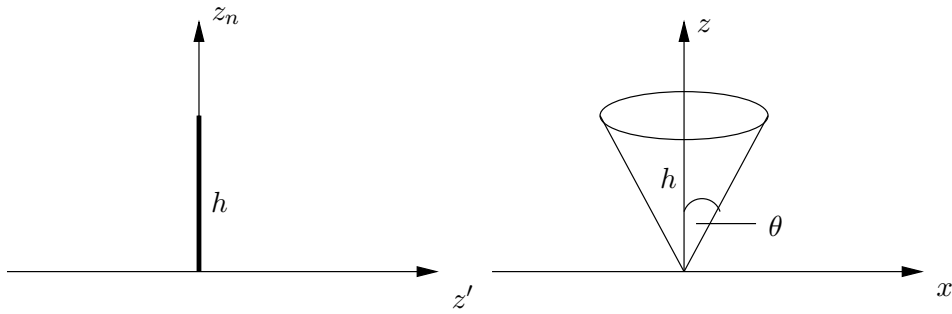
Mit anderen Worten: für jeden Punkt $x \in \partial\Omega$ existiert ein lineares Segment oder ein Kegel C mit Spitze in x , so dass $C \setminus \{x\}$ in Ω enthalten ist. Gleichmäßig heißt, der gleiche Kegel wird in allen Punkten aus einer Umgebung V betrachtet.

Bemerkung

Eine beschränkte offene Teilmenge Ω von \mathbb{R}^n hat die gleichmäßige Kegeleigenschaft genau dann, wenn ihr Rand Lipschitz-stetig ist.

Dabei ist Ω von der Klasse $C^{k,1}$ (k -mal stetig differenzierbar und die k -ten Ableitungen sind Lipschitz-stetig, $k = 0, 1, 2, \dots$) falls in der Umgebung eines Randpunktes der Rand durch eine $C^{k,1}$ -Funktion $\varphi = \varphi(y') = \varphi(y_1, \dots, y_{n-1})$ darstellbar ist und sich Ω unterhalb (bzw. auf einer Seite) vom Graphen von φ befindet. Ausführlicher heißt das:

In $V' = \{(y_1, \dots, y_{n-1}) : -a_j < y_j < a_j, \quad 1 \leq j \leq n-1\}$ gilt:

Abbildung 3.1: $C = \text{Segment}$ Abbildung 3.2: $C = \text{Kegel}$

- $|\varphi(y')| < \frac{a_n}{2} \quad \forall y' \in V'$,
- $\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V : y_n < \varphi(y')\}$,
- $\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V' : y_n = \varphi(y')\}$.

Der Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$

Definition 30 Der Raum $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ist die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm (3.1).

Bemerkungen

- Es ist $\mathring{W}^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Dies folgt aus Lemma 2.
- Für beschränkte Gebiete Ω und $k \geq 1$ ist $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ ein echter Teilraum von $W^{k,p}(\Omega)$. Dies folgt aus Satz 17.
- Falls Ω beschränkt ist, ist die Norm in $\mathring{W}^{k,p}(\Omega)$ äquivalent zu einer Seminorm in der nur die höchsten Ableitungen auftreten.

Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit reellem $s \geq 0$ (Sobolev-Slobodeskij-Raum)

Zur genauen Beschreibung des Verhaltens von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen und insbesondere zur Beschreibung der zugelassenen Glattheit der Randdaten, benötigt man Räume, bei der die Ableitungsordnung nicht ganzzahlig ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $s \geq 0$, $s = k + \lambda$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \lambda \leq 1$. Wir erinnern zunächst an die Definition von k -mal Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen:

$$C^{k,\lambda}(\bar{\Omega}) = \left\{ u \in C^k(\bar{\Omega}) : H_{\alpha,\lambda}(u) = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}.$$

In $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ wird eine Norm eingeführt:

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} H_{\alpha,\lambda}(u).$$

Es gilt $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega})$ und damit nimmt $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ eine Zwischenposition ein. Diese Idee wird auf Sobolevräume übertragen, um nicht ganzzahlige Differentiationsordnungen zu erklären.

Definition 31 *Der Raum*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : I_\alpha(u) = \iint_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x - y|^{n+p\lambda}} dx dy < \infty \text{ für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k \right\}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=k} I_\alpha(u) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

wird Sobolev-Slobodeskij-Raum genannt.

Bemerkung

$W^{s,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum, separabel für $p \geq 1$ und reflexiv für $p > 1$.

$$\overset{\circ}{W}^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}}.$$

Beispiel

Die Sprungfunktion einer reellen Variablen (siehe Grafik 20)

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört nicht zu $W^{1,2}(-2, 2)$, da $u'(x) = \delta_{-1}(x) + \delta_{+1}(x)$ im Distributionensinne ist. Jedoch ist $u \in W^{s,2}(-2, 2)$ für $0 \leq s < \frac{1}{2}$.

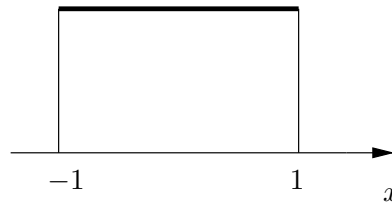


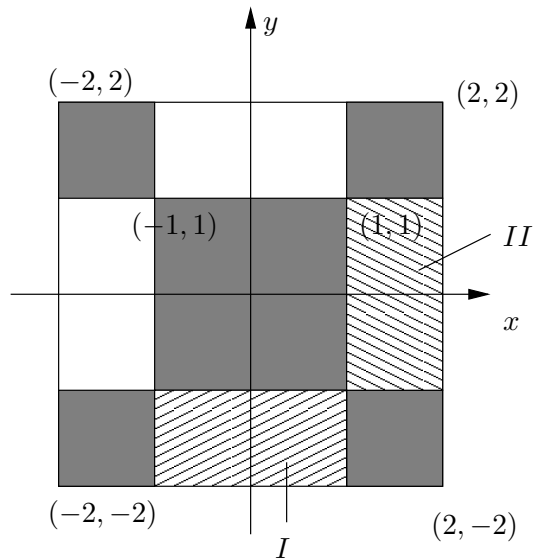
Abbildung 3.3: Sprungfunktion $u(x)$

Wir überzeugen uns davon. Wir betrachten die Funktion

$$v(x, y) = |u(x) - u(y)|$$

auf dem Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$ (siehe Abbildung 3.4).

Über den grauen Flächen ist $v(x, y) = 0$, auf dem weißen Gebiet ist $v(x, y) = 1$.

Abbildung 3.4: Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{+2} \int_{-2}^{+2} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy &= 2 \int_{-2}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy \\ &\quad + 2 \int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{|x - y|^{1+2\lambda}} dx dy \\ &= 2I + 2II. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{-1} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{(x - y)^{1+2\lambda}} dx \right) dy = \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{2\lambda} \frac{1}{(x - y)^{2\lambda}} \Big|_{-1}^{+1} dy \\ &= \int_{-2}^{-1} -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{(1 - y)^{2\lambda}} - \frac{1}{(1 + y)^{2\lambda}} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \left[-\frac{(1 - y)^{-2\lambda+1}}{1 - 2\lambda} - \frac{(1 + y)^{-2\lambda+1}}{1 - 2\lambda} \right]_{-2}^{-1} < \infty, \end{aligned}$$

falls $-2\lambda + 1 > 0$, d.h. $\lambda < \frac{1}{2}$ ist.

Ähnliche Rechnungen können für das Integral II ausgeführt werden.

Der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ mit $s < 0$

Wir erinnern an die Definition des Dualraums X' , eines Banachraums X , der über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} oder der komplexen Zahlen \mathbb{C} definiert ist. X' ist der lineare Raum aller stetigen (beschränkten) linearen Abbildungen $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) versehen mit der Operatornorm

$$\|F\|_{X'} = \sup_{u \neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|_X}.$$

Der Raum der Grundfunktionen $\mathcal{D}(\Omega)$ war kein Banachraum. Wir hatten $\mathcal{D}'(\Omega)$ als Raum aller stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ (stetig im Sinne der Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$) eingeführt. Weiterhin hatten wir die Ordnung einer Distribution [Definition 7] definiert und somit auch gewissermaßen negative Ableitungsordnungen beschrieben. Um nun $W^{s,p}(\Omega)$ für $s < 0$ (negative Ableitungsordnungen) im Sinne der Distributionentheorie einführen zu können, greifen wir auf $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{-s,q}(\Omega)}} = \overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)$ zurück (beachte, dass $C_0^\infty(\Omega)$ im Allgemeinen nicht dicht in $W^{-s,q}(\Omega)$ ist). Hierbei ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definition 32 Sei $1 < p < \infty$, $s < 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $W^{s,p}(\Omega)$ ist der Dualraum von $\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)$, das heißt

$$W^{s,p}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega))',$$

versehen mit der Norm

$$\|F\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \neq 0 \\ u \in \overset{\circ}{W}^{-s,q}(\Omega)}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{W^{-s,q}(\Omega)}}.$$

Die Einschränkung des Funktionals F auf $C_0^\infty(\Omega)$ definiert eine Distribution. Der folgende Satz charakterisiert die Elemente aus $W^{-k,p}(\Omega)$, wobei $k \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 18 [19, S.294] Sei $p \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. F ist aus $W^{-k,p}(\Omega)$ genau dann, wenn eine Familie $\{f_\alpha\}_{|\alpha| \leq k}$ von Elementen $f_\alpha \in L^p(\Omega)$ existiert, so dass gilt

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha,$$

wobei die Ableitungen $D^\alpha f_\alpha$ im Distributionensinn zu verstehen sind.

