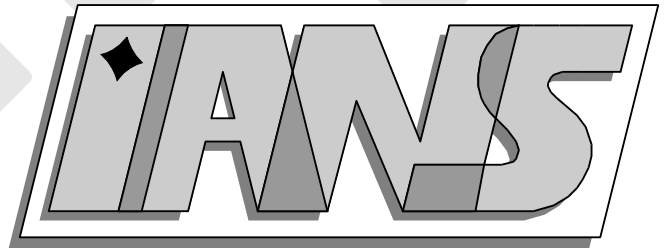


**Universität
Stuttgart**



**Mathematische Methoden in der Kontinuumsmechanik
Vorlesung im Sommersemester 2005**

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Universität Stuttgart

Mathematische Methoden in der Kontinuumsmechanik
Vorlesung im Sommersemester 2005

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

**Berichte aus dem Institut für
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2005/008

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de

WWW: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.
IANS-Logo: Andreas Klimke. \LaTeX -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Einige Elemente der Vektor- und Tensoranalysis	9
1.1 Kurzer Rückblick in die lineare Algebra	9
1.2 Tensoren	17
1.3 Fréchet-Ableitungen	19
1.4 Integration	30
2 Deformation und Bewegung	35
2.1 Deformationen	35
2.2 Bewegungen	43
3 Erhaltungsgleichungen	53
3.1 Massenerhaltung und die Kontinuitätsgleichung	53
3.2 Momentenerhaltung und Bewegungsgleichungen	56
3.3 Energieerhaltungsgleichungen	67
3.4 Entropieprinzip	72
4 Elastostatik	75
4.1 Momenten-Gleichgewicht im stationären Fall	75
4.2 Elastische Materialien	82
4.3 Das linearisierte Elastizitätsproblem	96
5 Hyperelastische Materialien	109

Einleitung

Die vierstündige Vorlesung MATHEMATISCHE METHODEN IN DER KONTINUUMSMECHANIK, die durch zweistündige Übungen ergänzt wurde, wurde im Sommersemester 2005 am Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart gehalten. Sie wendete sich an Mathematikstudenten im Hauptstudium, die ihr Wissen auf dem Gebiet der angewandten Mathematik vervollständigen wollten.

Dieser Kurs verfolgte zwei Ziele: einerseits sollten Kenntnisse über die Analysis von Funktionen mehrerer Veränderlicher sowie der entsprechenden Integralsätze vertieft und andererseits deren grundlegende Rolle in der Kontinuumsmechanik demonstriert werden. Es sollte gezeigt werden, dass reine und angewandte Mathematik durchaus eine Einheit bilden und sich gegenseitig befruchten.

In der Kontinuumsmechanik wird das Verhalten von Strömungen und Festkörpern mit Hilfe von Vektor- und Tensorfeldern in einem kontinuierlichen Medium beschrieben. In dieser Vorlesung stand die mathematische Herleitung von Grundgleichungen der Strömungs- und Festkörpermechanik im Vordergrund. In diesem Kontext kann man die Vorlesung teilweise auch als Beitrag zur Mathematischen Modellierung von Problemen der Kontinuumsmechanik werten.

Das vorliegende Vorlesungsskript beginnt mit einem Kapitel zur Vektor- und Tensoranalysis. Neben einem kurzen Rückblick in die lineare Algebra, in dem eine gezielte Auffrischung von Definitionen und Zusammenhängen angestrebt wird, werden Tensoren eingeführt. Daran schließen sich Elemente der Differential- und Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlicher an.

Im zweiten Kapitel werden zulässige Deformationen und Bewegungen als C^1 -Abbildungen definiert, kinematische Grundbegriffe eingeführt, kinematische Relationen bewiesen sowie die Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise erläutert. Das Kapitel endet mit dem Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems.

Im dritten Kapitel werden Bewegungsgleichungen der Strömungsmechanik mathematisch hergeleitet und ihr Gültigkeitsbereich diskutiert. Dabei wird von integralen Erhaltungssätzen ausgegangen und mit Hilfe des Reynoldsschen Transporttheorems entsprechende Differentialgleichungen gewonnen. Der Cauchysche Spannungssatz, Navier-Stokes-Gleichungen sowie Gasgleichungen werden behandelt. Bemerkungen zum Entropieprinzip runden dieses Kapitel ab.

Das vierte Kapitel ist der Elastostatik gewidmet. Aufbauend auf den Überlegungen des dritten Kapitels werden Spannungs- und Gleichgewichtsbeziehungen gewonnen. Elastische Materialien werden mit Hilfe konstitutiver Beziehungen beschrieben. Hierbei steht die axiomatische Betrachtungsweise im Vordergrund. Schließlich wird ein linearisiertes Elastizitätsproblem (Randwertproblem für die Lamé-Gleichungen) hergeleitet und seine Lösbarkeit diskutiert.

Im letzten Kapitel werden hyperelastische Materialien eingeführt. Die Existenz von Minimierern von Energien mit konvexen bzw. polykonvexen elastischen Energiedichten wird diskutiert.

Stuttgart, im August 2005

Anna–Margarete Sändig

Kapitel 1

Einige Elemente der Vektor- und Tensoranalysis

In der linearen Algebra werden lineare Vektorräume eingeführt und das Rechnen mit Vektoren und Matrizen ausführlich diskutiert. Wir führen hier nur einige Bezeichnungen ein und wiederholen einige Begriffe und Aussagen der linearen Algebra, die wir im Folgenden benötigen.

1.1 Kurzer Rückblick in die lineare Algebra

Die Räume \mathbb{R}^n , \mathbb{E}^n

Der Raum \mathbb{R}^n

Als \mathbb{R}^n bezeichnen wir den linearen Raum aller geordneten n -Tupel reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \mid x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}.$$

Wird in \mathbb{R}^n eine Norm eingeführt, so sprechen wir vom normierten Raum \mathbb{R}^n . Die Norm ist eine Abbildung $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, die den Normaxiomen genügt:

$$(N1) \quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} \geq 0, \quad \|x\|_{\mathbb{R}^n} = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\|_{\mathbb{R}^n} = |\lambda| \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$(N3) \quad \|x + y\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} + \|y\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Der Raum \mathbb{E}^n

Wir sprechen vom euklidischen Raum $\mathbb{E}^n = \mathbb{R}^n$, falls die Norm im \mathbb{R}^n die euklidische Norm ist:

$$\|x\|_{\mathbb{E}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Im euklidischen Raum \mathbb{E}^n ist ein Skalarprodukt definiert: $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \cdot y = (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|x\|_{\mathbb{E}^n} = \sqrt{(x, x)}.$$

Basis im \mathbb{R}^n

Eine Basis im \mathbb{R}^n ist eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren. Die Standardbasis besteht aus den Einheitsvektoren $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, wobei die 1 an der i -ten Stelle steht. Eine lineare Transformation der Standardbasis in eine andere Basis kann wie folgt realisiert werden.

Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis, $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ eine weitere Basis. Ein Element $x \in \mathbb{R}^n$ hat die Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n y_i w_i = H_B y,$$

wobei H_B die $n \times n$ Matrix ist, die aus den Spaltenvektoren w_1, \dots, w_n besteht. Damit ist

$$\begin{aligned} x &= H_B y & ; & \quad w_i = H_B e_i \\ y &= H_B^{-1} x & ; & \quad e_i = H_B^{-1} w_i. \end{aligned}$$

Ist B eine Basis aus orthonormalen Vektoren, dann ist $H_B^{-1} = H_B^T$.

Bemerkung:

Wenn nicht anders bemerkt, werden wir im folgenden in der Standardbasis rechnen.

Lineare Abbildungen:

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kann mit Hilfe eines Vektors $a \in \mathbb{R}^n$ realisiert werden:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j = a \cdot x.$$

Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann mit Hilfe einer Matrix dargestellt werden:

$$f(x) = Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}_{i=1, \dots, n}.$$

Der Vektor a und die Matrix A hängen von der Wahl der Basis ab. Existiert eine orthonormierte Basis im \mathbb{R}^n , die nur aus Eigenvektoren einer Matrix A besteht, dann wird A bezüglich dieser Basis Diagonalform besitzen. Genauer,

$$D = H^{-1} A H = H^T A H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei λ_i die nicht notwendig voneinander verschiedenen Eigenwerte von A und die Spalten von H die entsprechenden orthonormierten Eigenvektoren sind. Diese Transformation wird Hauptachsentransformation genannt.

Kreuzprodukt

Wir erinnern weiter an das Kreuzprodukt im \mathbb{E}_3

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Es ist $u \times v = -v \times u, u \times u = 0$ und

$$|(u \times v) \cdot w| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \text{Vol}(u, v, w)$$

das Volumen das von den Vektoren u, v, w aufgespannten Parallelepipeds.

Der Raum der Matrizen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^{n \times n}$ den linearen Raum der Matrizen vom Format $n \times n$:

$$\mathbb{R}^{n \times n} = \{A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{R}^{n \times n}$ kann ebenfalls eine Norm eingeführt werden, z.B.

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{oder} \quad \|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Die euklidische Norm (Frobenius Norm) lautet in diesem Fall

$$\|A\|_{\mathbb{E}^{n \times n}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$$

und das Skalarprodukt ist durch

$$A : B = (A, B) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$$

definiert.

Das Produkt zweier Matrizen ist als Hintereinanderausführung der entsprechenden linearen Abbildungen

$$AB = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = c_{ik} \right)_{i,k=1,\dots,n}$$

definiert. Eine Matrix A ist symmetrisch, falls

$$A = A^\top;$$

A ist schief-symmetrisch, falls

$$A = -A^\top.$$

Jede Matrix ist die Summe einer symmetrischen Matrix S und einer schief-symmetrischen Matrix W :

$$A = S + W.$$

Man setze $S = \frac{1}{2}(A + A^\top), W = \frac{1}{2}(A - A^\top)$.

Dies ist eine orthogonale Zerlegung, d.h.

$$S : W = 0.$$

Das Tensorprodukt zweier Vektoren erzeugt eine Matrix

$$A = a \otimes b = (a_i b_j)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Es gilt

$$(a \otimes b)^\top = (b \otimes a),$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = I.$$

Die Spur einer Matrix ist die Summe der Diagonalelemente

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(a \otimes b) &= a \cdot b, \\ \operatorname{tr}(A^\top B) &= A : B, \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eine Matrix Q ist orthogonal, falls

$$Qa \cdot Qb = a \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Eine hinreichende und notwendige Bedingung ist

$$QQ^\top = Q^\top Q = I$$

bzw.

$$Q^\top = Q^{-1}.$$

Eine orthogonale Matrix mit positiver Determinante wird Rotation R genannt. Eine Matrix A ist positiv definit, falls

$$a \cdot Aa > 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0.$$

Spektralsatz, Polare Zerlegung, Satz von Cayley-Hamilton

Die komplexe Zahl λ ist ein Eigenwert der Matrix A , falls ein nichttrivialer Vektor $v \in \mathbb{C}^n$ existiert, so dass

$$Av = \lambda v$$

ist. v wird Eigenvektor zum Eigenwert λ genannt und es wird häufig angenommen, dass $\|v\|_{\mathbb{C}^n} = 1$ ist.

Als Eigenraum \mathbb{E}_λ bezeichnet man den linearen Raum

$$\mathbb{E}_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\}.$$

Die Dimension $\operatorname{Dim}(\mathbb{E}_\lambda) = m$ bezeichnet man als „geometrische“ Vielfachheit von λ .

Es gilt:

- Eigenwerte von symmetrischen Matrizen sind reell,
- Eigenwerte von positiv definiten Matrizen sind reell und positiv,
- Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten von symmetrischen Matrizen sind orthogonal.

Satz 1 (Spektralsatz, Hauptachsentransformation und Entwicklung) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix mit dem Eigensystem $\{\lambda_i, v_i\}_{i=1, \dots, n}$, $\|v_i\|_{\mathbb{E}^n} = 1$. Das System der Eigenvektoren bildet eine orthogonale Basis im \mathbb{E}^n . In Bezug auf diese Basis kann A als Diagonalmatrix D dargestellt werden:

$$D = Q^T A Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \otimes v_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist Q eine orthogonale Matrix, deren Spalten die Basisvektoren v_i sind. Die Vektoren v_i heißen Hauptachsen, die obige Transformation Hauptachsentransformation. Weiterhin gilt: $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i$, wobei $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ ist, d.h. A wirkt wie eine Überlagerung von Streckungen in den Eigenrichtungen. Liegt eine orthonormale Basis von Eigenvektoren vor, dann ist $Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i$.

Quadratwurzeln aus Matrizen

Satz 2 Sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix U , die positiv definit und symmetrisch ist, so dass

$$U^2 = S$$

ist.

Wir schreiben $U = +\sqrt{S} = \sqrt{S}$.

Beweis

Wir zeigen zunächst die Existenz. Wir nehmen vorerst an, dass S in der Basis der Eigenvektoren gegeben ist:

$$S = \sum_i \lambda_i v_i \otimes v_i.$$

Wir setzen

$$U = \sum_i \sqrt{\lambda_i} v_i \otimes v_i.$$

Damit ist $U^2 = S$.

Wir sehen uns nun die Eindeutigkeit an. Wir nehmen an, es gäbe zwei symmetrische, positiv definite Matrizen U und V mit $U^2 = V^2 = S$.

Für das Eigenpaar $\{\lambda, v\}$ von S gilt:

$$0 = (S - \lambda I)v = (U^2 - \lambda I)v = (V^2 - \lambda I)v.$$

Wir betrachten U (für V gelten analoge Rechnungen). Es ist:

$$0 = (U^2 - \lambda I)v = (U + \sqrt{\lambda}I)(U - \sqrt{\lambda}I)v = (U + \sqrt{\lambda}I)\tilde{v}$$

mit $\tilde{v} = (U - \sqrt{\lambda}I)v$.

Daher ist

$$Uv = -\sqrt{\lambda}\tilde{v}.$$

U ist positiv definit und $-\sqrt{\lambda}$ kann kein Eigenwert sein. Folglich ist $\tilde{v} = 0$, d.h.

$$Uv = \sqrt{\lambda}v.$$

Ebenso ist

$$Vv = \sqrt{\lambda}v$$

für alle Eigenpaare $\{\lambda, v\}$ von S . Nach dem Spektralsatz bilden die Eigenvektoren eine Basis im \mathbb{E}^n und daher müssen U und V übereinstimmen.

Sei jetzt S eine beliebige, symmetrische, positiv definite Matrix S . Nach dem Spektralsatz existiert eine symmetrische, positiv definite Diagonalmatrix D , so dass

$$D = Q^\top S Q$$

ist. Hierbei ist Q eine orthogonale Matrix, deren Spalten die orthonormierten Eigenvektoren sind. Wir haben gezeigt, dass $U = \sqrt{D}$ existiert und somit

$$U^2 = D = Q^\top S Q$$

ist. Da

$$S = Q U^2 Q^\top = (Q U Q^\top)^2$$

gilt und $Q U Q^\top$ symmetrisch und positiv definit ist, erhalten wir, dass

$$\sqrt{S} = Q U Q^\top.$$

ist. ■

Polare Zerlegung von Matrizen

Es wird hilfreich sein, Matrizen als Produkte (Hintereinanderausführung) von „einfachen“ Matrizen darzustellen. Dies ermöglicht schrittweise vorzugehen und Eigenschaften (bzw. Invarianzen) besser untersuchen zu können.

Satz 3 (Satz über die polare Faktorisierung einer invertierbaren Matrix) Sei F eine Matrix mit $\det F > 0$. Dann existieren positiv definite, symmetrische Matrizen U, V und eine Rotation R , so dass

$$F = R U = V R$$

ist. Diese Zerlegung ist eindeutig, $U = \sqrt{F^\top F}$, $V = \sqrt{F F^\top}$. Die Zerlegung $F = R U$ wird rechts-polare Zerlegung von F genannt, $F = V R$ links-polare Zerlegung von F .

Beweis

1. Schritt: $F^\top F$ und $F F^\top$ sind symmetrische, positiv definite Matrizen (Übung).

2. Schritt: Eindeutigkeit

Sei $F = R U$. Dann ist $F^\top F = U R^\top R U = U^2$ und $U = \sqrt{F^\top F}$ ist nach dem Satz über die Quadratwurzeln eindeutig bestimmt. Weiterhin ist $R_1 = F U^{-1}$ eindeutig. Für $F = V R$ erhalten wir $F F^\top = V R R^\top V = V^2$ und folgern wie im ersten Fall die Eindeutigkeit der Zerlegung $R_2 = V^{-1} F$.

3. Schritt: Existenz

Wir setzen $U = \sqrt{F^\top F}$ und $R_1 = F U^{-1}$. Wir haben zu zeigen, dass R_1 eine orthogonale Matrix mit positiver Determinante ist.

Es ist

$$R_1^\top R_1 = U^{-1} F^\top F U^{-1} = U^{-1} U^2 U^{-1} = I$$

und $\det R_1 = \det F \det(U^{-1}) = \det F (\det U)^{-1} > 0$. Entsprechende Überlegungen werden für $V = \sqrt{F F^\top}$ durchgeführt.

4. Schritt: Es gilt $R_1 = R_2$. (Übung) ■

Invarianten von Matrizen, der Satz von Cayley-Hamilton

Definition 1 Als Invariante einer Matrix A bezeichnet man jede reell-wertige Abbildung $w : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$w(A) = w(B^{-1}AB)$$

für alle invertierbaren Matrizen B gilt.

Als Hauptinvarianten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bezeichnet man diejenigen reell-wertigen Abbildungen $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, die als Koeffizienten im charakteristischen Polynom von A auftreten, d.h.

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \iota_1(A)\lambda^2 - \iota_2(A)\lambda + \iota_3(A). \quad (1.2)$$

Lemma 1 Die Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} \iota_1(A) &= \operatorname{tr} A, \\ \iota_2(A) &= \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2], \\ \iota_3(A) &= \det A. \end{aligned}$$

Beweis

Durch Nachrechnen kann überprüft werden, dass (1.2) gilt. Wir überzeugen uns, dass $\iota_i(A) = \iota_i(B^{-1}AB)$, $i = 1, 2, 3$, für beliebige invertierbare Matrizen B ist. Aus (1.1) folgt, dass ι_1 invariant ist. Da $(B^{-1}AB)^2 = B^{-1}A^2B$ ist, ist auch ι_2 invariant. Weiterhin ist

$$\det(B^{-1}AB) = \det B^{-1} \det B \det A = \det A$$

und damit ist auch ι_3 invariant. ■

Ist A symmetrisch, dann können die Invarianten mit Hilfe der Eigenwerte ausgedrückt werden.

Lemma 2 Falls A symmetrisch ist, dann gilt für die Hauptinvarianten:

$$\begin{aligned} \iota_1(A) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ \iota_2(A) &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1, \\ \iota_3(A) &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

Beweis

Man wende die Hauptachsentransformation ($B = Q$, $B^{-1} = Q^T$) an. ■

Der folgende Satz besagt, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ Wurzel des charakteristischen Polynoms ist.

Satz 4 (Satz von Cayley-Hamilton) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ genügt der Gleichung

$$A^3 - \iota_1(A)A^2 + \iota_2(A)A - \iota_3(A)I = 0. \quad (1.3)$$

Beweis

Wir starten von der Relation (1.2) und setzen

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \iota_1(A)\lambda^2 - \iota_2(A)\lambda + \iota_3(A) = p(\lambda).$$

Ist λ kein Eigenwert, so existiert $(A - \lambda I)^{-1}$ und es ist

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{B(\lambda)}{p(\lambda)}, \quad (1.4)$$

wobei $B(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2$ eine Matrix mit Einträgen von Polynomen 2. Ordnung ist.

Damit ist für alle λ nach (1.4)

$$\begin{aligned} p(\lambda)I = (A - \lambda I)B(\lambda) &= AB_0 + (AB_1 - B_0)\lambda + (AB_2 - B_1)\lambda^2 - B_2\lambda^3 \\ &= \iota_3(A)I - \iota_2(A)\lambda I + \iota_1(A)\lambda^2 I - \lambda^3 I. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$-B_2 = -I, \quad (1.5)$$

$$AB_2 - B_1 = \iota_1(A)I, \quad (1.6)$$

$$AB_1 - B_0 = -\iota_2(A)I, \quad (1.7)$$

$$AB_0 = \iota_3(A)I. \quad (1.8)$$

Multiplikation von (1.5) mit A^3 , von (1.6) mit A^2 und (1.7) mit A und anschließende Addition aller 4 Gleichungen liefert:

$$-A^3 + \iota_1(A)A^2 - \iota_2(A)A + \iota_3(A)I = -B_2A^3 + A^3B_2 - A^2B_1 + A^2B_1 - AB_0 + AB_0 = 0$$

■

Folgerung

$$\iota_3(A)A^{-1} = A^2 - \iota_1(A)A + \iota_2(A)I.$$

Cofaktor Matrix

Zur Berechnung von Determinanten führt man den Begriff der „Adjunkten“ ein. In der englisch-sprachigen Literatur hat sich der Begriff „Cofactor matrix“ eingebürgert, der wie folgt definiert wird.

Definition 2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für jedes Indexpaar (i, j) sei $A'_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix, die man durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte erhält. Sei

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \det A'_{ij}.$$

Die Cofaktor-Matrix von A ist

$$\text{Cof } A = (d_{ij})_{i,j}.$$

Es gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile}),$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte})$$

und damit

$$A(\text{Cof } A)^\top = (\text{Cof } A)^\top A = \det A I. \quad (1.9)$$

Falls A invertierbar ist, erhalten wir

$$\text{Cof } A = \det A A^{-\top}.$$

Weiterhin gelten die Relationen

$$\text{Cof}(A^\top) = (\text{Cof } A)^\top,$$

$$\text{Cof}(AB) = \text{Cof } A \text{Cof } B.$$

1.2 Tensoren

Physikalische Gesetze sollten so formuliert werden, dass sie nicht an spezielle (kartesische) Koordinatensysteme gebunden sind. Daher konzentriert man sich auf Größen, so genannte Tensoren, die ein bestimmtes Transformationsverhalten aufweisen.

Definition 3 Die n^r Größen $t_{i_1 i_2 \dots i_r}$, $i_1, i_2, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$, $r = 0, 1, 2, \dots$ bilden einen Tensor ($t_{i_1 i_2 \dots i_r}$) r -ter Stufe, wenn sie bei orthogonalen Transformationen Q wie das r -fache Produkt der Koordinaten transformiert werden; ist

$$x'_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} x_i,$$

so soll

$$t'_{k_1 \dots k_r} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n q_{k_1 i_1} q_{k_2 i_2} \dots q_{k_r i_r} t_{i_1 i_2 \dots i_r} \quad (1.10)$$

und

$$t_{k_1 \dots k_r} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n q_{i_1 k_1} q_{i_2 k_2} \dots q_{i_r k_r} t'_{i_1 i_2 \dots i_r}$$

sein.

Beispiele

Tensoren 0. Stufe

In diesem Fall ist $n^0 = 1$ und es tritt nur eine Größe t auf

$$t' = qt = t.$$

Wir sprechen in diesem Fall von Skalaren.

Beispiel: Wir betrachten das Skalarprodukt $t = a \cdot b$. Dann ist $t' = Qa \cdot Qb = t$.

Tensoren 1. Stufe

Diese Größen haben $n^1 = n$ Einträge. Die Definition 3 lautet in diesem Fall:

Ein Tensor 1. Stufe ist ein System von n Zahlen t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, seinen Koordinaten, die sich bei orthogonalen Transformationen wie folgt verhalten:

$$t'_k = \sum_{i=1}^n q_{ki} t_i, \quad t_k = \sum_{i=1}^n q_{ik} t'_i,$$

das heißt

$$\vec{t}' = Q\vec{t}, \quad \vec{t} = Q^T \vec{t}'.$$

Tensoren 2. Stufe

In diesem Fall besteht der Tensor aus n^2 Einträgen. Daher besagt die Definition 3 in diesem Fall:

Ein Tensor 2. Stufe im \mathbb{R}^n ist ein System von n^2 Zahlen t_{kl} , die sich bei orthogonaler Transformation wie folgt verhalten:

$$t'_{kl} = \sum_{i,j=1}^n q_{ki} q_{lj} t_{ij}, \quad T' = QTQ^T, \quad T = (t_{ij})$$

$$t_{kl} = \sum_{i,j=1}^n q_{ik} q_{jl} t'_{ij}, \quad T = Q^T T' Q, \quad T' = (t'_{ij}).$$

Diese Objekte lassen sich als Matrizen im $\mathbb{R}^{n \times n}$ deuten.

Beispiel: Wir betrachten das Tensorprodukt $T = a \otimes b$, d.h. $t_{ij} = a_i b_j$.

Es gilt $T' = Qa \otimes Qb = Q(a \otimes b)Q^T$.

Rechenregeln

- Tensoren gleicher Stufe können addiert und subtrahiert werden.
- Das (Tensor)-Produkt von Tensoren ist folgendermaßen definiert: Man multipliziert jede Komponente des Tensors S_p (p -ter Stufe) mit jeder Komponente des Tensors T_q (q -ter Stufe)

$$S_p \otimes T_q = (s_{i_1 \dots i_p} \cdot t_{j_1 \dots j_q})_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} = \text{Tensor der Stufe } p + q.$$

Die Relationen (1.10) gelten auch für $S_p \otimes T_q$.

Beispiel: Seien a, b Tensoren 1. Stufe. Dann ist

$$a \otimes b = \text{Matrix} = (a_i b_j)_{i,j=1, \dots, n}.$$

- Sei t ein Tensor r -ter Stufe, $r \geq 2$. Die folgende Operation bezeichnet man als *Verjüngung* und führt auf einen Tensor $(r - 2)$ -ter Stufe: Man setze zwei Indizes in $t_{k_1 \dots k_r}$ gleich, sagen wir $k_1 = k_2$, und summiert über k_1 : $\sum_{k_1=1}^n t_{k_1 k_1 k_3 \dots k_r}$. Wir zeigen, dass dieses neue Objekt ein Tensor ist und überprüfen (1.10):

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^n t'_{k_1 k_1 k_3 \dots k_r} &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n q_{k_1 i_1} q_{k_1 i_2} \dots q_{k_r i_r} t_{i_1 \dots i_r} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \underbrace{\left(\sum_{k_1=1}^n q_{k_1 i_1} q_{k_1 i_2} \right)}_{= \delta_{i_1 i_2}} q_{k_3 i_3} \dots q_{k_r i_r} t_{i_1 \dots i_r}. \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\sum_{k_1=1}^n q_{k_1 i_1} q_{k_1 i_2} = \delta_{i_1 i_2} = \begin{cases} 1 & \text{für } i_1 = i_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit wird:

$$\sum_{k_1=1}^n t'_{k_1 k_1 k_3 \dots k_r} = \sum_{i_3, \dots, i_r=1}^n \left(q_{k_3 i_3} \dots q_{k_r i_r} \sum_{i_1=1}^n t_{i_1 i_1 i_3 \dots i_r} \right)$$

ein Tensor $(r - 2)$ -ter Stufe und damit auch t .