Beweis

Es wird eine Abbildung

$$I : \overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega) \rightarrow \prod_{|\alpha| \leq k} L^q(\Omega) = X$$

$$Iu = \{D^\alpha u\}_{|\alpha| \leq k}$$

betrachtet. I ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)$ und $X_0 = I(\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)) \subset X$.

Für $F \in W^{-k,p}(\Omega)$ definieren wir für alle $\{u_\alpha = D^\alpha u\} \in X_0$

$$\varphi(\{u_\alpha\}) := F(I^{-1}(\{u_\alpha\})_{|\alpha| \leq k}).$$

φ ist ein lineares stetiges Funktional auf $I(\overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega))$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert eine Fortsetzung ϕ von φ auf X . Nach dem Satz von Riesz existiert eine Familie $\{f_\alpha \in L^p(\Omega)\}_{|\alpha| \leq k}$, so dass gilt:

$$\phi(\{u_\alpha\}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} u_\alpha(x) f_\alpha(x) \, dx \quad \forall \{u_\alpha\}_{\alpha \in k} \in X.$$

Daher ist auf X_0

$$F(I^{-1}(\{u_\alpha\})_{|\alpha| \leq k}) = F(u) = \varphi(\{D^\alpha u\}_{|\alpha| \leq k}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) f_\alpha(x) \, dx$$

für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ bzw. $u \in \overset{\circ}{W}^{k,q}(\Omega)$. Hierbei ist $u = I^{-1}\{u_\alpha\} = I^{-1}\{D^\alpha u\}$.

Daraus folgt:

$$F = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha$$

im Distributionensinn, da für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle F, u \rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha, u \right\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha| \leq k} f_\alpha, D^\alpha u \right\rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) f_\alpha(x) \, dx. \end{aligned}$$

■

3.2 Das Randdatum $\frac{\partial w}{\partial n}$ für schwache Lösungen der Laplace-Gleichung

Wir erinnern an die klassische Formulierung des Neumannproblems: Gesucht ist ein $u \in C^2(\overline{\Omega})$, so dass für $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$

$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.3)$$

gilt.

Wir wissen nach (2.5), dass dieses Problem nur lösbar ist, falls:

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} g(x) \, d\sigma(x) = 0. \quad (3.4)$$

Weiterhin gilt: falls eine Lösung aus $C^2(\overline{\Omega})$ existiert, so ist diese nur bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Das schwache Problem lautet:

Sei $f \in (W^{1,2}(\Omega))'$, $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) = (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$, $\Omega \in C^{0,1}$. Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega)$, so dass gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega). \quad (3.5)$$

Hierbei ist $T : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ der Spuroperator und $\langle g, Tv \rangle_{\partial\Omega}$ ist als Anwendung des Funktionals $g \in W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ auf $Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ zu verstehen. Die rechte Seite ist insgesamt durch ein lineares und stetiges Funktional aus $(W^{1,2}(\Omega))'$ darstellbar.

Der Begriff des Spurooperators bedarf einer Erklärung. Außerdem muss $\frac{\partial u}{\partial n}$ als Element von $W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ wohl definiert sein. Wir beginnen mit einer kurzen Charakterisierung der Spurräume und des Spurooperators.

Spurräume

Um Randwertprobleme in Sobolevräumen behandeln zu können, müssen wir für Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ Randdaten auf $\partial\Omega$ erklären. Da diese nicht immer im klassischen Sinn als Einschränkungen von stetigen Funktionen auf dem Rand definiert werden können, spricht man davon, dass die Randdaten im Spursinn angenommen werden. Diese befinden sich in so genannten Spurräumen und stimmen mit der klassischen Einschränkung überein, falls die Elemente aus $W^{k,p}(\Omega)$ glatt bis zum Rand sind. Die Hauptidee ist, einen Diffeomorphismus (differenzierbare eineindeutige Koordinatentransformation) zu betrachten, der lokal eine Umgebung des Randes geschnitten mit Ω in den Halbraum \mathbb{R}_+^n abbildet. Die Einschränkungen der transformierten Funktion auf \mathbb{R}^{n-1} werden dann untersucht. Dazu ist eine gewisse Glattheit des Randes $\partial\Omega$ erforderlich.

Satz 19 (Spursatz) [12, S. 37-39], [19, S. 337], [36, S. 130]

- (i) Sei $\Omega \in C^{k,1}$ und beschränkt, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \leq k + 1$, $s - \frac{1}{p} = l + \sigma$, $0 < \sigma < 1$,
 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine eindeutige lineare, stetige, surjektive Abbildung

$$T_l : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

so dass

$$T_l u = \left(u, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \dots, \frac{\partial^l u}{\partial \vec{n}^l} \right) \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

ist.

Hierbei ist \vec{n} der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$, T_l wird Spuroperator genannt.

- (ii) Für $p = 2$, s reell, $k \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $-\frac{1}{2} + k < s < k - 1 + \lambda$, $\Omega \in C^{k,\lambda}$, dann ist

$$T_{k-1} : W^{s,2}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{k-1} W^{s-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

eine surjektive stetige Abbildung.

Bemerkungen

- Insbesondere gilt für Gebiete mit einem Lipschitz Rand ($k = l = 0$, $s = 1$)

$$T_0 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega),$$

bzw. $T_0 : W^{s,p}(\Omega) \rightarrow W^{s-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ für $\frac{1}{p} < s \leq 1$.

- Ist $s = m$ ganzzahlig, dann ist $l = m - 1$ und

$$T_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

- Die Stetigkeit des Spurooperators ist äquivalent zu der Aussage:
 Es existiert ein $C > 0$, so dass

$$\sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j u}{\partial \vec{n}^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega)$$

ist.

- Die Elemente aus $\mathring{W}^{s,p}(\Omega)$ sind wie folgt charakterisiert:

$$\mathring{W}^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{s,p}(\Omega) : T_l u = 0\},$$

d.h. $u = \frac{\partial u}{\partial n} = \dots = \frac{\partial^l u}{\partial \vec{n}^l} = 0$ auf $\partial\Omega$ im Spursinn.

- Ist $\Omega \in C^{0,1}$, dann ist $\mathring{W}^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ im Spursinn}\}$.

Fortsetzung vom Rand ins Gebiet

Der Spuroperator ist stetig rechts-invertierbar, d.h. es existiert eine stetige Rechts-Inverse von T_l , die den Elementen aus den Spurräumen Elemente aus den Sobolevräumen im Gebiet Ω zuordnet. Dieser Fortsetzungsoperator ist unabhängig von p .

Satz 20 (Fortsetzungssatz) [36, S. 133], [19, S. 338], [12, S. 37 ff] *Es seien die Voraussetzungen von Satz 19 erfüllt. Dann existiert ein stetiger linearer Operator*

$$F_l : \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \rightarrow W^{s,p}(\Omega),$$

so dass für jedes Tupel $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ mit $F_l(u_0, u_1, \dots, u_l) = v$ die Relationen

$$\frac{\partial^j v}{\partial n^j} = u_j \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots, l$$

gelten.

Bemerkungen

- Ein zu T_l rechtsinverser Operator F_l ist durch die Relation $T_l F_l = I_Y$ definiert, wobei Y der Bildraum und I_Y der identische Operator in Y sind. Er ist nicht eindeutig bestimmt. Die Stetigkeit besagt, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} \|F_l(u_0, \dots, u_l)\|_{W^{s,p}(\Omega)} &= \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^l \left\| \frac{\partial^j v}{\partial n^j} \right\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \\ &= C \sum_{j=0}^l \|u_j\|_{W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

für alle Elemente $(u_0, u_1, \dots, u_l) \in \prod_{j=0}^l W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ ist.

Wir kehren jetzt wieder zu unseren schwach formulierten Neumannproblem für die Laplacegleichung zurück. Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset C^{0,1}$, d.h. $\partial\Omega$ wird lokal durch eine Lipschitz-stetige Funktion dargestellt. Wir setzen $V = W^{1,2}(\Omega)$ und nach Satz 19 ist der Spuroperator $T_0 : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ wohl definiert. Der Spuroperator $T_1 : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) = (W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))'$ ist i.A. nicht definiert. Jedoch kann man das Neumannproblem für Lösungen der Laplacegleichung, für die $\Delta u \in (W^{1,2}(\Omega))' \subset W^{-1,2}(\Omega)$ ist, definieren. Hierzu führen wir den Raum $E_\Delta(V, V')$ ein.

Definition 33 *Es sei $E_\Delta(V, V') := \{w \in V : \Delta w \in V'\}$ versehen mit der Graphennorm*

$$\|w\|_{E_\Delta} = \|w\|_V + \|\Delta w\|_{V'}. \quad (3.6)$$

Der Raum $C^\infty(\bar{\Omega})$ befindet sich in $E_\Delta(V, V')$ und für Elemente $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist das Neumanndatum mit Hilfe der Greenschen Formel ausdrückbar:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} T_0 v \, d\sigma = \int_{\Omega} \Delta w v \, dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (3.7)$$

Lemma 18 Für $w \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist $\frac{\partial w}{\partial n} \in W^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ und für ein $c > 0$ gilt die Abschätzung

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{W^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c \|w\|_{E_\Delta}. \quad (3.8)$$

Beweis

Zu jedem $v \in V$ betrachten wir die Spur $Tv = T_0 v$ und eine stetige Fortsetzung \tilde{v} der Spur in das Gebiet Ω (siehe Satz 20). Das heißt, es gibt ein $c > 0$, so dass gilt

$$\|\tilde{v}\|_{W^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq c \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \quad \forall Tv \in W^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \quad (3.9)$$

Für diese \tilde{v} gilt ebenfalls (3.7) und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} T_0 v \, d\sigma \right| &= \left| \int_{\Omega} \Delta w \tilde{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \tilde{v} \, dx \right| \\ &\leq (\|\Delta w\|_{V'} + \|w\|_V) \|\tilde{v}\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq cc_2(w) \|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

mit $c_2(w) = \|\Delta w\|_{V'} + \|w\|_V$. Hieraus folgt

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{W^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sup_{0 \neq Tv \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \frac{|\langle \frac{\partial w}{\partial n}, Tv \rangle|}{\|Tv\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}} \leq cc_2(w) = c \|w\|_{E_\Delta}. \quad (3.10)$$

■

Um jetzt die Relation (3.7) auch auf Elemente aus $E_\Delta(V, V')$ eindeutig auszuweiten, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 19 $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist dicht in $E_\Delta(V, V')$.