Beispiel: Verjüngung eines Tensors 2. Stufe

$$\sum_{k=1}^n t'_{kk} = \sum_{i,j=1, \dots, n} \sum_{k=1}^n q_{k_i} q_{k_j} t_{ij} = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} t_{ij} = \sum_{i=1}^n t_{ii}.$$

Die Spurbildung eines Tensors 2. Stufe ist invariant gegenüber orthogonalen Transformationen. Die Verjüngung von $a \otimes b$ ergibt das Skalarprodukt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

1.3 Fréchet–Ableitungen

In der Analysisvorlesung waren Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ betrachtet worden. Die Abbildung f bezeichnet man auch als Feld.

Es war definiert worden: Das Feld f ist differenzierbar in einer Richtung $a \in \mathbb{R}^n$, partiell differenzierbar, Gâteaux-differenzierbar, Fréchet-differenzierbar bzw. stetig differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen die entsprechenden Eigenschaften besitzen.

Wir werden im Folgenden auch Ableitungen von Tensorfeldern betrachten und führen deshalb allgemein die Fréchet-Ableitung für Abbildungen ein, die einen normierten Raum X in einen normierten Raum Y abbilden.

Wir wiederholen zunächst, was wir unter einem normierten Raum verstehen.

Definition 4 Ein normierter Raum X ist ein linearer Raum über einem Zahlkörper K (hier \mathbb{R} oder \mathbb{C}), versehen mit einer Norm $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, die folgenden Axiomen genügt:

- (N1) $\|x\|_X \geq 0$, $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (N2) $\|\lambda x\|_X = |\lambda| \|x\|_X \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall x \in X$,
- (N3) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \quad \forall x, y \in X$.

Die Konvergenz in X ist wie folgt zu verstehen:

Definition 5 Eine Folge von Elementen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in X zu einem Element x aus X , falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

ist. Kurz geschrieben $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, bzw. $x_n \rightarrow x$.

Nun führen wir den normierten Raum der linearen stetigen Abbildung eines normierten Raumes X in einen normierten Raum Y ein.

Definition 6 Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y, f \text{ ist linear und stetig}\}$$

den linearen Raum aller linearen und stetigen Abbildungen von X in Y , versehen mit der Operatornorm

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|fx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|fx\|_Y = \sup_{\|x\|=1} \|fx\|_Y.$$

Beispiele

Sei $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$, dann kann f mit einer Matrix A identifiziert werden. In diesem Fall ist die Operatornorm von den Normen X und Y wie folgt abhängig:

- 1° Sei $X = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm $\|x\|_X = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$,
 $Y = \mathbb{R}^m$, versehen mit der Norm $\|y\|_Y = \max_{j=1, \dots, m} |y_j|$.

Dann ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|A\| = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ji}| \quad (\text{Zeilensummennorm}).$$

2° Sei $X = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm $\|x\|_X = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
 $Y = \mathbb{R}^m$, versehen mit der Norm $\|y\|_Y = \sum_{j=1}^m |y_j|$.

Dann ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ji}| \quad (\text{Spaltensummennorm}).$$

3° Sei $X = Y = \mathbb{R}^n$, versehen mit der Norm $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
 Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist, dann ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|A\| = |\lambda_1| \quad (\text{Spektralnrm}),$$

wobei λ_1 der betragsmäßig größte Eigenwert von A ist.

Ist A nicht symmetrisch, dann ist

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = |\omega_1|,$$

wobei ω_1^2 der größte Eigenwert von $A^\top A$ ist.

Spezialfall

$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X'$ ist der Raum der linearen stetigen Funktionale und wird auch als Dualraum von X bezeichnet.

Sei Ω eine offene Teilmenge eines normierten Raumes X .

Definition 7 Eine Abbildung $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$ ist Fréchet–differenzierbar im Punkt $a \in \Omega$, falls ein Element $f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, so dass

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad (1.11)$$

für alle Elemente $h \in X$ ist, wobei $a+h \in \Omega$ ist.

Hierbei bedeutet

$$o(h) = \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{mit} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{in } Y,$$

bzw.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|o(h)\|_Y}{\|h\|_X} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_Y = 0,$$

d.h. $o(h)$ strebt schneller der Norm nach zu 0 in Y als h zu 0 in X .

Die Relation (1.11) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Das Element $f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist eindeutig bestimmt und wird als Fréchet–Ableitung von f im Punkt a bezeichnet.

Die Abbildung f ist differenzierbar in Ω , falls f in allen Punkten $a \in \Omega$ differenzierbar ist.

Wir können definieren, wann eine Ableitung

$$f : \Omega \subset X \rightarrow Y$$

stetig differenzierbar ist.

Dazu wenden wir einfach die Definition der Stetigkeit einer Abbildung auf

$$f' : x \in \Omega \subset X \rightarrow f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

an.

Das heißt: für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so dass

$$\|f'(x+h) - f'(x)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \varepsilon$$

für

$$\|h\|_X < \delta$$

ist. In diesem Fall sagen wir

$$f \in C^1(\Omega, Y), \quad \text{kurz } f \in C^1(\Omega),$$

wobei $C^1(\Omega, Y)$ der Raum der stetigen (Fréchet-)differenzierbaren Abbildungen von $\Omega \subset X$ in $\mathcal{L}(X, Y)$ ist.

Beispiele

1° Sei $f(x) = Ax + b$, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Dann ist

$$\begin{aligned} f(a+h) &= A(a+h) + b = Aa + b + Ah \\ &= f(a) + Ah. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $f'(a) = A$ ist.

2° Sei $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^1$.

Wir betrachten die Abbildung

$$f(x) = x \cdot x.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h) \cdot (x+h) = x \cdot x + 2h \cdot x + h \cdot h \\ &= f(x) + f'(x)h + \|h\|_X^2. \end{aligned}$$

Damit ist $f'(x) = 2x$, $f'(x)h = 2x \cdot h$.

3° Sei $X = Y = \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abbildung f ordnet jeder Matrix ihr Quadrat zu

$$f(A) = A^2.$$

Es gilt

$$f(A+H) = (A+H)(A+H) = A^2 + HA + AH + H^2.$$

Wir überlegen, dass $H^2 = o(H)$ ist. Dazu betrachten wir die Darstellung

$$H^2 = (b_{ij})_{i,j=1\dots n}, \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^n h_{ik} h_{kj}.$$

Alle Normen in endlichdimensionalen Räumen und damit auch im $\mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent. Daher können wir z.B. die euklidische Norm wählen

$$\|H\| = \|H\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^n h_{kl}^2}.$$

Es ist

$$\frac{b_{ij}\|H\|}{\|H\|} = \|H\| \varepsilon_{ij}(H),$$

wobei

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(H) &= \frac{\sum_{k=1}^n h_{ik} h_{kj}}{\sqrt{\sum_{k,l=1}^n h_{kl}^2}} \leq \frac{\|h_{i-teZeile}\|_{\mathbb{R}^n} \|h_{j-teSpalte}\|_{\mathbb{R}^n}}{\|h_{i-teZeile}\|_{\mathbb{R}^n}} \\ &= \|h_{j-teSpalte}\| \rightarrow 0 \quad \text{für } H \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit gilt für die Ableitung

$$f'(A)H = HA + AH.$$

In diesem Fall ist die Ableitung durch seine Werte (Anwendung auf H) definiert.

4° Ableitung von Determinanten invertierbarer Matrizen.

$$f : \Omega = \mathbb{R}_{\text{inv}}^{n \times n} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad f(A) = \det(A).$$

Satz 5 Sei f über der Menge der invertierbaren Matrizen definiert, $f(A) = \det A$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(A)H &= \det A \operatorname{tr}(HA^{-1}) = \det A A^{-\top} : H \\ &= \operatorname{Cof} A : H. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Beweis

Wir führen den Beweis für $n = 3$ aus. Es ist

$$\det(A + H) = \det((I + HA^{-1})A) = \det(I + HA^{-1}) \det A.$$

Weiterhin haben wir (man setze in (1.2) $\lambda = -1$)

$$\det(I + B) = 1 + \operatorname{tr} B + \iota_2(B) + \iota_3(B). \tag{1.13}$$

Wir zeigen, dass

$$\iota_2(B) + \iota_3(B) = \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} B)^2 - \operatorname{tr} B^2] + \det B = o(B) \tag{1.14}$$

ist. Es gilt

$$\begin{aligned} (\operatorname{tr} B)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n b_{ii} \right)^2 \leq nB : B = n\|B\|^2 = o(B), \\ \operatorname{tr} B^2 &= B^\top : B \leq C\|B\|^2 = o(B). \end{aligned}$$

Für $B = HA^{-1}$ gilt: $\|B\|^2 = \|HA^{-1}\|^2 \leq \|H\|^2 \|A^{-1}\|^2 = o(H)$.

Weiterhin ist $\det B$ eine Multilinearform und damit von der Größenordnung $o(B)$. ■

In den Beispielen 2° und 3° ist der Raum X ein Produkt-Raum von normierten Räumen. In diesem Fall können wir die Fréchet-Ableitung genauer charakterisieren.

Sei

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

und $\Omega \subset X$ eine offene Menge, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Omega$. Dann existieren offene Mengen $\Omega_j \subset X_j$, so dass $a_j \in \Omega_j$ und $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \subset \Omega$ ist.

Falls die Abbildung

$$f(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n) : \Omega_j \subset X_j \rightarrow Y$$

differenzierbar im Punkt $a_j \in \Omega_j$ ist, dann wird diese Ableitung partielle Ableitung im Punkt a genannt und mit

$$\partial_j f(a) \in \mathcal{L}(X_j, Y)$$

bezeichnet.

Lemma 3 Falls $f : \Omega \subset X = X_1 \times \dots \times X_n$ Fréchet-differenzierbar im Punkt $a \in \Omega$ ist, dann existieren die n partiellen Ableitungen $\partial_j f(a)$ und

$$f'(a)h = \sum_{j=1}^n \partial_j f(a)h_j \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n)^\top \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n. \quad (1.15)$$

Beweis

Da $f'(a) \in \mathcal{L}((X_1, \dots, X_n), Y)$ ist, muss $f'(a)$ durch einen „Vektor“ mit n Komponenten darstellbar sein, d.h.

$$f'(a)h = \sum_{j=1}^n v_j(a)h_j, \quad v_j(a) \in \mathcal{L}(X_j, Y).$$

Für $\vec{h}_j = (0, \dots, h_j, 0, \dots)$ gilt:

$$f(a + \vec{h}_j) = f(a) + \partial_j f(a)h_j + o(h_j)$$

und damit $v_j(a) = \partial_j f(a)h_j$. ■

Weitere Beispiele

5° Sei $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fréchet-differenzierbare Abbildung.

Der Spaltenvektor $f'(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)^\top$ dessen Komponenten die partiellen Ableitungen sind, wird als Gradient bezeichnet

$$\nabla f(a) = \text{grad } f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Relation (1.15) lautet:

$$f'(a)h = \text{grad } f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i,$$

wobei h ein beliebiger Vektor aus dem Raum \mathbb{R}^n ist.

Wir werden später Abbildungen f betrachten, die von der Zeit $t \in [0, T]$ und dem Ort $x \in \mathbb{R}^n$ abhängen

$$f : (t, x) \in \Omega \subset ([0, T] \times \mathbb{R}^n) \rightarrow f(t, x) \in \mathbb{R}^1.$$

In diesem Fall ist

$$\text{grad } f(t, a) = \text{grad}_x f(t, a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(t, a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

für $(t, a) \in \Omega$.

6° Sei $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung. Wir können $\mathbb{R}^{n \times n}$ als \mathbb{R}^{n^2} auffassen, d.h. Matrizen als Vektoren der Länge n^2 .

Die Darstellung (1.15) lautet für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} f'(A)H &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} h_{ij} \\ &= \frac{\partial f}{\partial A}(A) : H. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Gradient definiert als:

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(A)}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(A)}{\partial a_{n1}} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial a_{nn}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

So erhalten wir für $f(A) = \text{tr}(A) = \iota_1(A)$

$$\frac{\partial \text{tr}(A)}{\partial A} = I. \quad (1.16)$$

Dies folgt auch sofort aus der Definition der Fréchet-Ableitung

$$\text{tr}(A + H) = \text{tr} A + \text{tr} H = \text{tr} A + I : H.$$

Sei jetzt der Bildraum in Form eines Produktraumes gegeben, $Y = Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_m$.

In diesem Fall kann eine Abbildung $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$ komponentenweise definiert werden:

$$f_i : \Omega \subset X \rightarrow Y_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Lemma 4 Sei $f : X \rightarrow Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$. f ist differenzierbar im Punkt $a \in \Omega$, genau dann wenn seine Komponenten f_j , $j = 1, \dots, m$, differenzierbar in a sind.

$f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$ kann dargestellt werden als:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} f'_1(a) \\ \vdots \\ f'_m(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(X, Y_1) \times \dots \times \mathcal{L}(X, Y_m).$$

Beweis

Da

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

als Vektor geschrieben werden kann, folgt

$$f(a+h) = \begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ \vdots \\ f_m(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f'_1(a)h \\ \vdots \\ f'_m(a)h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1(h) \\ \vdots \\ o_m(h) \end{pmatrix}.$$

■

Folgerung

Sei $f : \Omega \subset X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ eine Fréchet-differenzierbare Funktion. Dann ist die Ableitung durch eine Jakobi-Matrix $Df(a)$ darstellbar.

$$f'(a)h = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = Df(a)h.$$

Beweis

In diesem Fall ist nach Formel (1.15)

$$f'_i(a)h = \sum_{j=1}^n \partial_j f_i(a)h_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

und daher

$$\begin{pmatrix} f'_1(a)h \\ \vdots \\ f'_m(a)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

■

Höhere Ableitungen

Seien X, Y normierte Räume und $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$ differenzierbar in Ω , das heißt

$$f' : x \in \Omega \rightarrow f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Definition 8 f' ist differenzierbar im Punkt $a \in \Omega$, falls die Fréchet-Ableitung

$$f''(a) = (f')'(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$$

existiert. Das heißt

$$f'(a+h) = f'(a) + \underbrace{f''(a)h}_{\in \mathcal{L}(X, Y)} + o(h).$$

$f''(a)$ heißt zweite Ableitung von f im Punkt a .

Bemerkung

Die zweite Ableitung kann mit einer stetigen bilinearen Abbildung von X in Y identifiziert werden:

$$(f''(a)h)k =: f''(a)(h, k) \quad \forall h, k \in X.$$

Dies ist eine symmetrische bilineare Abbildung

$$f''(a)(h, k) = f''(a)(k, h) \quad \forall h, k \in X.$$

Höhere (m -te) Ableitungen sind entsprechend definiert:

$$f^{(m)}(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_{m-1}(X, Y)) = \mathcal{L}_m(X, Y),$$

wobei $\mathcal{L}_0(X, Y) = Y$ ist. Insbesondere ist

$$f^{(m)}(a)h^m = f^m(a)(h, h, \dots, h).$$

Taylor-Formel [4, S. 24/25]

Seien X und Y normierte Räume, $\Omega \subset X$ eine offene Teilmenge.

Weiterhin sei $[a, a+h] \subset \Omega$ ein abgeschlossenes Segment, $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$. Falls f $(m-1)$ -mal differenzierbar in Ω ist und m -mal differenzierbar im Punkt a , dann gilt:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)h^m + \|h\|_X^m \varepsilon(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Tensorielle Aspekte

Wir hatten gesehen: Für differenzierbare Abbildungen f gilt:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1 \Rightarrow f'(x) = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix},$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow f'(x) = Df = \text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

Das heißt, die Ableitung skalarer Felder (Tensoren 0. Stufe) ist ein Vektor (Tensor 1. Stufe), die Ableitung eines Vektorfeldes (Tensor 1. Stufe) führt zu einer Matrix (Tensor 2. Stufe). Es liegt die Vermutung nahe, dass die Ableitung eines Tensors r -ter Stufe zu einem Tensor $(r + 1)$. Stufe führt. Dies wird in der Tat zutreffen, wenn man einen Tensor r -ter Stufe tensoriell mit dem Nabla-Operator (Tensor 1. Stufe) multipliziert.

Der Nabla-Operator als Tensor 1. Stufe

Wir betrachten den \mathbb{R}^n mit der Standardbasis $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$.

Definition 9 Der Nabla-Operator ist folgender Vektor in der Basisdarstellung

$$\nabla_B = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \partial_i, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

und seine Koordinaten sind $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$.

In der Koordinatendarstellung wird er identifiziert mit dem Spaltenvektor

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}.$$

Satz 6 (Hauptsatz) Sei $B = \{\vec{e}_i\}$ die Standardbasis und $B' = \{\vec{e}'_i\}$ eine weitere kartesische Basis, die durch eine orthogonale Matrix $Q = (q_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ineinander überführt werden:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} \vec{e}_j,$$

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n q_{ji} \vec{e}'_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt in den Basisdarstellungen

$$\nabla_B = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \partial_i = \sum_{i=1}^n \vec{e}'_i \partial'_i = \nabla'_{B'}, \quad (1.17)$$

und die Koordinatendarstellungen

$$\nabla' = \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \vdots \\ \partial'_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = Q^\top \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \vdots \\ \partial'_n \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Damit ist der Nabla-Operator ein Tensor 1. Stufe.

Beweis

Es ist

$$\partial'_i = \frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \sum_{k=1}^n q_{kj} x'_k}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} q_{ij}.$$

Damit gilt für die Koordinatendarstellung

$$\nabla' = \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \vdots \\ \partial'_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = Q \nabla.$$

Analog ist

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = Q^\top \begin{pmatrix} \partial'_1 \\ \vdots \\ \partial'_n \end{pmatrix} = Q^\top \nabla'.$$

Die Beziehung (1.17) folgt aus den Relationen

$$\begin{aligned} \nabla'_{B'} &= \sum_{i=1}^n \vec{e}'_i \partial'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \vec{e}_j \partial'_i = \sum_{j=1}^n \vec{e}_j \sum_{i=1}^n q_{ij} \partial'_i \\ &= \sum_{j=1}^n \vec{e}_j \partial_j = \nabla_B. \end{aligned}$$

■

Folgerung

Das Produkt des Nabla-Operators mit einem Tensor r -ter Stufe ergibt einen Tensor der Stufe $r + 1$

$$\nabla T^{(r)} = \nabla \otimes T^r = (\partial_i t_{j_1 \dots j_r})_{i, j_1 \dots j_r = 1, \dots, n}.$$

Beispiele

- $T^{(0)} = f$ sei eine skalare Funktion von n -Variablen.

Dann ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} = f'(x) = T^{(1)}.$$

- $T^{(1)} = \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine vektorwertige Funktion

$$\nabla \vec{f}(x) = \nabla \otimes \vec{f} = (\partial_i f_j)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_1 f_2 & \cdots & \partial_1 f_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \partial_n f_1 & \cdots & \cdots & \partial_n f_n \end{pmatrix} = (\text{grad } \vec{f})^\top. \quad (1.20)$$

Achtung! Die Bezeichnung $\nabla \vec{f} := \text{grad } f$ ist sehr häufig zu finden. Hier muss man sehr genau aufpassen, ob die transponierte Matrix oder $\text{grad } f$ selbst gemeint ist. (1.20) wird auch Vektorgradient von f genannt. Wir werden im Folgenden die Bezeichnung

$$\text{grad } \vec{f} = D \vec{f}$$

verwenden.

Die Divergenz

Im Raum der Tensoren r -ter Stufe können wir folgendes Produkt als Verjüngung des Tensorprodukts $\nabla \otimes T^{(r)}$ einführen

$$\nabla \cdot T^{(r)} = \left(\sum_{i=1}^n \partial_i t_{ij_2 j_3 \dots j_r} \right)_{j_2, \dots, j_r=1, \dots, n}.$$

Dadurch ist ein Tensor der Stufe $r - 1$ definiert.

Beispiele

Es ist $\nabla \cdot T^{(1)} = \sum_{i=1}^n \partial_i t_i$. Interpretieren wir $T^{(1)} = \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dann erhalten wir

$$\nabla \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i.$$

Definition 10 $\nabla \cdot \vec{f} = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i$ bezeichnet man als Divergenz des Vektorfeldes \vec{f} .

Wir betrachten einen Tensor 2. Stufe. Es ist

$$\nabla \cdot T^{(2)} = \left(\sum_{i=1}^n \partial_i t_{ij} \right)_{j=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \partial_1 t_{11} + \partial_2 t_{21} + \partial_3 t_{31} + \cdots + \partial_n t_{n1} \\ \partial_1 t_{12} + \partial_2 t_{22} + \cdots + \partial_n t_{n2} \\ \vdots \\ \partial_1 t_{1n} + \partial_2 t_{2n} + \cdots + \partial_n t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dieser Ausdruck wird auch Divergenz eines Tensors zweiter Stufe genannt.

Achtung!

Es ist jedoch gebräuchlich (siehe [4, S. 37]) die Divergenz einer matrixwertigen Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ als

$$\operatorname{div} T := (\nabla \cdot T^\top) = \begin{pmatrix} \partial_1 T_{11} & + \partial_2 T_{12} & + \cdots & + \partial_n T_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 T_{n1} & + \partial_2 T_{n2} & + \cdots & + \partial_n T_{nn} \end{pmatrix}$$

einzuführen. Wir werden in diesem Sinne die Divergenz verstehen.

Rechenformeln

Wir stellen jetzt eine Tabelle von Ableitungsformeln auf, die als Übung zu verifizieren sind.

Lemma 5 *Es seien folgende Abbildungen gegeben: $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist*

$$\operatorname{grad}(\varphi \vec{v}) = \varphi \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{v} \otimes \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.21)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{v}) = \varphi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.22)$$

$$\operatorname{grad}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\operatorname{grad} \vec{w})^\top \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^\top \vec{w}, \quad (1.23)$$

$$\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{w}) = \vec{v} \operatorname{div} \vec{w} + (\operatorname{grad} \vec{v}) \vec{w}, \quad (1.24)$$

$$\operatorname{div}(T^\top \vec{v}) = T : \operatorname{grad} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{div} T, \quad (1.25)$$

$$\operatorname{div}(\varphi T) = \varphi \operatorname{div} T + T \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.26)$$

1.4 Integration

In diesem Abschnitt stellen wir einige Sätze und Aussagen über Volumen- und Oberflächenintegrale zusammen, die wir später benötigen.

Transformation von Volumenintegralen

Sei Ω ein beschränktes offenes Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\text{int } \bar{\Omega} = \Omega$. Wir betrachten eine Abbildung $\varphi : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi : x \rightarrow x^\varphi = \varphi(x)$, mit den Eigenschaften:

- $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, (1.27)

- φ ist eine injektive Abbildung von $\bar{\Omega}$ auf $\varphi(\bar{\Omega})$, (1.28)

- φ ist eine orientierungserhaltende Abbildung, $\det(D\varphi) > 0$. (1.29)

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) &= \text{int } \varphi(\bar{\Omega}), \\ \varphi(\partial\Omega) &= \partial\varphi(\Omega) = \partial\varphi(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Es gilt folgender Transformationssatz:

Satz 7 Sei u ein Feld, das über $\varphi(\Omega)$ Lebesgue-integrierbar ist. Dann ist

$$\int_{\varphi(\Omega)} u(x^\varphi) dx^\varphi = \int_{\Omega} (u \circ \varphi)(x) \det D\varphi dx.$$

Transformation von Oberflächenintegralen

Wir wiederholen zunächst sehr kurz, was wir unter einem Oberflächenintegral (klassisches Herangehen) verstehen.

Sei A ein gekrümmtes Flächenstück im \mathbb{R}^3 .

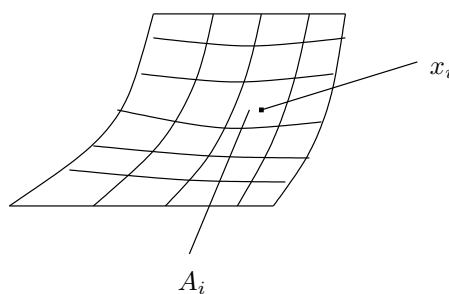


Abbildung 1.1: Zerlegung von A

Das Oberflächenintegral 1. Art für eine Feldfunktion $u = u(x_1, x_2, x_3)$ ist definiert als:

$$\int_A u(x) da = \lim_{\substack{\Delta A_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n u(x_i) \Delta A_i,$$

wobei ΔA_i das Maß des Oberflächenstückes A_i ist und $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Falls $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ differenzierbar ist, dann gilt:

$$\int_A u(x) \, da = \int_{A_{x_1, x_2}} u(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2} \, dx_1 \, dx_2.$$

Sind die Variablen $x_i = x_i(w, v)$ in Parameterform gegeben, dann gilt:

$$\int_A u(x) \, dx = \int_{A_{w, v}} u(x(w, v)) \sqrt{EG - F^2} \, dw \, dv,$$

mit

$$E = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial w}\right)^2, \quad F = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial w} \frac{\partial x_i}{\partial v}, \quad G = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2.$$

Die Verbindung von Oberflächen- und Volumenintegralen ist durch den Gauß'schen Integralsatz (Divergenzsatz) gegeben.

Satz 8 (Divergenzsatz) Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand,

$f : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Feldfunktion aus $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$,

$\vec{u} : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Feldfunktion aus $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$,

$T : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine matrixwertige Feldfunktion aus $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^{n \times n})$.

Dann ist

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \vec{n} \, da, \tag{1.30}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} \, da, \tag{1.31}$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} T \, dx = \int_{\partial\Omega} T \vec{n} \, da, \tag{1.32}$$

wobei \vec{n} der äußere Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ ist.

Folgerung

Seien $u, v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, dann gilt die partielle Integrationsformel

$$\int_{\Omega} u \partial_i v \, dx = - \int_{\Omega} \partial_i u v \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, da, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Betrachten wir jetzt wieder eine Transformation (Koordinatentransformation) φ mit den Eigenschaften (1.27), (1.28) und (1.29):

$$\varphi : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(\bar{\Omega}) \subset \mathbb{R}^n.$$

Der Divergenzsatz gilt ebenfalls im transformierten Gebiet, z.B. im matrixwertigen Fall haben wir

$$\int_{\Omega^\varphi} \operatorname{div}^\varphi T^\varphi \, dx^\varphi = \int_{\partial\Omega^\varphi} T^\varphi \vec{n}^\varphi \, da^\varphi.$$

Wir wollen jetzt eine Transformationsformel für diese Relation herleiten, d.h. die Integrale über Ω^φ und $\partial\Omega^\varphi$ durch Integrale über Ω bzw. $\partial\Omega$ beschreiben.

Wir führen dazu die Piola-Transformation $P : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ein.

Definition 11 (Piola-Transformation für Matrizen) Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1.27), (1.28) und (1.29). Weiterhin sei $T^\varphi : \varphi(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine matrixwertige Abbildung.