Beweis

Wir betrachten ein beliebiges lineares Funktional $L \in E'_\Delta(V, V')$. Es gibt nach dem Riesz-schen Darstellungssatz Elemente $f \in V'$ und $g \in V$, so dass gilt:

$$L(u) = \langle f, u \rangle_\Omega + \langle \Delta u, g \rangle_\Omega \quad \forall u \in E_\Delta(V, V').$$

Insbesondere gilt für $u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \subset E_\Delta(V, V')$:

$$L(u) = \langle f, u \rangle_\Omega + \int_\Omega \Delta u g \, dx.$$

Wir nehmen jetzt an, dass $L = L_0$ das Nullfunktional auf $C^\infty(\bar{\Omega})$ ist. Wir betrachten ein $f_0 \in V'$ und $g_0 \in V$, so dass

$$L_0(u) = \langle f_0, u \rangle + \int_\Omega \Delta u g_0 \, dx = 0 \quad \forall u \in C^\infty(\bar{\Omega})$$

ist. Für Fortsetzungen $U \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ von u gilt:

$$L_0(u) = L_0(U) = \langle f_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} + \int_{\mathbb{R}^n} \Delta U \tilde{g}_0 \, dx = 0, \quad (3.11)$$

wobei

$$\tilde{g}_0(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.12)$$

und f_0 als Element von $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } f_0 \subset \bar{\Omega}$ aufgefasst wird. Die Relation (3.11) kann im Distributionensinne geschrieben werden als

$$\langle f_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \Delta \tilde{g}_0, U \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

woraus $-f_0 = \Delta \tilde{g}_0$ folgt.

Die Elliptizität von Δ sichert, dass $\tilde{g}_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ ist. Aus (3.12) folgt, dass $g_0 \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ist.

Wir zeigen nun, dass L_0 auch auf $E_\Delta(V, V')$ verschwindet. Dazu betrachten wir eine Folge von Elementen $(g_n), g_n \in C_0^\infty(\Omega), g_n \xrightarrow{W^{1,2}(\Omega)} g_0$. Der folgende Grenzwert ist wohl definiert für ein beliebiges $u \in E_\Delta(V, V') \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$L_0(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle -\Delta g_n, u \rangle + \langle \Delta u, g_n \rangle) = 0.$$

Ein Satz aus der Funktionalanalysis über die ausreichende Anzahl von Funktionalen [13, S. 232, Satz 36.3] besagt:

Sei $\hat{u} \in E_\Delta(V, V'), \hat{u} \notin \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{E_\Delta}}, \delta = \text{dist}(\hat{u}, \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{E_\Delta}}) > 0$.

Dann gibt es eine stetige Linearform L auf $E_\Delta(V, V')$, so dass:

$$L(u) = 0 \quad \forall u \in \overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{E_\Delta}}, \quad L(\hat{u}) = \delta, \quad \|L\| = 1.$$

Da notwendigerweise $L = L_0$ ist, kann ein solches \hat{u} nicht existieren und die Behauptung folgt. ■

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptergebnis zu beweisen.

Satz 21 Sei $w \in E_\Delta(V, V')$. Dann ist $\frac{\partial w}{\partial n} \in W^{-\frac{1}{2}, 2}(\partial\Omega)$ durch den Grenzwert einer approximierenden Folge $\frac{\partial w_n}{\partial n}$, $w_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ eindeutig definiert. Sei $v \in V$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial w}{\partial n}, Tv \right\rangle_{\partial\Omega} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w_n}{\partial n} Tv \, d\sigma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \Delta w_n v \, dx + \int_{\Omega} \nabla w_n \cdot \nabla v \, dx \right) \\ &= \langle \Delta w, v \rangle_{\Omega} + \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Beweis

Lemma 18 sichert, dass

$$\begin{aligned} N : C^\infty(\bar{\Omega}) &\rightarrow W^{-\frac{1}{2}, 2}(\partial\Omega), \\ Nw &= \frac{\partial w}{\partial n} \end{aligned}$$

eine lineare stetige Abbildung des Teilraumes $C^\infty(\bar{\Omega}) \subset E_\Delta(V, V')$ in $W^{-\frac{1}{2}, 2}(\partial\Omega)$ ist. Da nach Lemma 19 $C^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $E_\Delta(V, V')$ ist, lässt sich N eindeutig auf $E_\Delta(V, V')$ fortsetzen. ■

3.3 Regularitätsresultate für lineare elliptische Randwertprobleme in Polygonen

Wir bemerken, dass Lösungen von linearen elliptischen Randwertproblemen im Inneren eines Gebietes glatt (regulär) sind, falls die rechten Seiten glatt sind. Das bedeutet für das homogene Dirichletproblem $\Delta u = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$:

Ist $f \in L_2(\Omega)$, dann ist $u \in W_{\text{loc}}^{2,2}(\Omega)$. Ähnliche Regularitätsaussagen gelten auf glatten Randstücken $\Gamma \subset \partial\Omega$, d.h. für das obige Problem gilt:

Ist $f \in L_2(\Omega)$, dann ist $u \in W^{\frac{3}{2},2}(\Gamma)$. Diese Regularitätsaussagen gelten nicht mehr, wenn das Gebiet Ω Ecken und Kanten hat.

Einführendes Beispiel

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel. Sei Ω ein Polygon.

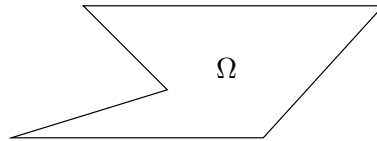


Abbildung 3.5: Polygon

Wir betrachten die schwache Formulierung des Dirichletproblems:

Finde ein $u \in V = \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$, so dass für ein $f \in V'$ gilt

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Ist f eine glatte Funktion, dann stellt sich die Frage, ob auch die Lösung u glatt ist. Wäre z.B. $f \in L_2(\Omega)$, gilt dann, dass $u \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ ist? Die Antwort ist negativ, falls das Gebiet Ω einspringende Ecken besitzt (also nicht konvex ist). Wir demonstrieren diese Behauptung, indem wir der Einfachheit halber ein Gebiet mit nur einer einspringenden Ecke betrachten.

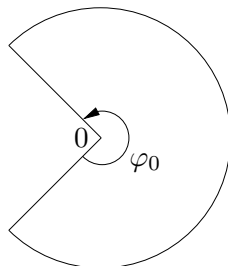


Abbildung 3.6: Gebiet mit einspringender Ecke

Wir betrachten das Randwertproblem, das im Distributionensinn formuliert ist, wobei $f \in L_2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Finde ein $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ T_0 u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir lokalisieren das Randwertproblem (3.13), indem wir eine Abschneidefunktion η betrachten, $\text{supp } \eta \subset B_\varepsilon(0)$, $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ auf $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$. Die Distribution ηu ist für $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wohl definiert und für $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} -\Delta \eta u &= -\eta \Delta u - u \Delta \eta - 2\nabla u \nabla \eta = F \quad \text{in } \Omega \\ T_0 \eta u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $F \in L_2(\Omega)$ ist.

Wir betrachten das Verhalten von $\eta u = v$ im unendlichen Kegel

$$K = K_{\varphi_0} = \{(r, \varphi), 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \varphi_0\}.$$

Die Funktion v genügt dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta v &= F \quad \text{in } K, \\ T_0 v &= 0 \quad \text{auf } \partial K. \end{aligned}$$

Die Lösung setzt sich aus der allgemeinen Lösung des homogenen Problems und einer Partikulärlösung des inhomogenen Problems zusammen. Ähnlich wie bei der Fouriertheorie zur Lösung des Dirichletproblems im Kreis, sehen wir uns zunächst das homogene Problem an:

$$\begin{aligned} -\Delta v &= 0 \quad \text{in } K, \\ T_0 v &= 0 \quad \text{auf } \partial K. \end{aligned}$$

Wir führen Polarkoordinaten (r, φ) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \Delta v &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] v(r, \varphi) = 0 \quad \text{in } K, \\ v(r, 0) &= 0, \\ v(r, \varphi_0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Wir benutzen den Ansatz: $v(r, \varphi) = r^\alpha \Phi_\alpha(\varphi)$. Damit reduziert sich das Problem (3.14) auf:

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2}\Phi_\alpha(\varphi) + \alpha r^{\alpha-2}\Phi_\alpha(\varphi) + r^{\alpha-2}\Phi_\alpha''(\varphi) &= 0 \quad 0 < \varphi < \varphi_0, 0 < r < \infty \\ r^\alpha \Phi_\alpha(\varphi) &= 0 \quad \varphi = 0, \varphi = \varphi_0, 0 < r < \infty. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Das quadratische Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \alpha^2 \Phi_\alpha(\varphi) + \Phi_\alpha''(\varphi) &= 0 \quad \text{für } 0 < \varphi < \varphi_0, \\ \Phi_\alpha(\varphi) &= 0 \quad \text{für } \varphi = 0, \varphi = \varphi_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

besitzt die Eigenwerte $\alpha_k = \frac{k\pi}{\varphi_0}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ mit den entsprechenden Eigenlösungen

$$\Phi_{\alpha_k}(\varphi) = \sin \alpha_k \varphi = \sin \frac{k\pi}{\varphi_0} \varphi. \quad (3.17)$$

Das führt auf Lösungen des homogenen Randwertproblems (3.14) der Gestalt:

$$v_k(r, \varphi) = r^{\alpha_k} \sin \alpha_k \varphi = r^{\frac{k\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{k\pi}{\varphi_0} \varphi \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.18)$$

Da wir Lösungen in $W^{1,2}(K)$ betrachten, erhalten wir die Einschränkung, dass $\alpha_k \geq 0$ und damit $k = 1, 2, \dots$ sein muss. Wenn wir darüber hinaus garantieren möchten, dass $v \in W^{2,2}(\Omega)$ ist, folgt dass $\alpha_k \geq 1$ sein muss. Dies ist für einspringende Ecken mit $\alpha_1 = \frac{\pi}{\varphi_0} < 1$ nicht erfüllt. Wir schreiben die Lösung des homogenen Problems im Keil K für Lösungen $v_{\text{hom}} \in W^{1,2}(K)$ in der Form

$$v_{\text{hom}} = (\eta u)_{\text{hom}} = cr^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \varphi + v_{\text{hom,reg}}$$

mit $v_{\text{hom,reg}} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k r^{\frac{k\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{k\pi}{\varphi_0} \varphi \in W^{2,2}(K)$. Durch Addition einer partikulären Lösung v_p des inhomogenen Problems

$$\begin{aligned} -\Delta v &= F && \text{in } K, \\ T_0 v &= 0 && \text{auf } \partial K \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\eta u = v = v_{\text{hom}} + v_p = cr^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + v_{\text{reg}}. \quad (3.19)$$

Wir werden später in Satz 23 zeigen, dass $v_{\text{reg}} = O(r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}})$ und damit aus $W^{2,2}(\Omega)$ ist. Multiplizieren wir ηu mit einer Abschneidefunktion $\tilde{\eta}$, so dass $\tilde{\eta} \equiv 1$ auf $\text{supp } \eta$ ist, und setzen $\eta \tilde{\eta} = \kappa$, dann erhalten wir

$$\kappa u = \tilde{\eta} cr^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + \tilde{\eta} v_{\text{reg}}. \quad (3.20)$$

Im Gebiet Ω ist die Lösung von (3.13) darstellbar als

$$\begin{aligned} u &= \kappa u + (1 - \kappa)u \\ &= \tilde{\eta} cr^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + u_{\text{reg}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hierbei ist $(1 - \kappa)u$ regulär nach der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnittes. Starten wir von der Darstellung (3.19), so erhalten wir im Gebiet eine äquivalente Darstellung

$$\begin{aligned} u &= \eta u - (1 - \eta)u \\ &= cr^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + \hat{u}_{\text{reg}}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

wobei $\hat{u}_{\text{reg}} = O(r^{\frac{2\pi}{\varphi_0}})$ aus $W^{2,2}(\Omega)$ ist. Der Koeffizient c charakterisiert, mit welcher Intensität die Singulärfunktion auftritt und wird Singulärkoeffizient genannt. In der linearen Elastizität heißt dieser Koeffizient verallgemeinerter Spannungsintensitätsfaktor, in der Bruchmechanik ($\varphi_0 = 2\pi$) wird er K -Faktor oder Spannungsintensitätsfaktor genannt. Er spielt bei Buchkriterien der linearen Elastizität eine Rolle. Der Koeffizient c kann auf verschiedene Arten berechnet werden. Wir beweisen eine Formel, die auf Mazya-Plamenevskii zurückgeht.

Lemma 20 (Koeffizientenformel) Der Koeffizient c in der Darstellung (3.22) kann durch die Formel

$$c = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} (f s_- + u \Delta s_-) \, dx \quad (3.23)$$

berechnet werden, wobei $f \in L_2(\Omega)$, $s_- = \eta r^{-\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin(-\frac{\pi}{\varphi_0})\varphi$ ist.

Beweis

Wir betrachten das Gebiet $\Omega \setminus \overline{B_\delta} = \Omega_\delta$, wobei B_δ eine Kugel mit dem Radius δ und dem Mittelpunkt 0 ist.

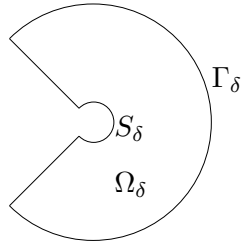


Abbildung 3.7: Das Gebiet Ω_δ

Dabei ist δ so klein, dass $\eta \equiv 1$ auf $\overline{B_\delta}$ ist. Im Gebiet Ω_δ wenden wir auf die Funktionen u , gegeben durch (3.22), und die Funktionen s_- die 2. Greensche Formel an:

$$\int_{\Omega_\delta} (\Delta u s_- - u \Delta s_-) \, dx = \int_{\partial\Omega_\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial n} s_- - u \frac{\partial s_-}{\partial n} \right) \, d\sigma \quad (3.24)$$

Es ist $\partial\Omega_\delta = \Gamma_\delta \cup S_\delta$, wobei Γ_δ ein Teil des Randes $\partial\Omega$ und S_δ ein Teil des Randes ∂B_δ ist (siehe Abbildung 3.7). Da s_- und u auf Γ_δ verschwinden, kann die rechte Seite von (3.24) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \int_{S_\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial n} s_- - u \frac{\partial s_-}{\partial n} \right) \, d\sigma &= -\delta \int_0^{\varphi_0} c \left[\left(\frac{\pi}{\varphi_0} \right) \delta^{\frac{\pi}{\varphi_0}-1} \sin \left(\frac{\pi}{\varphi_0} \right) \varphi + \dots \right] \left[\delta^{-\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \right] \, d\varphi \\ &- \delta \int_0^{\varphi_0} c \left[\delta^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + \dots \right] \left[\eta \frac{\pi}{\varphi_0} \delta^{-\frac{\pi}{\varphi_0}-1} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \right] \, d\varphi \\ &= -2c \frac{\pi}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \left(\sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi \right)^2 \, d\varphi \\ &+ \text{Ausdrücke mit positiven Potenzen von } \delta. \end{aligned}$$

Für $\delta \rightarrow 0$ erhalten wir für die rechte Seite von (3.24)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial n} s_- - u \frac{\partial s_-}{\partial n} \right) \, d\sigma = -2c \frac{\pi}{\varphi_0} \frac{\varphi_0}{2} = -c\pi.$$

Da $s_- \in L_2(\Omega)$ ist und $\Delta s_- = \Delta \left(\eta r^{-\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi} \right) \in L_2(\Omega)$ ist, erhalten wir die Formel (3.23). ■

In diesem einführenden Beispiel bleiben folgende Fragen offen.

- Haben wir durch den Ansatz alle Singulärterme erfasst ?
- Hat jede schwache Lösung die Darstellung (3.21) bzw. (3.22) ?
- Welche Voraussetzungen sind an die rechte Seite f zu stellen ?
- Kann dieses Vorgehen auf allgemeine elliptische Randwertprobleme übertragen werden ?

Diese Fragen werden durch die Arbeiten von [7], [12], [17], [18], [20] und [26] beantwortet. Wir folgen hier den Ausführungen von Kondratjev, der eine Mellintechnik zur Behandlung von elliptischen Randwertproblemen in Gebieten mit konischen Punkten entwickelt hat. Die Randwertprobleme werden dabei in gewichteten Sobolevräumen betrachtet. Um eine Einführung in diese Theorie zu geben, beginnen wir mit der Definition der Mellintransformation.

Mellintransformation und gewichtete Sobolevräume

In Abschnitt 1.4 hatten wir die Fouriertransformation für Funktionen $u \in L^1(\mathbb{R}^1)$ definiert

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Wir betrachten jetzt die sogenannte komplexe Fouriertransformation, in der $\xi = -\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, gesetzt wird und der Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ auftritt

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.25)$$

Die Mellintransformation der Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert als

$$\mathcal{M}[f](\alpha) = \tilde{f}(\alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} r^{-\alpha-1} f(r) dr, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (3.26)$$

Setzen wir $x = \ln r$ in (3.25) ein, dann folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\lambda} dx \\ &\stackrel{e^x=r}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\ln r) r^{-i\lambda-1} dr \\ &= \mathcal{M}[f(\ln r)](i\lambda) = \mathcal{M} \circ \mathcal{E}(f)(i\lambda), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{E}(f) = f(\ln r) = F(r)$ die Eulertransformation bezeichnet. Damit können wir den Zusammenhang zwischen der komplexen Fouriertransformation und der Mellintransformation ausdrücken:

$$\mathcal{F} = \mathcal{M} \circ \mathcal{E} \quad (3.27)$$

Ausgehend von den Eigenschaften für die komplexe Fouriertransformation erhalten wir für die Mellintransformation folgende Eigenschaften:

(M1) Sei $h = -\operatorname{Re} \alpha$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_h$ ist ein Isomorphismus zwischen den Räumen

$$\mathcal{M}_h : L^2_{2h-1}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \left| \int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2h-1} dr \right| < \infty \right\} \leftrightarrow L^2(-h + i\mathbb{R}).$$

(M2) Für ein festes $h = -\operatorname{Re} \alpha$ gilt die Parseval-Identität:

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 r^{2h-1} dr = \frac{1}{i} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Die inverse Mellintransformation ist durch

$$\mathcal{M}_h^{-1}[\tilde{f}](r) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} r^\alpha \tilde{f}(\alpha) d\alpha \quad (3.28)$$

gegeben.