Die Abbildung $P : \mathbb{R}^{3 \times 3} \leftrightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$\begin{aligned} P T^\varphi &= T, \\ P^{-1} T &= T^\varphi, \end{aligned} \tag{1.33}$$

wobei

$$\begin{aligned} P T^\varphi(x^\varphi) &= T^\varphi(x^\varphi) (\det D\varphi) [D\varphi(x)]^{-\top} = T^\varphi(x^\varphi) \text{Cof} D\varphi(x) = T(x), \\ P^{-1} T(x) &= T(x) (\det D\varphi)^{-1} [D\varphi(x)]^\top = T(x) (\text{Cof} D\varphi(x))^{-1} = T^\varphi(x^\varphi) \end{aligned} \tag{1.34}$$

ist, wird Piola-Transformation genannt.

Satz 9 (Transformation von Oberflächenintegralen im \mathbb{R}^3) Sei $P T^\varphi = T$. Dann gilt:

$$\text{div} T(x) = \det(D\varphi(x)) \text{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi), \quad \forall x^\varphi = \varphi(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{1.35}$$

$$\int_{\partial A} T(x) \vec{n} \, da = \int_{\partial(\varphi(A))} T^\varphi(x^\varphi) \vec{n}^\varphi \, da^\varphi \quad \text{für ein beliebiges Teilgebiet } A \subset \bar{\Omega}, \tag{1.36}$$

$$\text{Cof}(D\varphi) \vec{n} \, da = \vec{n}^\varphi \, da^\varphi, \quad \|\text{Cof} D\varphi(x) \vec{n}\|_{\mathbb{E}^n} \, da = da^\varphi. \tag{1.37}$$

Beweis

1. Schritt: Es gilt die Piola Identität

$$\text{div}(\det D\varphi (D\varphi)^{-\top}) = \text{div} \text{Cof}(D\varphi) = \vec{0}. \tag{1.38}$$

Dies kann durch direktes Nachrechnen (Übung) gezeigt werden.

2. Schritt: Wir zeigen die Behauptung (1.35):

Die Einträge $T_{ij}(x)$ der Matrix $T(x) = P T^\varphi$ haben die Gestalt:

$$T_{ij}(x) = \sum_{k=1}^3 T_{ik}^\varphi (\text{Cof} D\varphi)_{kj}.$$

Damit gilt für die Einträge des Vektors $\text{div} T$:

$$\begin{aligned} \sum_j \partial_j T_{ij}(x) &= \sum_j \left[\sum_k [\partial_j (T_{ik}^\varphi)] (\text{Cof} D\varphi)_{kj} + \sum_k T_{ik}^\varphi \partial_j (\text{Cof} D\varphi)_{kj} \right] \\ &\stackrel{(1.38)}{=} \sum_j \sum_k [\partial_j T_{ik}^\varphi] (\text{Cof} D\varphi)_{kj}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Wir wenden die Kettenregel an:

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_l \frac{\partial}{\partial \varphi_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} = \sum_l \partial_l^\varphi \partial_j \varphi_l.$$

Einsetzen dieser Relation in (1.39) liefert:

$$\begin{aligned}
 \sum_j \partial_j T_{ij}(x) &= \sum_j \sum_k \sum_l \partial_l^\varphi T_{ik}^\varphi(\varphi(x)) \partial_j \varphi_l (\text{Cof } D\varphi)_{kj} \\
 &= \sum_l \sum_k \partial_l^\varphi T_{ik}^\varphi(\varphi(x)) \underbrace{\sum_j \partial_j \varphi_l (D\varphi)_{kj}^{-\top}}_{=\delta_{lk}} \det D\varphi \\
 &\stackrel{(1.9)}{=} \sum_k \partial_k^\varphi T_{ik}^\varphi(\varphi(x)) \det D\varphi \\
 &= (\text{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi))_i \det D\varphi.
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\text{div } T(x) = \text{div}^\varphi T^\varphi(\varphi(x)) \det D\varphi(x).$$

3. Schritt: Wir zeigen (1.36). Sei $A \subset \bar{\Omega}$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial A} T(x) \vec{n} \, da &= \int_A \text{div } T(x) \, dx = \int_A \text{div}^\varphi T^\varphi(\varphi(x)) \det D\varphi(x) \, dx \\
 &= \int_{\varphi(A)} \text{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi) \, dx^\varphi = \int_{\partial \varphi(A)} T^\varphi(x^\varphi) \vec{n}^\varphi \, da^\varphi.
 \end{aligned}$$

4. Schritt: Wir sehen uns die Behauptung (1.37) an.

Dazu betrachten wir das Paar

$$\begin{aligned}
 T(x) &= \text{Cof}(D\varphi) \\
 T^\varphi(x^\varphi) &= P^{-1} T(x) = \text{Cof}(D\varphi) (\text{Cof } D\varphi)^{-1} = \mathbf{I}.
 \end{aligned}$$

Aus der bereits bewiesenen Relation (1.36) folgt:

$$\int_{\partial A} \text{Cof}(D(\varphi)) \vec{n} \, da = \int_{\partial \varphi(A)} \vec{n}^\varphi \, da^\varphi. \quad (1.40)$$

Da A beliebig gewählt wurde, erhalten wir aus (1.40), dass

$$\text{Cof}(D\varphi) \vec{n} \, da = \vec{n}^\varphi \, da^\varphi \quad (1.41)$$

gesetzt werden kann. Weiterhin ist $\|\vec{n}^\varphi\|_{\mathbb{E}^n} = 1$ und daher

$$\|\text{Cof } D\varphi \vec{n}\|_{\mathbb{E}^n} \, da = da^\varphi.$$

■

Die Transformationsformel (1.36) kann auch für Vektoren hergeleitet werden, wenn eine geeignete Piola-Transformation zu Grunde gelegt wird.

Definition 12 (Piola-Transformation für Vektoren) Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand, int $\bar{\Omega} = \Omega$ und $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1.27), (1.28) und (1.29). Weiterhin sei $\vec{v}^\varphi : \varphi(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld.

Die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \tilde{P} : \mathbb{R}^3 &\leftrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \\
 \tilde{P} \vec{v}^\varphi &= \vec{v}, \\
 \tilde{P}^{-1} \vec{v} &= \vec{v}^\varphi,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{P} \vec{v}^\varphi(x^\varphi) &= (\text{Cof } D\varphi(x))^\top \vec{v}^\varphi(x^\varphi) = \vec{v}(x), \\ \tilde{P}^{-1} \vec{v}(x) &= (\text{Cof } D\varphi(x))^{-\top} \vec{v}(x) = \vec{v}^\varphi(x^\varphi)\end{aligned}$$

ist, wird Piolatransformation von Vektoren genannt.

Satz 10 Sei $\tilde{P} \vec{v}^\varphi = \vec{v}$. Dann gilt

$$\text{div} \vec{v} = \det D\varphi \text{div}^\varphi \vec{v}^\varphi, \quad (1.42)$$

$$\int_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} \, da = \int_{\partial\varphi(A)} \vec{v}^\varphi \cdot \vec{n}^\varphi \, da^\varphi \quad (1.43)$$

für ein beliebiges Teilgebiet $A \subset \bar{\Omega}$.

Beweis

Wir zeigen die Behauptung (1.42).

Dazu betrachten wir die Einträge von \vec{v} :

$$v_i = \sum_{k=1}^3 (\text{Cof } D\varphi)_{ik}^\top v_k^\varphi.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\text{div} \vec{v} &= \sum_{i=1}^3 \partial_i v_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \partial_i (\text{Cof } D\varphi)_{ik}^\top v_k^\varphi + \sum_{k=1}^3 (\text{Cof } D\varphi)_{ik}^\top \partial_i v_k^\varphi \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 v_k^\varphi \underbrace{\sum_{i=1}^3 \partial_i (\text{Cof } D\varphi)_{ki}}_{=0} + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\text{Cof } D\varphi)_{ki} \partial_i v_k^\varphi \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\text{Cof } D\varphi)_{ki} \partial_i v_k^\varphi\end{aligned}$$

ist. Beachten wir, dass $\partial_i = \sum_{l=1}^3 \partial_l^\varphi \partial_i \varphi_l$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\text{div} \vec{v} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \det D\varphi (D\varphi)_{ki}^{-\top} \sum_{l=1}^3 \partial_l^\varphi v_k^\varphi \partial_i \varphi_l \\ &= \det D\varphi \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \partial_l^\varphi v_k^\varphi \sum_{i=1}^3 \underbrace{(D\varphi)_{ki}^{-\top} \partial_i \varphi_l}_{=\delta_{lk}} \\ &= \det D\varphi \sum_{k=1}^3 \partial_k^\varphi v_k^\varphi = \det D\varphi \text{div}^\varphi \vec{v}^\varphi.\end{aligned}$$

Die Behauptung (1.43) folgt sofort aus dem Divergenzatz analog zum 3. Beweisschritt des Satzes 9.

Wir können auch die Formel (1.41) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial\varphi(A)} \vec{v}^\varphi \cdot \vec{n}^\varphi \, da^\varphi &= \int_{\partial\varphi(A)} \vec{v}^\varphi \cdot \text{Cof } D\varphi \vec{n} \, da \\ &= \int_{\partial\varphi(A)} (\text{Cof } D\varphi)^\top \vec{v}^\varphi \cdot \vec{n} \, da = \int_{\partial A} \vec{v} \cdot \vec{n} \, da.\end{aligned}$$

■

Kapitel 2

Deformation und Bewegung

In der Kontinuumsmechanik wird die Deformation und Bewegung kontinuierlicher Körper untersucht. Der Körper wird mathematisch durch ein Gebiet Ω beschrieben, indem die materiellen Punkte als Punkte in Ω beschrieben werden. Damit wird eine Idealisierung vorgenommen und das Kontinuum Ω als Menge materieller Punkte mit gewissen Eigenschaften aufgefasst.

Dies ist ein Unterschied zur Beschreibung des Körpers als Partikelsystem, z.B. von Atomen oder Molekülen. Zur Kontinuumsmechanik gehören die Festkörper- und Strömungsmechanik.

Um die Deformationen und Bewegungen eines Körpers unter Einwirkung von Kräften beschreiben zu können, müssen wir die Lage der Punkte zu jedem Zeitpunkt t eindeutig identifizieren können. Daher ist es nützlich, eine Referenzkonfiguration einzuführen und Deformationen durch Abbildungen φ der Referenzkonfiguration Ω auf eine aktuelle Konfiguration $\varphi(\Omega)$ zu definieren.

2.1 Deformationen

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, das offen, beschränkt, zusammenhängend mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ ist, $\text{int}(\overline{\Omega}) = \Omega$.

Wir bezeichnen ein solches Gebiet als Referenzkonfiguration.

Definition 13 (Deformation) *Als Deformation der Referenzkonfiguration wird eine Abbildung φ bezeichnet, die die Eigenschaften (1.27), (1.28) und (1.29) besitzt, das heißt*

- $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$,
- φ bildet $\overline{\Omega}$ auf $\varphi(\overline{\Omega})$ bijektiv ab,
- $\det D\varphi > 0$.

Die Deformation kann durch ein Verschiebungsfeld, d.h. eine Verschiebung in Bezug auf die Referenzkonfiguration beschrieben werden.

Definition 14 Sei $\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ eine Deformation. Die Abbildung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch die Relation

$$\varphi = id + u, \quad (2.1)$$

$$\varphi(x) = x + u(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.2)$$

wird Verschiebungsfeld genannt.

Folgerung

Es ist $u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Die Fréchet-Ableitung wird als Verschiebungsgradient bezeichnet:

$$\text{grad } u = D u = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$D\varphi = I + D u. \quad (2.3)$$

Beispiele

1° Das Verschiebungsfeld sei konstant, $u(x) = \vec{c}$. Dann ist φ eine Translation um \vec{c} .

$$\varphi(x) = x + \vec{c}.$$

2° Sei $\varphi(x) = Qx$ eine Rotation. Dann ist $u(x) = (Q - I)x$.

3° $D\varphi = A$ sei konstant. In diesem Fall spricht man von einer homogenen Deformation. Falls φ homogen ist, gilt

$$\varphi(y) - \varphi(x) = A(y - x) \quad \text{für alle } x, y \in \Omega.$$

Polare Zerlegung von $D\varphi$

Da $\det(D\varphi(x)) > 0$ ist, ist der Deformationsgradient $D\varphi(x)$ eine invertierbare Matrix in Ω und kann nach dem Satz über die polare Faktorisierung dargestellt werden als

$$D\varphi(x) = F(x) = R(x)U(x) = V(x)R(x),$$

wobei $U = \sqrt{F^T F}$ und $V = \sqrt{F F^T}$ positiv definite symmetrische Matrizen sind und R eine Rotation ist. Durch U und V werden Streckungen (bzw. Stauchungen) in Richtung der jeweiligen Hauptachsen (Eigenvektoren) im Punkt $x \in \Omega$ beschrieben. Dabei gilt: Sei (λ_i, v_i) ein Eigenpaar von U , dann ist (λ_i, Rv_i) ein Eigenpaar von V . Damit stimmen die Eigenwerte von U und V in $x \in \Omega$ überein und die Eigenvektoren werden durch eine Rotation R ineinander überführt. Die Eigenwerte λ_i werden als lokale Hauptstreckungen im Punkt $x \in \Omega$ bezeichnet, die Eigenvektoren v_i und Rv_i als Hauptrichtungen. U und V charakterisieren das lokale Maß der Verzerrungen, die bei der Deformation φ auftritt. Da U und V als Wurzel nicht so einfach zu berechnen sind, beschreibt man Verzerrungen durch $F^T F$ bzw. durch $F F^T$.

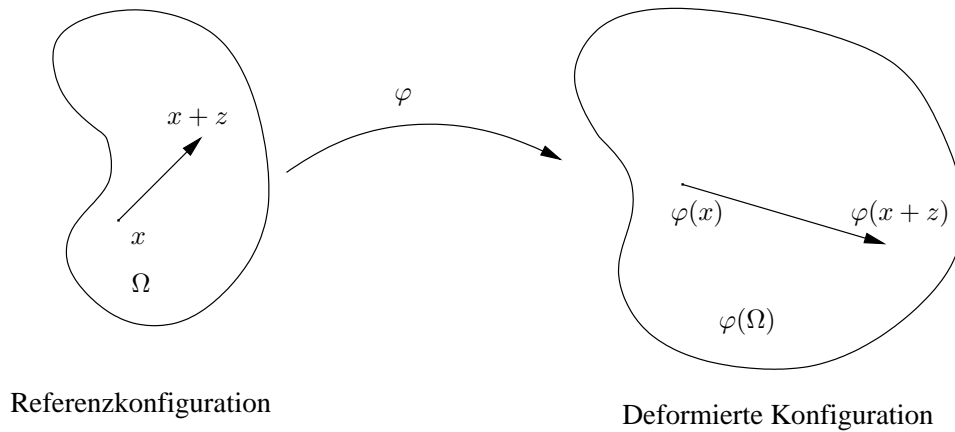


Abbildung 2.1: Referenz- und deformierte Konfiguration

Verzerrungen

Wir betrachten die Punkte x und $x+z$ aus der Referenzkonfiguration, die einen gewissen Abstand haben und betrachten deren Bildpunkte $\varphi(x)$ und $\varphi(x+z)$.

Das Quadrat des Euklidischen Abstands von x und $x+z$ ist

$$\|x+z-x\|_{\mathbb{E}^n}^2 = (z, z) = z^\top z.$$

Für die Bildpunkte $\varphi(x)$ und $\varphi(x+z)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\varphi(x+z) - \varphi(x)\|_{\mathbb{E}^n}^2 &= \|D\varphi(x)z + o(z)\|_{\mathbb{E}^n}^2 \\ &= (D\varphi(x)z, D\varphi(x)z) + (o(z), D\varphi(x)z) + (D\varphi(x)z, o(z)) + (o(z), o(z))^2 \\ &= z^\top (D\varphi)^\top D\varphi z + o(\|z\|_{\mathbb{E}^n}^2). \end{aligned}$$

Die Matrix $(D\varphi)^\top D\varphi$ ist ein lokales, quadratisches Maß (falls $\|z\|_{\mathbb{E}^n}$ genügend klein ist) für die Verzerrungen, die durch die Deformation φ hervorgerufen werden.

Definition 15 (Verzerrungstensor) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Referenzgebiet, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Deformation. Der symmetrische Tensor

$$C = U^2 = (D\varphi)^\top D\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \tag{2.4}$$

wird rechter Cauchy-Greenser Verzerrungstensor genannt. $B = V^2 = D\varphi(D\varphi)^\top$ heißt linker Cauchy-Greenser Verzerrungstensor.

Der symmetrische Tensor

$$E = \frac{1}{2}(C - I) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \tag{2.5}$$

heißt Green-St. Venant Verzerrungstensor.

Lemma 6 Die Verzerrungstensoren C, B und E können durch die Ableitungen des entsprechenden Verschiebungsfeldes beschrieben werden.

$$C = I + (Du)^\top + Du + (Du)^\top Du, \tag{2.6}$$

$$B = I + (Du)^\top + Du + Du(Du)^\top, \tag{2.7}$$

$$E = \frac{1}{2}((Du)^\top + Du + (Du)^\top Du). \tag{2.8}$$

Beweis

Setze (2.3) in (2.4) bzw. (2.5) ein. ■

Es treten keine Verzerrungen auf, falls $C = I = B$ bzw. $E = 0$ sind. Die zugehörigen Deformationen heißen „starr“. Sie werden durch den folgenden Satz charakterisiert.

Satz 11 (starre (rigid) Deformationen) Sei Ω eine offene und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^n und φ eine C^1 -Deformation. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $C(x) = (D\varphi(x))^\top D\varphi(x) = I \quad \forall x \in \Omega.$
- (ii) Für jedes $x \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $U(x) \subset \Omega$, so dass gilt

$$\|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n} = \|y - z\|_{\mathbb{E}^n} \quad \forall y, z \in U(x).$$

- (iii) Es existiert eine orthonormale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\varphi(x) = Qx + a \quad \forall x \in \Omega.$$

Beweis

- (iii) \rightarrow (i). Es gelte (iii). Dann ist

$$C(x) = Q^\top Q = I.$$

- (i) \rightarrow (ii). Seien y, z aus $U(x)$. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned} \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n} &\leq \sup_{\xi \in (y,z)} \|D\varphi(\xi)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)} \|y - z\|_{\mathbb{E}^n} \\ &= \sup_{\xi \in (y,z)} \max_i (\lambda_i)^{\frac{1}{2}} \|y - z\|_{\mathbb{E}^n} \\ &\stackrel{(i)}{=} \|y - z\|_{\mathbb{E}^n}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die $\lambda_i(\xi)$ die Eigenwerte von $D\varphi(\xi)^\top D\varphi(\xi)$, die unabhängig von ξ und identisch 1 sind.

Wir überlegen, dass $D^\varphi \varphi^{-1} = (D\varphi)^{-1}$ ist.

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varphi(x)) &= x \\ D_x[\varphi^{-1} \circ \varphi(x)] &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} D^\varphi \varphi^{-1} D\varphi(x) = I, \end{aligned}$$

woraus

$$D^\varphi \varphi^{-1} = (D\varphi)^{-1} \stackrel{(i)}{=} (D\varphi)^\top$$

folgt.

Nun können wir analoge Überlegungen zu den obigen durchführen:

$$\begin{aligned} \|y - z\|_{\mathbb{E}^n} &= \|\varphi^{-1}(\varphi(y)) - \varphi^{-1}(\varphi(z))\|_{\mathbb{E}^n} \\ &\leq \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n} \sup_{\eta \in (\varphi(y), \varphi(z))} \|D^\varphi \varphi^{-1}(\eta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)} \\ &= \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n} \sup_{x \in (y,z)} \|(D\varphi(x))^\top\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)} \\ &= \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n}. \end{aligned}$$

- (ii) \rightarrow (iii).

Wir können (ii) auch in der Form

$$-\|y - z\|_{\mathbb{E}^n}^2 + \|\varphi(y) - \varphi(z)\|_{\mathbb{E}^n}^2 = 0 \quad (2.9)$$

schreiben. Ausführlicher geschrieben heißt das:

$$\sum_{i=1}^n (\varphi_i(y) - \varphi_i(z))^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 = 0 \quad \forall y, z \in U(x). \quad (2.10)$$

Wir differenzieren (2.10) partiell nach y_j und erhalten

$$2 \sum_{i=1}^n (\varphi_i(y) - \varphi_i(z)) \partial_j \varphi_i(y) - 2(y_j - z_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Differentiation von (2.11) nach z_k liefert uns

$$-2 \sum_{i=1}^n \partial_k \varphi_i(z) \partial_j \varphi_i(y) + 2\delta_{jk} = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

In Matrixschreibweise lautet (2.12)

$$\begin{aligned} (D\varphi(z))^\top D\varphi(y) &= I && \text{für } y, z \in U, \\ (D\varphi(y))^\top D\varphi(y) &= I && \text{für } y = z \in U, \\ D\varphi(y) D\varphi(y)^\top &= I && \text{für } y = z \in U. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Multiplizieren wir (2.13) von rechts mit $D\varphi(y)^\top$ ergibt sich

$$(D\varphi(z))^\top = (D\varphi(y))^\top$$

und damit

$$D\varphi(z) = D\varphi(y).$$

Das heißt jedoch, dass $D\varphi(y) = Q = \text{const}$ eine orthogonale Matrix sein muss.

Die Abbildung $g(x) := \varphi(x) - Qx$ hat die Eigenschaft, dass $Dg = D\varphi - Q = 0$ in Ω ist. Daher ist $g(x) = \text{const} = a$ und

$$\varphi(x) = Qx + a. \quad \blacksquare$$

Linearisierter Verzerrungstensor

Falls $\|Du\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}^n, \mathbb{E}^n)}$ klein ist, werden die Tensoren C, B und E (2.6), (2.7) und (2.8) häufig vereinfacht, indem man die „kleinen“ Terme $Du^\top Du$ bzw. $Du Du^\top$ vernachlässigt.

Definition 16 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Referenzkonfiguration, $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Deformation mit dem Verschiebungsfeld u . Die Abbildung $\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{2}((Du)^\top + Du), \quad (2.14)$$

wird linearisierter Verzerrungstensor genannt. Seine Komponenten sind

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j(x) + \partial_j u_i(x)).$$

Die Linearisierung führt zu mathematischen Modellen der Kontinuumsmechanik, für die sowohl die Analysis als auch die Numerik wesentlich einfacher ist.

Wir bemerken jedoch, dass auch für lineare Deformationen

$$\varphi(x) = Ax = Ix + (A - I)x$$

der Gradient $Du = A - I$ groß sein kann.

Für Starrkörperdeformationen $\varphi(x) = Qx + a = x + (Q - I)x + a$ verschwindet der linearisierte Spannungstensor

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}((Q - I)^\top + (Q - I)) = \frac{1}{2}(Q^\top + Q) - I$$

im Allgemeinen nicht, obwohl $E = \varepsilon + \frac{1}{2}((Q - I)^\top(Q - I)) = 0$ ist.

Die Verschiebungsfelder u , für die $\varepsilon(u) = 0$ ist, können ebenfalls beschrieben werden. Sie werden auch infinitesimal starre (infinitesimal rigid) [6, S. 55] Verschiebungsfelder genannt.

Satz 12 *Der durch (2.14) definierte linearisierte Verzerrungstensor verschwindet genau dann, falls $u \in \mathcal{R}$ ist. Hierbei ist*

$$\mathcal{R} = \{u : u(x) = a + Bx, B = -B^\top\} \quad (2.15)$$

Es gilt $\dim \mathcal{R} = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}n$.

Im \mathbb{R}^3 ist $\mathcal{R} = \{u : u(x) = a + b \times x\}_{a,b \in \mathbb{R}^3}$ und $\dim \mathcal{R} = 6$.

Beweis

1. Schritt: Hinlänglichkeit

Wir überlegen zunächst, dass im \mathbb{R}^3

$$\mathcal{R} = \{u : u(x) = a + b \times x\}_{a,b \in \mathbb{R}^3}$$

ist, wobei $B = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix}$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

Es ist nämlich

$$b \times x = \begin{pmatrix} b_2x_3 - b_3x_2 \\ b_3x_1 - b_1x_3 \\ b_1x_2 - b_2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Bx.$$

Allgemein gilt für Elemente $u \in \mathcal{R}$, dass $Du = B$ und

$$\varepsilon = \frac{1}{2}((Du)^\top + Du) = \frac{1}{2}(B^\top + B) = 0$$

ist.

2. Schritt: Notwendigkeit

Wir zeigen: Falls

$$\varepsilon = \varepsilon(u) = \frac{1}{2}((Du)^\top + Du) = 0 \quad (2.16)$$

ist, muss notwendigerweise $u \in \mathcal{R}$ sein.

Aus (2.16) folgt, dass Du schiefsymmetrisch ist.

Wir betrachten zwei Punkte x und y aus Ω (bzw. aus einer Kugel). Das Kurvenstück γ mit den Punkten

$$\gamma(t) = x + t(y - x) \quad 0 \leq t \leq 1$$

beschreibt die Verbindungsstrecke zwischen x und y und soll ganz zu Ω (bzw. der Kugel) gehören.

Es ist

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= \int_{\gamma} Du(\xi) \, d\xi = \int_0^1 Du(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt \\ &= \int_0^1 Du(\gamma(t))(y - x) \, dt. \end{aligned}$$

Für schiefssymmetrische Matrizen gilt, dass $H = -H^\top$ und $x \cdot Hx = -Hx \cdot x = 0$ ist. Daraus folgt

$$(y - x) \cdot [u(y) - u(x)] = \int_0^1 (y - x) \cdot Du(\gamma(t))(y - x) \, dt = 0.$$

Dies ist eine Projektionseigenschaft. Wir differenzieren den Ausdruck

$$(y - x) \cdot [u(y) - u(x)] = 0$$

nach y . Da

$$g(y) = (y - x) \cdot [u(y) - u(x)] = \vec{v}_1(y) \cdot \vec{v}_2(y) = 0$$

die Fréchet Ableitung

$$\begin{aligned} (D_y g)h &= D_y \vec{v}_1 h \cdot \vec{v}_2 + D_y \vec{v}_2 h \cdot \vec{v}_1 \\ &= h \cdot \vec{v}_2 + D_y u(y) h \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \cdot h + (D_y u)^\top \vec{v}_1 \cdot h = 0 \quad \forall h \end{aligned}$$

besitzt, folgt

$$u(y) - u(x) + (Du(y))^\top (y - x) = 0. \tag{2.17}$$

Differentiation von (2.17) nach x liefert

$$-Du(x) - (Du(y))^\top = 0.$$

Da Du schiefssymmetrisch ist, erhalten wir

$$Du(x) = Du(y)$$

und $Du(x) = \text{const} = B$.

Aus der Homogenität von u folgt für $x, x_0 \in \Omega$ (bzw. aus einer Kugel)

$$u(x) - u(x_0) = B(x - x_0).$$

Somit erhalten wir

$$u(x) = Bx + u(x_0) - Bx_0 = Bx + a,$$

mit $B = -B^\top$, das heißt u ist aus \mathcal{R} . ■

Beispiele

Wir betrachten den Würfel $\Omega = (0, 1)^3$.