(M3) Für die Ableitungen gilt

$$\mathcal{M}\left[\left(r \frac{d}{dr}\right)^k f\right](\alpha) = \alpha^k \mathcal{M}[f](\alpha) = \alpha^k \tilde{f}(\alpha). \quad (3.29)$$

(M4) Die Parseval-Identität für Ableitungen lautet:

$$\int_0^\infty \left| \left(r \frac{d}{dr} \right)^k \right|^2 r^{2h-1} dr = \frac{1}{i} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} |\alpha|^{2k} |\tilde{f}(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Warum die Mellin-Transformation für die Randwertprobleme im unendlichen Keil wichtig ist, sehen wir uns am einführenden Beispiel (3.14) an. Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten lautet

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = r^{-2} \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \\ &= r^{-2} \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Mellintransformation führt auf

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(r^2 \Delta u) &= \mathcal{M} \left[\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u(r, \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) \right] \\ &\stackrel{(M3)}{=} \alpha^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(\alpha, \varphi). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Diese Mellintransformierte Gleichung stimmt mit der Differentialgleichung in (3.16) überein, die wir durch den Ansatz $r^\alpha \Phi_\alpha(\varphi) = v(r, \varphi)$ gewonnen hatten. Betrachten wir die inhomogene Laplacegleichung

$$\Delta u = F \quad \text{in } K,$$

dann sollte die Mellintransformation

$$\mathcal{M}(r^2 \Delta u) = \mathcal{M}(r^2 F)$$

definiert sein. Beachten wir die Eigenschaften (M1) und (M2), so führt dies auf die Existenz der Integrale

$$\int_0^\infty r^{2h-1} |r^2 F(r)|^2 dr, \quad (3.31)$$

d.h. die rechte Seite F sollte sich in einem Sobolevraum mit einem Gewicht r^β befinden. Diese gewichteten Räume wurden von Kondratjev 1967 eingeführt und werden auch als Kondratjevräume bezeichnet.

Definition 34 Sei K ein unendlicher Kegel $K = \{(r, \varphi) : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < \varphi_0\}$ und

$$C_{\{0\}}^\infty = \{u \in C^\infty(\overline{K}) : \text{supp } u \text{ beschränkt, } \text{supp } u \cap \{0\} = \emptyset\}.$$

Der Raum $V_\beta^{k,p}(K)$ ist die Abschließung von $C_{\{0\}}^\infty(K)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{V_\beta^{k,p}(K)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_K |D^\alpha u(x)|^p |x|^{p(\beta-k+|\alpha|)} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Insbesondere ist $V_\beta^{0,p}(K) =: L_\beta^p(K)$.

Lemma 21 Ist $F \in L_\beta^2(K)$ mit $\beta = h + 1$, dann ist $r^2 F$ Mellintransformierbar, d.h. $\mathcal{M} = \mathcal{M}_h$ genügt (M2).

Beweis

$F \in L_\beta^2(K)$ bedeutet, dass

$$\int_K |x|^{2\beta} |F(x)|^2 dx < \infty$$

ist. Nun ist in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_K |x|^{2\beta} |F(x)|^2 dx &= \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty r^{2\beta} |F(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\varphi_0} \left(\int_0^\infty r^{2h-1} |r^2 F(r, \varphi)|^2 dr \right) d\varphi < \infty \end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^\infty r^{2h-1} |r^2 F(r, \varphi)|^2 dr < \infty.$$

■

Es gilt folgender Satz über die Lösbarkeit des Modellproblems

$$\begin{aligned} r^2 \Delta_{r,\varphi} u(r, \varphi) &= F(r, \varphi) && \text{in } K, \\ u(r, \varphi) &= 0 && \text{auf } \partial K. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Satz 22 Sei $F \in L_\beta^2(K)$ mit $\beta = h + 1$. Sind keine Eigenwerte α des Mellintransformierten Randwertproblems (3.28)

$$\begin{aligned} \alpha^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi) + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= 0 && 0 < \varphi < \varphi_0 \\ \tilde{u}(\alpha, 0) &= \tilde{u}(\alpha, \varphi_0) && = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

auf der Geraden $\operatorname{Re} \alpha = -h = -\beta + 1$, genau dann existiert eine Lösung $u_h \in V_\beta^{2,2}(K)$ des Randwertproblems (3.32). Weiterhin gilt, es gibt eine von u_h unabhängige positive Konstante c , so dass gilt

$$\|u_h\|_{V_\beta^{2,2}(K)} \leq c \|F\|_{L_\beta^2(K)}. \quad (3.34)$$

Beweisskizze

Nach Lemma 21 ist folgendes Vorgehen gerechtfertigt: Multiplikation der Differentialgleichung in (3.32) mit r^2 , Anwendung der Mellintransformation. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \alpha^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi) + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^2} &= \mathcal{M}(r^2 F)(\alpha, \varphi) && 0 < \varphi < \varphi_0 \\ \tilde{u}(\alpha, \varphi) &= 0 && \text{für } \varphi = 0, \varphi = \varphi_0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Wir führen den zum Randwertproblem (3.35) gehörigen Operator ein. Sei $I_{\varphi_0} = (0, \varphi_0)$, $r^2 \Delta_{r,\varphi} = L(r \partial r, \varphi, \partial \varphi)$, und

$$\begin{aligned} L(\alpha, \varphi, \partial \varphi) &: W^{2,2}(I_{\varphi_0}) \rightarrow L^2(I_{\varphi_0}), \\ &: \tilde{u} \rightarrow \alpha^2 \tilde{u} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Außerdem sei T der Spuroperator

$$T : W^{2,2}(I_{\varphi_0}) \rightarrow W^{\frac{3}{2},2}(\partial I_{\varphi_0}),$$

der in unserem Fall die Werte $u(0)$ und $u(\varphi_0)$ annimmt. Dann ist

$$A(\alpha) = (L(\alpha, \varphi, \partial\varphi), T) : W^{2,2}(I_{\varphi_0}) \rightarrow L^2(I_{\varphi_0}) \times W^{\frac{3}{2},2}(\partial I_{\varphi_0})$$

wohl definiert. $\{A(\alpha)\}_\alpha$ ist eine Familie von linearen stetigen Operatoren. In [2] wurde gezeigt, dass $A(\alpha)$ genau dann invertierbar ist, wenn α kein Eigenwert ist. In diesem Fall gelten a-priori Abschätzungen für Lösungen von $A(\alpha)\tilde{u} = \tilde{F}$. Wir bemerken weiterhin, dass das Spektrum des Operatorbündels $\{A(\alpha)\}$ nur aus abzählbar vielen Eigenwerten besteht. Nach Voraussetzung liegen auf der Geraden $\operatorname{Re} \alpha = -h$ keine Eigenwerte von $A(\alpha)$, d.h. $A^{-1}(\alpha)$ existiert dort. Die inverse Mellintransformation M_h^{-1} , die durch Formel (3.28) beschrieben wird, liefert uns die Lösung. Wir sehen uns die Abschätzung (3.34) an. Es ist

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{V_\beta^{2,2}(K)}^2 &= \int_K r^{2(\beta-2)} |u_h|^2 dx + \sum_{|\gamma|=1} \int_K r^{2(\beta-1)} |D^\gamma u_h|^2 dx \\ &+ \sum_{|\gamma|=2} \int_K r^{2\beta} |D^\gamma u_h|^2 dx \\ &\leq \operatorname{const} \left(\int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty r^{2\beta-3} |u_h(r, \varphi)|^2 dr d\varphi \right) \\ &+ \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty r^{2\beta-3} \left(\left| r \frac{\partial}{\partial r} u_h \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} u_h \right|^2 \right) dr d\varphi \\ &+ \int_0^{\varphi_0} \int_0^\infty r^{2\beta-3} \left(\left| \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u_h \right|^2 + \left| r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} u_h \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u_h}{\partial \varphi^2} \right|^2 \right) dr d\varphi \\ &\stackrel{2\beta-3=2h-1, (M4)}{\leq} \operatorname{const} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} \sum_{l+j \leq 2} |\alpha|^{2j} \int_0^{\varphi_0} \left| \frac{\partial^l \tilde{u}(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^l} \right|^2 d\varphi d\alpha \\ &\leq \operatorname{const} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} \left(|\alpha|^4 \|\tilde{u}\|_{L_2(I_{\varphi_0})}^2 + |\alpha|^2 \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \right\|_{L_2(I_{\varphi_0})}^2 \right) d\alpha \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\stackrel{[17]}{\leq} \operatorname{const} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} \|\mathcal{M}(r^2 F)\|_{L_2(I_{\varphi_0})}^2 d\alpha \quad (3.37)$$

$$\stackrel{(M4)}{=} \operatorname{const} \int_0^\infty \|r^2 F\|_{L_2(I_{\varphi_0})}^2 r^{2h-1} dr = \operatorname{const} \int_K |F|^2 |x|^{2\beta} dx.$$

$$= c \|F\|_{L_\beta^2(K)}^2.$$

Der entscheidende Schritt, um von (3.36) auf (3.37) zu kommen, beruht auf Resultaten von M.S. Agranowich/ M.I. Vishik (siehe [2],[3]) zur eindeutigen Lösbarkeit parameter-abhängiger elliptischer Randwertaufgaben, für die die obige Familie $A(\alpha)$ ein Beispiel ist (siehe Bemerkung zu a-priori Abschätzungen).