- (i) Sei $u(x) = (\alpha x_1, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt die Größe einer Stauchung oder Streckung der ersten Koordinate. Dann ist

$$\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E(x) = \begin{pmatrix} \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

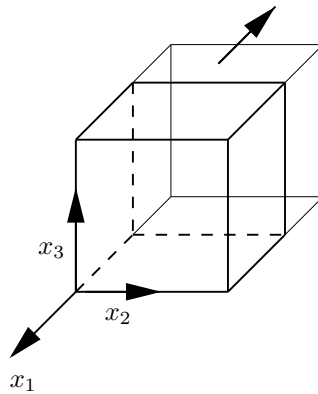


Abbildung 2.2: Streckung

- (ii) Sei $u(x) = (0, \alpha x_3, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt die Größe einer Scherung in Richtung der x_2 -Achse. Dann ist

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad E(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

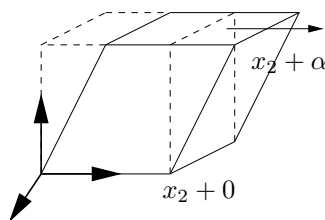


Abbildung 2.3: Scherung

2.2 Bewegungen

Bisher haben wir Deformationen eingeführt, die eine Referenzkonfiguration in eine deformierte Konfiguration abbilden. Um eine Bewegung beschreiben zu können, müssen wir eine Familie von Abbildungen, die durch einen Zeitparameter beschrieben werden, betrachten.

Definition 17 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Referenzgebiet. Eine Bewegung von Ω ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times (t_0, T) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \varphi(x, t) &= y, \\ \varphi(x, t_0) &= x, \end{aligned}$$

so dass für jedes feste t $\varphi(\cdot, t)$ eine C^1 -Deformation ist:

$$\varphi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega, t) = \Omega_t^\varphi.$$

Mit anderen Worten, für festes t ist $\varphi(\cdot, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine eindeutige C^1 -Abbildung.

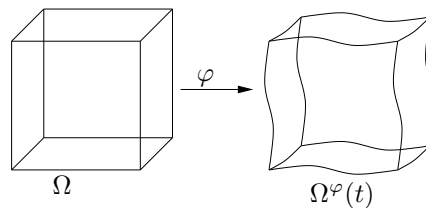


Abbildung 2.4: C^1 -Deformation

Die Zeitabhängigkeit der Deformation kann durch ein im Allgemeinen nichtzylindrisches Raum-Zeitgebilde dargestellt werden (in Abbildung 2.5 ist Ω ein zweidimensionales Gebiet).

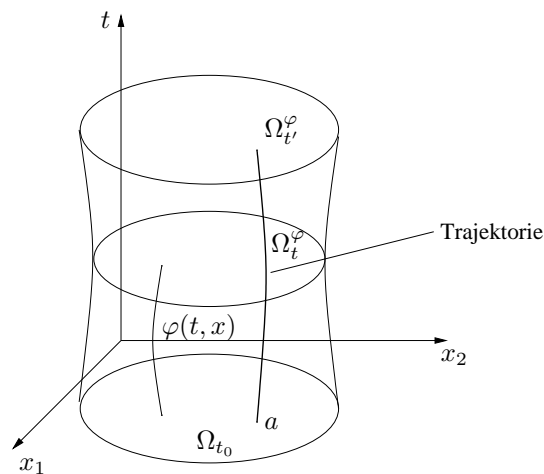


Abbildung 2.5: Nichtzylindrisches Raum-Zeit-Gebilde mit Trajektorie

Bemerkung

Um zum deformierten Gebiet $\Omega_{t'}$ zu gelangen (siehe *Grafik 6*), kann man auch Ω_t^φ als Referenzkonfiguration ansehen, so dass

$$\varphi(x, t', t_0) = \varphi(\varphi(x, t), t', t) \quad (2.18)$$

ist. Um zu betonen, dass vom Zeitpunkt t_0 ausgegangen wurde, schreiben wir auch

$$\varphi = \varphi(x, t, t_0).$$

Es ist häufig sinnvoll, die Bewegung eines festen Teilchens $x = a \in \Omega_{t_0} = \Omega$ zu beobachten. Das wird durch die zeitabhängige Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi(a, \cdot, t_0) &: (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \varphi(a, \cdot, t_0) &: t \rightarrow \varphi(a, t, t_0) = y(t) \in \Omega_t^\varphi \quad \text{für } t_0 < t < T \end{aligned}$$

ausgedrückt. Damit bildet $\varphi(a, \cdot, t_0)$ einen materiellen Punkt, der zur Zeit t_0 die Position a einnimmt, in die Position y zur Zeit t ab.

Definition 18 (Bahnkurve, Trajektorie) Der Graph der Kurve $\{\varphi(a, t, t_0)\}_{t \in (t_0, T)}$ wird als Trajektorie bzw. Bahnkurve des Partikels a im Zeitintervall (t_0, T) bezeichnet.

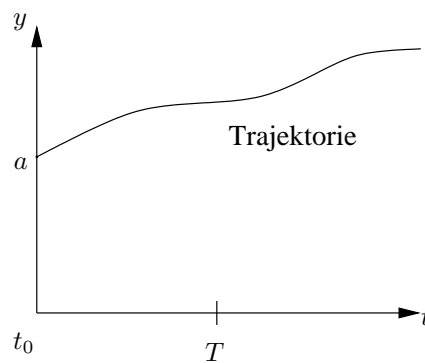


Abbildung 2.6: Bahnkurve $y(t) = \varphi(a, t, t_0)$

Definition 19 (Geschwindigkeit) Sei $\varphi(a, \cdot, t_0)$ stetig differenzierbar nach der Zeit t . Als Geschwindigkeitsfeld eines materiellen Punktes, der zur Zeit t_0 die Position a und zur Zeit t die Position y einnimmt, wird die Ableitung

$$v = v(y, t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial \varphi(a, t, t_0)}{\partial t} \quad (2.19)$$

bezeichnet.

Neben der Geschwindigkeit eines Partikels, wird die Beschleunigung (acceleration) eingeführt.

Definition 20 Sei $\varphi(a, \cdot, t_0)$ zweimal nach t differenzierbar. Die Beschleunigung eines materiellen Punktes, der die Position y zur Zeit t einnimmt, ist

$$\gamma = \gamma(y, t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(a, t, t_0).$$

Bemerkung

Falls das Geschwindigkeitsfeld bekannt ist, kann daraus die Bahnkurve berechnet werden.

Beispiel

Es sei

$$v(y, t) = \begin{pmatrix} ty_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= ty_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= 0, \\ y(t_0) &= a \end{aligned}$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = (a_1 e^{\frac{1}{2}t^2}, a_2 e^t, a_3)^T.$$

Euler- und Lagrange-Beschreibungen von Bewegungen

Wir betrachten das Partikelteilchen x (materieller Punkt), das zur Zeit $t = t_0$ die Position a und zur Zeit t die Position $y(t)$ hat. Weiterhin sei

$$f = f(x, t), \quad f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^1 \text{ oder } \mathbb{R}^n \text{ oder } \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine skalare, vektorwertige bzw. matrixwertige Abbildung, die nach t und x stetig differenzierbar sei (z.B. kann f die Geschwindigkeit, Beschleunigung, Temperatur oder das Verschiebungsfeld sein). f kann während der Bewegung auf verschiedene Arten beschrieben werden.

Lagrangesche Betrachtungsweise

Es wird eine Rücktransformation in die Referenzkonfiguration vorgenommen:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= g(a, t), \\ a &= \varphi^{-1}(y(t)), \\ g : \Omega \times (t_0, T) &\rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Man spricht in diesem Fall auch von einer materiellen Betrachtungsweise, die auf einem körperfesten Bezugssystem beruht. Diese Betrachtungsweise wird in der Festkörpermechanik bevorzugt.

Eulersche Betrachtungsweise

Die Bewegung wird in der aktuellen Konfiguration beschrieben

$$\begin{aligned} f(x, t) &= h(y, t), \\ y &= \varphi(a, t), \\ h : \Omega_t^\varphi \times (t_0, T) &\rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Man spricht in diesem Fall auch von einer räumlichen Betrachtungsweise, die sich auf ein raumfestes Bezugssystem bezieht.

Zusammenhang zwischen Eulerscher und Lagrangescher Betrachtungsweise

Für eine Bewegung $\varphi : \Omega \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $a \in \Omega$, $y(t) = \varphi(a, t)$ gilt:

$$\begin{aligned} g(a, t) &= h(\varphi(a, t), t), \\ h(y, t) &= g(\varphi^{-1}(y(t)), t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Bezeichnungen

- Als Lagrange-Ableitungen (materielle Ableitungen [material derivations]) von f bezeichnet man die Größen

$$\frac{\partial g}{\partial a_i}(a, t), \quad \frac{\partial g}{\partial t}(a, t). \quad (2.21)$$

$a \in \Omega_{t_0}$ ist hier ein beliebiger Punkt, er kann mit x identifiziert werden.

- Als Euler-Ableitungen (lokale oder räumliche Ableitungen [spatial derivations]) von f bezeichnet man die Größen

$$\frac{\partial h}{\partial y_i}(y, t), \quad \frac{\partial h}{\partial t}(y, t). \quad (2.22)$$

Lemma 7 Es gilt für $g(a, t) = h(\varphi(a, t), t) = h(y, t)$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\text{grad}_y h) v. \quad (2.23)$$

Hierbei ist $v(t) = \frac{\partial \varphi(a, t)}{\partial t}$.

Beweis

Wir benutzen die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t}(a, t) &= \frac{\partial h}{\partial t}(\varphi(a, t), t) \\ &= \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= (\text{grad}_y h) v + \frac{\partial h}{\partial t} = (v \cdot \nabla) h + \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung

In der Literatur zur Kontinuumsmechanik ist folgende Bezeichnung üblich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= h' \quad (\text{Euler-Ableitung, räumliche bzw. lokale Ableitung}), \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \dot{h} \quad (\text{Lagrange-Ableitung, materielle Ableitung bzw. totale Ableitung}). \end{aligned}$$

Die Relation (2.23) lautet dann

$$\dot{h} = h' + (\text{grad}_y h) v \quad (2.24)$$

oder

$$\dot{f} = f' + (\text{grad} f) v. \quad (2.25)$$

Reynoldssches Transporttheorem

Ein Fluss bzw. ein Transport wird mit Hilfe der Bewegung $\varphi = \varphi(x, t)$ beschrieben, d.h.

$$\Omega_t^\varphi = \varphi(\Omega, t), \quad t \in (t_0, T)$$

ist eine Familie von Gebieten, die als Fluss aufgefasst werden kann. Wir betrachten nun ein skalares oder vektorwertiges Feld f , das auf dem Gebiet Ω_t^φ definiert ist. Als Kontrollvolumen bezeichnet man eine beliebige Teilmenge $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$. Häufig tritt die Notwendigkeit auf Volumenintegrale, die von einem Parameter t abhängen,

$$K(t) = \int_{\Omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy$$

nach t zu differenzieren, d.h.

$$\frac{d}{dt} K(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy$$

zu berechnen. Wir betrachten zunächst einen Spezialfall, $f(y, t) \equiv 1$ und betrachten den „Transport eines Volumens“

$$K(t) = \int_{\Omega_t^\varphi} dy = \text{vol}(\Omega_t^\varphi).$$

Lemma 8 Sei die Bewegung $\varphi = \varphi(x, t)$ aus der Klasse $C^1(\bar{\Omega} \times (t_0, T))$ und $v = \partial_t \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ für alle t . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{vol}(\Omega_t^\varphi) &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} dy = \int_{\Omega_t^\varphi} \text{div} v(y, t) \, dy \\ &= \int_{\partial \Omega_t^\varphi} v \cdot n \, da_t^\varphi, \end{aligned} \quad (2.26)$$

d.h. die Volumenänderung in der Zeit wird durch den Zu- oder Abfluß über den Rand beschrieben.

Beweis

Es ist

$$\int_{\Omega_t^\varphi} dy = \int_{\Omega} \det(D_x \varphi(x, t)) \, dx$$

und daher

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} dy = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\det(D_x \varphi(x, t))) \, dx. \quad (2.27)$$

Wir wenden die Kettenregel an

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\det D_x \varphi(y, t)) &= D_{D_x \varphi} (\det D_x \varphi) : \frac{\partial}{\partial t} D_x \varphi \\ &= D_{D_x \varphi} (\det D_x \varphi) : D_x \frac{\partial}{\partial t} \varphi \\ &\stackrel{(1.12)}{=} \det D_x \varphi \, \text{tr} \left(D_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} (D_x \varphi)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Wir erinnern, dass Formel (1.12) lautete

$$D(\det A)H = \det A \operatorname{tr}(HA^{-1})$$

und hier $H = D_x \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $A = D_x \varphi$ ist.

Andererseits ist für $a = x$, $y = y(t) = \varphi(a, t) = \varphi(x, t)$, $x(y) = \varphi^{-1}(y, t)$

$$\begin{aligned} v(y, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t), \\ D_y v &= D_x \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right) D_y x, \\ &= D_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) (D_x \varphi)^{-1}, \\ \operatorname{tr}(D_y v) &= \operatorname{div} v = \operatorname{tr} \left(D_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) (D_x \varphi)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Einsetzen der Relation (2.29) in (2.28) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t}(\det D_x \varphi) = \det D_x \varphi \operatorname{div}_y v. \quad (2.30)$$

Daher lautet Formel (2.27) unter Beachtung von (2.30)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} dy &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_y v \det D_x \varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega_t^\varphi} \operatorname{div}_y v \, dy. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (2.26) bewiesen. ■

Kommen wir nun zum Reynoldsschen Transportsatz.