Darstellung der Lösung

Wir werden uns jetzt ansehen, wie wir zu der Entwicklung der Lösung in Singulär-und Regulärterm

$$v = v_{\text{sing}} + v_{\text{reg}}$$

des Modellproblems

$$\begin{aligned} \Delta v &= F && \text{in } K \\ v &= 0 && \text{auf } \partial K \end{aligned} \quad (3.38)$$

kommen. Dazu nehmen wir an, dass $F \in L_{2,\beta_1}(K)$ mit $\beta_1 \leq \beta$ ist, d.h. die rechte Seite ist glatter an der Spitze des Kegels. Wenn wir annehmen, dass keine Eigenwerte von $A(\alpha)$ auf der Geraden $\text{Re } \alpha = -h_1 = -\beta_1 + 1$ liegen, dann gibt es nach Satz 22 eine Lösung $u_{h_1} \in V_{\beta_1}^{2,2}(K)$. Die Verbindung zwischen der Lösung u_h und u_{h_1} liefert uns folgender Satz.

Satz 23 Sei $F \in L_{\beta}^2(K) \cap L_{\beta_1}^2(K)$, wobei $\beta_1 = h_1 + 1 \leq \beta = h + 1$ ist. Wir setzen voraus, dass $A(\alpha)$ keine Eigenwerte auf den Geraden

$$\text{Re } \alpha = -h = -\beta + 1 \quad \text{und} \quad \text{Re } \alpha = -h_1 = -\beta_1 + 1$$

besitzt. Dann gilt für eine Lösung von (3.38) $u_h \in V_{\beta}^{2,2}(K)$

$$u_h = \sum_{-h < \text{Re } \alpha < -h_1} c_i r^{\alpha_i} \Phi_i(\alpha_i, \varphi) + u_{h_1}, \quad (3.39)$$

$u_{h_1} \in V_{\beta_1}^{2,2}(K)$ und $\Phi_i(\alpha_i, \varphi) = \Phi_{\alpha_i}(\varphi)$ ist durch (3.17) definiert.

Beweisskizze

Die Lösung u_h kann als

$$u_h(r, \varphi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{-h-i\infty}^{-h+i\infty} r^{\alpha} A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha \quad (3.40)$$

dargestellt werden. Wir bemerken, dass die Eigenwerte von $A(\alpha)$ Pole von $A^{-1}(\alpha)$ sind. Wir berechnen das komplexe Integral (3.40) auf der Geraden $(-h - i\infty, -h + i\infty)$ als

Grenzwert (siehe Abbildung 3.8)

$$\begin{aligned}
 u_h &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{I_1(N)} r^\alpha A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha \right. \\
 &+ \int_{I_2(N)} r^\alpha A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha \\
 &+ \left. \int_{I_3(N)} r^\alpha A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha \right) \\
 &+ \sqrt{2\pi} \sum_j \text{Residuen}(\alpha_j) \text{ von } A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0].
 \end{aligned}$$

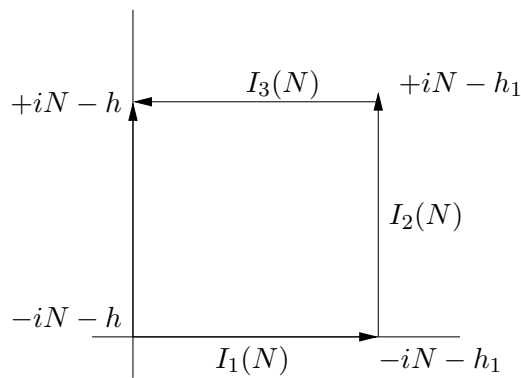


Abbildung 3.8: Integrationsweg

Man kann zeigen [17], dass $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_1(N)} r^\alpha A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha = 0$

und $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{I_3(N)} r^\alpha A^{-1}(\alpha) [\mathcal{M}(r^2 F), 0] d\alpha = 0$ sind. Damit wird

$$u_h = \sqrt{2\pi} \sum_j \text{Residuen}(\alpha_j) + u_{h_1}.$$

Wir überlegen, wie die Residuen (α_j) berechnet werden. Sei α_j ein Eigenwert von $A(\alpha)$. In unserer Modellaufgabe ist $\alpha_j = \frac{j\pi}{\varphi_0}$ ein einfacher Eigenwert. Daher ist α_j eine einfache Polstelle und

$$A^{-1}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - \alpha_j)} A_{-1} + A_0 + (\alpha - \alpha_j) A_1 + (\alpha - \alpha_j)^2 A_2 + \dots,$$

wobei A_{-1} die rechten Seiten $[\mathcal{M}(r^2 F), 0]$ in den Eigenraum von α_j abbildet. Außerdem kann gezeigt werden, dass $\mathcal{M}(r^2 F)$ eine holomorphe Funktion in dem endlichen Streifen $-h < \text{Re } \alpha < -h_1$ ist, und die Gestalt

$$\mathcal{M}(r^2 F)(\alpha, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(\varphi) (\alpha - \alpha_j)^l$$

hat. Daher ist in einer Umgebung α_j :

$$r^\alpha A^{-1}(\alpha)[\mathcal{M}(r^2 F), 0] = r^{\alpha_j} r^{\alpha - \alpha_j} \left[\frac{1}{\alpha - \alpha_j} A_{-1} + A_0 + \dots \right] \cdot [a_0(\varphi) + a_1(\varphi)(\alpha - \alpha_j)^1 + a_2(\varphi)(\alpha - \alpha_j)^2 + \dots, 0] \quad (3.41)$$

Da

$$r^{\alpha - \alpha_j} = e^{(\alpha - \alpha_j) \ln r} = 1 + \frac{(\alpha - \alpha_j) \ln r}{1!} + \frac{(\alpha - \alpha_j)^2 \ln^2 r}{2!} + \dots$$

erhalten wir als Koeffizient vor $\frac{1}{\alpha - \alpha_j}$ den Ausdruck

$$r^{\alpha_j} A_{-1}(\mathcal{M}(r^2 F), 0) = c_j r^{\alpha_j} \sin \frac{j\pi}{\varphi_0} \varphi.$$

Daraus folgt (3.39). ■

Bemerkung

Da im Keil

$$\eta u = \sum_{-h < \operatorname{Re} \alpha_i < -h_1} c_i r^{\alpha_i} \varphi_i(\alpha_j \varphi) + u_{h_1}$$

ist und damit $u_{h_1} = \mathcal{O}(r^\gamma)$, $\operatorname{Re} \gamma \geq -h_1 = -\beta_1 + 1$, ist, erhalten wir im Gebiet Ω

$$u = \eta u + (1 - \eta)u = \sum_{-h < \operatorname{Re} \alpha_i < -h_1} c_i r^{\alpha_i} \Phi_i(\alpha_i \varphi) + u_{h_1} + (1 - \eta)u.$$

Da $(1 - \eta)u$ in einer Umgebung des Eckpunkts verschwindet, ist

$$u_{\text{reg}} = u_h + (1 - \eta)u \in V_{\beta_1}^{2,2}(\Omega) \text{ und } u_{\text{reg}} = \mathcal{O}(r^\gamma).$$

Folgerung

Sei $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ ist. f ist ebenfalls in $L_1^2(\Omega)$ enthalten; es gilt nämlich dass

$$\|f\|_{L_1^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} r^2 |f|^2 dx \leq c \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

ist. Auf der Geraden $\operatorname{Re} \alpha = -h = -\beta + 1 = 0$, d.h. $\beta = 1$, befinden sich keine Eigenwerte von $A(\alpha)$. Daher existiert eine Lösung $u \in V_1^{2,2}(\Omega)$ von (3.42). Diese befindet sich auch in

$W^{1,2}(\Omega)$, da

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}^2 = c \sum_{|\gamma|=1} \int_{\Omega} |D^\gamma u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \quad (3.43)$$

$$\leq \text{const} \int_{\Omega} \left(r^{-2}|u|^2 + r^0 \sum_{|\gamma|=1} |D^\gamma u|^2 + r^2 \sum_{|\gamma|=2} |D^\gamma u|^2 \right) dx \quad (3.44)$$

$$= \text{const} \|u\|_{V_1^{2,2}(\Omega)}^2. \quad (3.45)$$

Hier wurde benutzt, dass $1 \leq cr^{-2}$, also $r^2 \leq c$ ist. Weiterhin ist $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Der Spursatz (Satz 19) liefert schließlich, dass $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ ist. Da die Lösung $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$ eindeutig ist, muss $u \in V_1^{2,2}(\Omega)$ sein.

Wir betrachten jetzt die Gerade $\text{Re } \alpha = -h_1 = 0 + 1 = 1$, d.h. $\beta = 0$. Diese Gerade enthält keine Eigenwerte für $\varphi_0 \neq \pi$. Daher gilt nach Satz 23: Die schwache Lösung $u \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega) \cap V_1^{2,2}(\Omega)$ hat die Darstellung

$$u = c_1 r^{\frac{\pi}{\varphi_0}} \sin \frac{\pi}{\varphi_0} \varphi + u_{\text{reg}}, \quad (3.46)$$

wobei $u_{\text{reg}} \in V_0^{2,2}(\Omega)$ ist. Aus (3.46) folgt, dass

$$u \in W^{1,p}(\Omega), p < \frac{2}{1 - \frac{\pi}{\varphi_0}}$$

ist. Der schlechteste Fall ist $p = 4$ ($\varphi_0 = 2\pi - \varepsilon$). Außerdem kann man zeigen, dass $u \in V_{1 - \frac{\pi}{\varphi_0} + \varepsilon}^{2,2}(\Omega)$ und $u \in W^{1 + \frac{\pi}{\varphi_0} - \varepsilon, 2}(\Omega)$ ist.

Allgemeine Randwertprobleme

Bisher hatten wir uns auf unser Beispiel, das Dirichletproblem für den Laplaceoperator beschränkt. Wir charakterisieren jetzt allgemeinere Randwertprobleme, die mit der Mellintechnik behandelt werden können.

Elliptische Randwertprobleme in glatten Gebieten

Wir führen zunächst den Begriff eines linearen elliptischen Randwertproblems in glatten Gebieten ein.

Sei

$$L(D_x) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha D_x^\alpha \quad (3.47)$$

ein homogener linearer Differentialoperator im \mathbb{R}^n , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ist ein Multiindex, l ist die Ordnung von L , $D_x = -i\partial_x$, $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, $D_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Definition 35 L ist elliptisch, falls $L(\xi) = \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \neq 0$ für $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Beispiel

$$\begin{aligned} L(D_x) &= -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\ L(\xi) &= |\xi|^2 \end{aligned}$$

Bemerkung

Für $n \geq 3$ folgt aus der Elliptizität, dass $l = 2m$ ist, d.h. die Ordnung ist gerade.

Wir definieren jetzt die Elliptizität für eine allgemeinere Klasse von Differentialoperatoren.

Definition 36 Der Operator $\mathcal{L}(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ mit Koeffizienten $a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist elliptisch in $\bar{\Omega}$, falls die Hauptterme mit eingefrorenen Koeffizienten

$$L(x_0, D_x) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x_0) D_x^\alpha$$

elliptisch für alle Punkte $x_0 \in \bar{\Omega}$ sind.

Um Randwertprobleme zu beschreiben, müssen wir Differentialrandoperatoren einführen. Deren Eigenschaften werden in lokalen Koordinaten beschrieben. Wir betrachten glatte, beschränkte Gebiete im \mathbb{R}^2 , d.h. in jedem Randpunkt existiert ein Normalen- und Tangentenvektor; x_τ bzw. x_ν bezeichnen die entsprechenden Koordinaten.

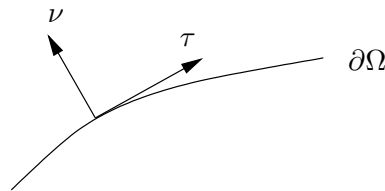


Abbildung 3.9: Normalen- und Tangentenvektor

Es werden tubulare Koordinaten $x = (x_\tau, x_\nu) \in \partial\Omega \times (-1, 1)$ eingeführt. Der Randpunkt $y \in \partial\Omega$ ist beschrieben durch $y = (x_\tau, 0)$. Die Randoperatoren $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ haben die Gestalt

$$\mathcal{B}_i(y, D) = \sum_{|\beta| \leq m_i} b_\beta(y, D_\tau) D_\nu, \quad m_i \leq 2m - 1,$$

ihre Hauptterme mit eingefrorenen Koeffizienten $y_0 \in \partial\Omega$ sind:

$$B_i(y_0, D) = \sum_{|\beta|=m_i} b_\beta(y_0, D_\tau) D_\nu.$$

Definition 37 Das Tupel von Operatoren

$$\{\mathcal{L}(y, D), \mathcal{B}_1(y, D), \dots, \mathcal{B}_m(y, D)\} \quad y \in \partial\Omega$$

genügt einer Shapiro-Lopatinski Bedingung in $y_0 \in \partial\Omega$, wenn das folgende Anfangswertproblem für alle $\xi_\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nur die triviale Lösung besitzt.

$$\begin{aligned} L(y_0, \xi_\tau; -i \frac{\partial}{\partial z}) w(z) &= 0 \quad \text{für } z > 0 \\ B_i(y_0, \xi_\tau; -i \frac{\partial}{\partial z}) w(z) &= 0 \quad \text{für } z = 0, i = 1, \dots, m \\ |w(z)| &\rightarrow 0 \quad \text{für } z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Hier wurde $\frac{\partial}{\partial \nu} = -i \frac{\partial}{\partial z}$ gesetzt, L und B_i bezeichnen die Hauptteile von \mathcal{L} und \mathcal{B}_i in den lokalen Koordinaten (ν, t) .

Beispiel

Wir betrachten das Dirichletproblem für den Laplaceoperator im \mathbb{R}^2 :

$$L\left(y_0, \xi_\tau, -i \frac{\partial}{\partial z}\right) w(z) = (\xi_\tau)^2 w(z) - \frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = 0 \quad \text{für } z > 0 \quad (3.48)$$

$$w(0) = 0 \quad (3.49)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |w(z)| = 0. \quad (3.50)$$

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.48) lautet

$$w(z) = c_1 e^{\xi_\tau z} + c_2 e^{-\xi_\tau z}.$$

Die Randbedingung $w(0) = c_1 + c_2 = 0$ und die Abklingbedingung (3.50) liefern $w(z) \equiv 0$.

Wir sind jetzt in der Lage, elliptische Randwertprobleme zu definieren.

Definition 38 Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, D)u(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \\ \mathcal{B}_i(y, D)u(y) &= g_i(y) \quad \text{für } y \in \partial\Omega, i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.51)$$

wird elliptisch genannt in $\overline{\Omega}$, falls gilt

- 1.) der Operator $\mathcal{L}(x, D)$ ist elliptisch für alle $x \in \overline{\Omega}$.
- 2.) das Tupel $(\mathcal{L}(x, D), \mathcal{B}_1(y, D), \dots, \mathcal{B}_m(y, D))$ genügt für alle $y \in \partial\Omega$ der Shapiro-Lopatinski Bedingung.

Für elliptische Randwertprobleme gilt in glatten Gebieten folgendes grundlegende Resultat.

Satz 24 (Hauptsatz) [36, S.189, Satz 13.1]

Sei Ω ein beschränktes C^∞ -Gebiet in \mathbb{R}^n . Folgende drei Aussagen sind äquivalent.

(i) Das Randwertproblem (3.51) ist elliptisch.

(ii) Der Operator

$$(\mathcal{L}(x, D), B(y, D), D) : W^{2m,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times \prod_{i=1}^m W^{2m-m_i-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$$

ist ein Fredholmoperator.

(iii) Für $u \in W^{2m,2}(\Omega)$ gilt die a priori Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2m,2}(\Omega)} &\leq (\|\mathcal{L}(x, D)u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^m \|\mathcal{B}_i(y, D)u\|_{W^{2m-m_i-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \\ &\quad + \|u\|_{W^{2m-1,2}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Elliptische Randwertprobleme in Gebieten mit einem Eckpunkt

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 mit einem Eckpunkt O (siehe Abbildung 3.10).

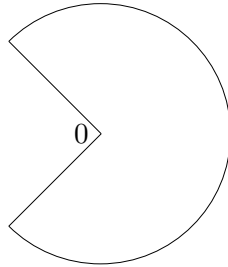


Abbildung 3.10: Gebiet mit einspringender Ecke

Definition 39 Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, D)u(x) &= f(x) \quad \text{für } x \in \Omega \\ \mathcal{B}_i(y, D)u(y) &= g_i(y) \quad \text{für } y \in \partial\Omega \setminus \{O\}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.52}$$

ist elliptisch, falls

(i) der Operator $\mathcal{L}(x, D)u(x)$ elliptisch in $\bar{\Omega}$ ist,

(ii) das Tupel $(\mathcal{L}(y, D), \mathcal{B}_1(y, D), \dots, \mathcal{B}_m(y, D))$ für alle $y \in \partial\Omega \setminus \{O\}$ der Shapiro-Lopatinski Bedingung genügt.

Satz 25 (Hauptsatz) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ und das Randwertproblem (3.52) sei elliptisch. Auf der Geraden $\operatorname{Re} \alpha = -\beta + 1 = -h$ befinde sich kein Eigenwert des Mellintransformierten Eigenwertproblems, das aus den Hauptteilen der Operatoren mit in O eingefrorenen Koeffizienten gewonnen wird. Dann ist der Operator

$$(\mathcal{L}(x, D), \mathcal{B}_1(y, D), \dots, \mathcal{B}_m(y, D)) : V_\beta^{2m,2}(\Omega) \rightarrow L_\beta^2(\Omega) \times \prod_{i=1}^m V_\beta^{2m-m_i-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$$

ein Fredholmoperator. Es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{V_\beta^{2m,2}(\Omega)} \leq c \left(\|\mathcal{L}(x, D)u\|_{L_\beta^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^m \|\mathcal{B}_i u\|_{W^{2m-m_i-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} + \|u\|_{V_\beta^{2m-1,2}(\Omega)} \right).$$

Weiterhin gilt der

Satz 26 (Regularitätssatz) Seien β und $\beta_1, \beta_1 \leq \beta$, reelle Zahlen mit $0 \leq \beta - \beta_1 \leq 1$. Das Randwertproblem (3.52) sei elliptisch. Wir nehmen an, dass sich auf den Geraden $\operatorname{Re} \alpha = -\beta + 1 = -h$ und $\operatorname{Re} \alpha = -\beta_1 + 1 = -h_1$ kein Eigenwert des Mellintransformierten Eigenwertproblems, das aus den Hauptteilen der Operatoren mit in O eingefrorenen Koeffizienten gewonnen wird, befindet. Weiterhin sei $f \in L_{\beta_1}^2(\Omega)$, $g_i \in V_{\beta_1}^{2m-m_i-\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $i = 1, \dots, m$. Eine Lösung $u \in V_\beta^{2m}(\Omega)$ kann dargestellt werden als

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma u_\gamma(r, \varphi) + u_{\text{reg}},$$

wobei $u_{\text{reg}} \in V_{\beta_1}^{2m}(\Omega)$ ist. Hierbei ist $\gamma = (\mu, \sigma, \kappa)$ ein Multiindex und

$$\Gamma = \{(\mu, \sigma, \kappa) : \mu = 1, \dots, N, \sigma = 1, \dots, I_\mu, \kappa = 0, \dots, \kappa_{\mu\sigma} - 1\}$$

$$u_\gamma = r^{\alpha\mu} \sum_{q=0}^{\kappa} \frac{1}{q} (\ln r)^q u_\mu^{k-q, \sigma}(\varphi).$$

N bezeichnet die Anzahl der Eigenwerte im Streifen $-h < \operatorname{Re} \alpha < -h_1$, I_μ ist die Dimension des Eigenraumes von $\alpha\mu$, $\kappa_{\mu\sigma}$ ist die Länge der entsprechenden Jordanketten, c_γ sind Konstanten.

Index

- Ableitung, 10
 - Schwache, 12
- abzählbares System von Normen, 17
- Cauchysches Anfangswertproblem, 67
 - für die Wellengleichung, 79
- d'Alembertsche Formel, 80
- dicht, 19
- direkter Wert, 63
- Dirichletproblem, 60
- Distribution
 - Differentiation einer, 25
 - Dirac, 23
 - endlicher Ordnung, 22
 - reguläre, 25
 - temperierte, 43
 - Träger einer, 25
 - Translation einer, 38
- Ehrenpreis, 39
- elliptischer Operator L , 116
- Faltung, 31
- Fortsetzungssatz, 100
- Fouriertransformation, 43
- Fundamentallösung, 39
 - der Wärmeleitungsgleichung, 67
 - der Wellengleichung, 72
 - des Laplace-Operators, 55
- Fundamentallösungen
 - Eigenschaften der, 76
- Funktional, 21
- Gebiet, 10
- Grannorm, 100
- Greensche Formel
 - erste, 63
 - zweite, 28, 57
- Greensche Funktion, 60
- Greenscher Darstellungssatz, 57
- Hadamardsche Absteigemethode, 75
- Helmholtz-Gleichung, 41
- Kegel
 - unendlicher, 105, 110
- Kegeleigenschaft, 92
- Kirchhoffsche Formel, 81
- Koeffizientenformel, 107
- Kondratjev, 110
- Lemma von Du Bois-Reymond, 13
- Mellintransformation, 108
- Methode
 - direkte, 65
 - indirekte, 63
- Modellproblem, 111
- Multiindex, 10
- Neumannproblem, 61
- Ortner, 39
- Parseval-Identität, 109
- partielle Differentialgleichungen
 - lineare, 38
- Partielle Integration, 11
- Poisson Formel, 81
- Polygone, 104
- Potential
 - der doppelten Schicht, 57, 60, 65
 - der einfachen Schicht, 57, 65
 - Newtonsches Volumen-, 57, 60
 - Retardiertes, 85
 - Wärme-, 69
- quadratisches Rand-Eigenwertproblem, 105
- Randdatum $\frac{\partial w}{\partial n}$, 98

Randintegralgleichungen, 63
 Randwertprobleme, 56
 elliptische, 116, 118
 Raum \mathcal{D} , 17
 Raum \mathcal{D}' , 21
 Raum \mathcal{E} , 30
 Raum $\mathcal{E}_M(\mathbb{R}^n)$, 35
 Raum \mathcal{S}' , 47
 Raum \mathcal{S} , 46
 Raum $W^{k,p}(\Omega)$, 93
 Raum $C^k(\Omega)$, 10
 Raum $C^k(\overline{\Omega})$, 10
 Raum $C_0^\infty(\Omega)$, 12
 Raum $E_\Delta(V, V')$, 100
 Raum $W^{-k,p}(\Omega)$, 91
 Raum $W^{k,p}(\Omega)$, 91
 Raum $W^{s,p}(\Omega)$, 93
 Regulärterm, 113
 Regularisierung, 24
 Hadamard'sche, 24
 Regularitätssatz, 120

 schnell fallend, 46
 schwache Formulierung
 des Dirichletproblems, 104
 schwacher Konvergenzbegriff, 21
 Segment-Eigenschaft, 92
 Shapiro-Lopatinski Bedingung, 118
 Singulärterm, 113
 Sobolevräume
 gewichtete, 108
 Spannungsintensitätsfaktor, 106
 Spuroperator, 98, 112
 Spurraum, 98
 Spursatz, 99
 Streifenbedingung, 36
 System von Seminormen, 46

 Tensorprodukt, 31

 Umkehrformel, 44

Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. Academic Press. INC, Boston, 1978.
- [2] Agranovich, M.S. *Elliptic Boundary Problems* in Encyclopedia of Mathematical Science, Vol. 79. Partial Differential Equations IX, 2–143, 1997.
- [3] Agranovich, M.S., Visik, M.I. *Elliptische Randwertaufgaben, die von einem Parameter abhängen* Dohlady Akademii Nauk SSSR, Band 149, Nr.2, 223–227, 1963.
- [4] Al-Gwaiz, M. A. *Theory of Distributions*. New York: Marcel Dekker, 1992.
- [5] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt: Harri Deutsch, 1970.
- [6] Costabel, M. *Boundary integral operators on Lipschitz domains*. In: J. Math. Anal. 19, 1988, S. 613–626.
- [7] Dauge, M. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains. Smoothness and Asymptotic Expansion*. vol. 1341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1988.
- [8] Ehrenpreis, L. *Solution of some problems of division I*. In: Am. J. Math. 76, 1954, S. 883–903.
- [9] Fichtenholz, G. M. *Kurs der Differential- und Integralrechnung II*. Moskau, 1969.
- [10] Friedrichs, K. *On differential operators in Hilbert spaces*. In: Am. J. Math. 61, 1939, S. 523–544.
- [11] Gelfand, I. M.; Šilov, G. E. *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. Band I–IV. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964.
- [12] Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, 1985.
- [13] Heuser, H. *Funktionalanalysis*. Stuttgart: Teubner, 1986.
- [14] Hörmander, L. *Linear Partial Differential Operators*. Berlin: Springer, 1969.
- [15] Kadlec, J.; Kufner, A. *Fourier Series*. Prag: Academia, 1971.
- [16] Krein, S. G. *Linear Equations in Banach Spaces*. Birkhäuser, 1982.
- [17] Kondrat'ev, V.A. *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*. *Trans. Moscow Math. Soc.* 10 (1967), 227 - 313.

- [18] Kozlov, V.A., Maz'ya, V.G., and Rossmann, J. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Point Singularities*. American Mathematical Society, 1997.
- [19] Kufner, A.; John, O.; Fučík. *Function Spaces*. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977.
- [20] Mazya, V.G., Plamenevsky, B.A.; *The coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems with conical points*. *Mathematische Nachrichten* 76, S. 29-60, 1977.
- [21] Maz'ya, V.G., Nazarov, S.A. *Asymptotics of energy integrals under small perturbations of the boundary close to angular and conic points*. *Tr. Mosk. Math. O. va* 50, 1987, S. 79–129.
- [22] McLean, W. *Strong Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*. Cambridge University Press, 2000.
- [23] Meyers, V.; Serrin, J. $H=W$. In: *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 51, 1964, S. 1055–1056.
- [24] Miranda, C. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. o.O: o.V, 1955.
- [25] Nečas, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Prag: Academia, 1967.
- [26] Nazarov, S.A., Plamenevsky, B.A. *Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [27] Plis, A. *A smooth linear elliptic differential equation without any solutions in a sphere*. In: *Comm. Pure Appl. Math.* 14, 1961, S. 599–617.
- [28] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw–Hill, 1966.
- [29] Schwartz, L. *Théorie des distributions*. Vols. I–II. Paris, 1950–1951.
- [30] Schwartz, L. *Mathematische Methoden der Physik I*. Zürich: Bibliografisches Institut, 1974.
- [31] Schwartz, L. *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions*. In: *C.R. Acad. Sci. Paris*, 239, 1954, S.847–848.
- [32] Sobolev, S. L. *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*. In: *Math. Collection (Math. Sb)*, 1(43), 1936, S. 39–72.
- [33] Triebel, H. *Höhere Analysis*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.
- [34] Vladimirov, V. S. *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker, 1971.
- [35] Walter, W. *Einführung in die Theorie Distributionen*. Mannheim:Wissenschaftsverlag, 1994.
- [36] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner Verlag, 1982.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn stud. math./phys. Markus Daub für das Schreiben und Überarbeiten des Textes, sowie für das Erstellen des Layouts und der Graphiken bedanken.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

E-Mail: saendig@ians.uni-stuttgart.de

WWW: <http://ians.uni-stuttgart.de/~saendig/>

Erschienenene Preprints ab Nummer 2005/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2005/001 *Nicaise, S., Sändig, A.-M.*: Dynamical crack propagation in a 2D elastic body. The out-of plane state.
- 2005/002 *S. Hübner, A. Matei, B.I. Wohlmuth*: A mixed variational formulation and an optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity
- 2005/003 *Sändig, A.-M.*: Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Vorlesung im Wintersemester 2004/2005