Satz 13 (O. Reynolds, 1842-1912) Sei $\varphi = \varphi(x, t)$ eine Bewegung aus der Klasse C^1 bezüglich x und t . Für eine vektorwertige Feldfunktion $\vec{f} = \vec{f}(y, t)$, die in Ω_t^φ definiert ist, gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} \vec{f}(y, t) \, dy = \int_{\Omega_t^\varphi} \underbrace{(\dot{\vec{f}}(y, t) + \operatorname{div}(\vec{f} \otimes v)(y, t))}_{\frac{\partial \vec{f}(y, t)}{\partial y}} \, dy \quad (2.31)$$

$$= \int_{\Omega_t^\varphi} [\dot{\vec{f}}(y, t) + \vec{f} \operatorname{div} v(y, t)] \, dy \quad (2.32)$$

$$= \int_{\Omega_t^\varphi} \vec{f}^\nabla(y, t) \, dy + \int_{\partial \Omega_t^\varphi} (\vec{f} \otimes v) n \, da_t^\varphi. \quad (2.33)$$

Für eine skalarwertige Feldfunktion $f = f(y, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy = \int_{\Omega_t^\varphi} f'(y, t) + \operatorname{div}(f v)(y, t) \, dy \quad (2.34)$$

$$= \int_{\Omega_t^\varphi} \dot{f}(y, t) + f \operatorname{div} v(y, t) \, dy \quad (2.35)$$

$$= \int_{\Omega_t^\varphi} f'(y, t) \, dy + \int_{\partial \Omega_t^\varphi} f v \cdot n \, da_t^\varphi.$$

Beweis

Wir beweisen nur den vektorwertigen Fall und empfehlen, den skalaren Fall als Übungsaufgabe zu zeigen. Um den Vektorcharakter von v zu betonen, schreiben wir hier $v = \vec{v}$.

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} \vec{f}(y, t) \, dy &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{f}(\varphi(x, t), t) \det D_x \varphi(x, t) \, dx \\ &\stackrel{\text{Produktregel, (2.30)}}{=} \int_{\Omega} \dot{\vec{f}} \det D_x \varphi(x, t) \, dx + \int_{\Omega} \vec{f} \operatorname{div}_y v \det D_x \varphi(x, t) \, dx \\ &= \int_{\Omega_t^\varphi} [\dot{\vec{f}} + \vec{f} \operatorname{div} \vec{v}(y, t)] \, dy. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Da nach (2.25)

$$\dot{\vec{f}} = \vec{f}' + \operatorname{grad} \vec{f} \vec{v}$$

und nach (1.24)

$$\operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{v}) = \vec{f}' \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{grad} \vec{f} \vec{v}$$

ist, kann (2.36) auch folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^\varphi} \vec{f}(y, t) \, dy &= \int_{\Omega_t^\varphi} (\vec{f}' + \operatorname{grad} \vec{f} \vec{v} + \vec{f} \operatorname{div} \vec{v}) \, dy \\ &= \int_{\Omega_t^\varphi} [\vec{f}' + \operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{v})] \, dy. \end{aligned}$$

Es ist nur noch die Relation (2.33) zu zeigen.

Da

$$\operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{v}) = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(f_1 \vec{v}) \\ \operatorname{div}(f_2 \vec{v}) \\ \operatorname{div}(f_3 \vec{v}) \end{pmatrix}$$

gilt, ist der Divergenzsatz auf jede Komponente von $\operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{v})$ anwendbar. Wir erhalten

$$\int_{\Omega_t^\varphi} \operatorname{div}(\vec{f} \otimes \vec{v}) \, dy = \int_{\partial \Omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} f_1 \vec{v} \cdot \vec{n} \\ f_2 \vec{v} \cdot \vec{n} \\ f_3 \vec{v} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} da_t^\varphi = \int_{\partial \Omega_t^\varphi} (\vec{f} \otimes \vec{v}) \vec{n} \, da_t^\varphi.$$

■

Isochore und stationäre Bewegungen

Isochore (volumenerhaltende) Bewegungen

Beim Beweis des Reynoldsschen Transporttheorems haben wir Lemma 8, das die zeitliche Volumenänderung beschreibt, wesentlich benutzt. Besonders einfach sind solche Bewegungen, bzw. Bewegungsgleichungen zu beschreiben, bei denen keine Volumenänderungen auftreten. Man charakterisiert diese als isochore (volumenerhaltende) Bewegungen.

Definition 21 Die Bewegung $\varphi : \Omega \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist isochor, falls

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\omega_t^\varphi) = 0$$

für alle Kontrollvolumina $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ gilt.

Aus der Relation (2.26) folgt sofort eine Charakterisierung isochorer Bewegungen:

Lemma 9 Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- (i) φ ist isochor.
- (ii) $\text{div}_y v(y, t) = 0$ in $\Omega_t^\varphi \times (t_0, T)$.
- (iii) $\int_{\partial\omega_t^\varphi} v \cdot n \, da_t^\varphi = 0$ für alle $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$.

Bemerkung

Die Bewegung φ wird auch inkompressibel genannt, falls $\text{div } v = 0$ ist [9, S.34].

Wir führen jetzt starre Bewegungen ein, die zur Klasse der isochoren Bewegungen gehören.

Starre Bewegungen

Zeitunabhängige starre Deformationen waren dadurch gekennzeichnet worden, dass

$$\|x - y\|_{\mathbb{E}^n} = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\mathbb{E}^n} \quad \forall x, y \in \Omega$$

ist. Starre Bewegungen können analog definiert werden.

Definition 22 Eine Bewegung heißt starr, falls Punkte, die zum Zeitpunkt t_0 die Positionen a bzw. \hat{a} und zum Zeitpunkt t die Positionen y bzw. \hat{y} einnehmen folgender Relation genügen:

$$\|y(t) - \hat{y}(t)\|_{\mathbb{E}^n} = \|\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t)\|_{\mathbb{E}^n} = \|a - \hat{a}\|_{E^n} \quad \forall t \in (t_0, T) \forall a, \hat{a} \in \Omega_{t_0}. \quad (2.37)$$

Lemma 10 Für das Geschwindigkeitsfeld einer starren Bewegung gilt, dass

$$(y(t) - \hat{y}(t)) \cdot (v(y, t) - v(\hat{y}, t)) = 0 \quad (2.38)$$

ist.

Beweis

Aus (2.37) folgt, dass

$$\frac{d}{dt} \|y(t) - \hat{y}(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \|\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t)\|^2 = 0 \tag{2.39}$$

ist.

Da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t)\|^2 &= \frac{d}{dt} ((\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t)) \cdot (\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t))) \\ &= 2(\varphi(a, t) - \varphi(\hat{a}, t)) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(a, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\hat{a}, t) \right) = 0 \end{aligned}$$

ist, folgt die Behauptung (2.38) für

$$y(t) = \varphi(a, t), \hat{y}(t) = \varphi(\hat{a}, t).$$

■

Lemma 11 Das Geschwindigkeitsfeld einer starren Bewegung kann folgendermaßen beschrieben werden: Es existieren ein Vektor $a = a(t) \in \mathbb{R}^n$ und eine schiefsymmetrische Matrix $B = B(t)$, so dass

$$v(y, t) = B(t)y + a(t)$$

ist.

Beweis

Der Beweis ist in [11, S 13/14] zu finden (vergleiche auch mit dem Beweis von Satz 12). Es wird empfohlen, ihn als Übungsaufgabe auszuführen. ■

Lemma 12 Starre Bewegungen sind isochor.

Beweis

Wie im Beweis von Satz 12 (für $n = 3$) erhalten wir

$$v(y, t) = B(t)y + a(t) = b_{12}(t) \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_{13}(t) \begin{pmatrix} y_3 \\ 0 \\ -y_1 \end{pmatrix} + b_{23}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -y_3 \\ -y_2 \end{pmatrix} + \vec{a}(t).$$

Damit wird

$$\operatorname{div}_y v(y, t) = 0.$$

■

Zum Schluss charakterisieren wir stationäre Bewegungen.

Stationäre Bewegungen

Definition 23 Eine Bewegung $\varphi = \varphi(x, t)$ ist stationär, falls

(i) $\Omega_{t_0}^\varphi = \Omega_t^\varphi = \Omega^\varphi \quad \forall t > t_0,$

und die Beschleunigung

(ii) $\gamma = \gamma(y, t) = 0 \quad \text{für alle } t > t_0$

ist, d.h. $v(y, t) = v(y)$ für $t > t_0$.

Stationäre Bewegungen sind nicht notwendigerweise isochor.

Kapitel 3

Erhaltungsgleichungen

Physikalische Größen, wie Masse, Momente, Energie sind häufig invariant gegenüber Bewegungen. Diese Situation wird durch (integrale) Erhaltungssätze beschrieben. Aus diesen werden fundamentale Differentialgleichungen der Strömungsmechanik wie die Kontinuitätsgleichung und Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Reynoldsschen Transporttheorems hergeleitet.

3.1 Massenerhaltung und die Kontinuitätsgleichung

Wir führen zunächst die Dichte eines Körpers Ω_t^φ zu einem festen Zeitpunkt t ein.

Definition 24 Eine Dichtefunktion $\rho = \rho(y, t)$ ist eine skalare Feldfunktion, die auf der aktuellen Konfiguration Ω_t^φ für jedes feste t definiert ist:

$$\rho(\cdot, t) : \Omega_t^\varphi \rightarrow (0, \infty).$$

Die Masse von Ω_t^φ bzw. eines Kontrollvolumens $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ ist durch

$$\begin{aligned} m(\Omega_t^\varphi, t) &= \int_{\Omega_t^\varphi} \rho(y, t) \, dy, \\ \text{bzw.} \quad m(\omega_t^\varphi, t) &= \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \, dy \end{aligned}$$

gegeben.

Falls keine Partikel in einem Kontrollvolumen hinein- bzw. hinausfließen, wird die Masse unabhängig von der Zeit sein, was durch das Massenerhaltungsgesetz

$$\frac{dm(\omega_t^\varphi, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \, dy = 0 \quad \text{für } t \in (t_0, T) \quad (3.1)$$

ausgedrückt wird.

Lemma 13 Sei die Dichtefunktion $\rho \in C^1$ bezüglich y und t , das heißt $\rho \in C^1(\Omega_t^\varphi \times (t_0, T))$. Gilt das Massenerhaltungsgesetz (3.1) für jedes Kontrollvolumen ω_t^φ , dann gilt folgende Kontinuitätsgleichung in der aktuellen Konfiguration (Eulerschen Betrachtungsweise)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(y, t) + \operatorname{div}(\rho(y, t)v(y, t)) = 0 \quad \text{für } t \in (t_0, T), y \in \Omega_t^\varphi. \quad (3.2)$$

Beweis

Wir wenden das Reynoldssche Transporttheorem (Satz 13) an. Danach ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} \rho'(y, t) + \operatorname{div}(\rho v)(y, t) \, dy = 0. \quad (3.3)$$

Der Integrand ist stetig und ω_t^φ ist ein beliebiges Kontrollvolumen. Daher kann (3.3) nur dann gelten, wenn

$$\frac{\partial \rho(y, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_y(\rho(y, t)v(y, t)) = 0$$

ist. ■

Wir betrachten einige Spezialfälle.

1° Lineare Advektionsgleichung

Es sei $v(y, t) = \vec{a} = \text{const.}$ Dann ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{a}\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{a} \cdot \nabla_y \rho = 0.$$

Für $y = y_1$, $a = a_1$ (eine Ortsdimension) erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Fügen wir das Anfangsdatum

$$\rho(y, 0 = t_0) = \rho_0(y)$$

hinzu, dann ist die Lösung

$$\rho(y, t) = \rho(y - at, 0) = \rho_0(y - at).$$

Anschaulich heißt dies, dass das Anfangs-Dichteprofil mit der Geschwindigkeit a „stromab“ transportiert wird.

2° Kinematische Strömungsmodelle

Die Geschwindigkeit wird als Funktion der gesuchten lokalen Dichte dargestellt

$$v = v(\rho(y, t)).$$

Solche Strömungsmodelle heißen kinematisch.

Für

$$v = \frac{\rho}{2}, \quad y = y_1$$

folgt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho^2}{2} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Diese nichtlineare Differentialgleichung heißt Burgers Gleichung.

Sollen noch viskose Effekte erfasst werden, so erhält man nach [3]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = 0, \quad \nu > 0 \quad \text{Viskositätsparameter.}$$

3° **Verkehrsströmung**

Sei $\rho = \rho(y, t)$ die lokale Autodichte auf einer einspurigen Straße ($y = y_1$) und v die Geschwindigkeit. Es sei $0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$, wobei ρ_{\max} die maximale Dichte (Stoßstange an Stoßstange) bezeichne. Da die Autos erhalten bleiben, muss die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

gelten. Wir nehmen an, dass $v = v(\rho)$ ist. Bei $\rho = 0$ (leere Straße) möchte man mit der maximalen Geschwindigkeit v_{\max} fahren, je größer ρ ist, desto kleiner muss die Geschwindigkeit sein, das heißt

$$v = v(\rho) = v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right).$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right] = 0.$$

3.2 Momentenerhaltung und Bewegungsgleichungen

Während einer Bewegung kommt es zu Interaktionen zwischen verschiedenen Teilen des Körpers Ω_t^φ oder zwischen dem Körper Ω_t^φ und seiner Umgebung auf Grund einwirkender Kräfte. Wir unterscheiden zwischen **Volumenkräften** und **Oberflächenkräften**.

- Die Volumenkräfte seien durch stetige vektorwertige Dichtefunktionen $f = f(y, t)$, $f : \Omega_t^\varphi \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben. Auf jedem Teilgebiet $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ sind sie definiert als

$$F(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy.$$

- Die Oberflächenkräfte sind durch stetige vektorwertige Dichtefunktionen $g = g(y, t)$, $g : \partial\Omega_t^\varphi \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert, die auf den Rändern von ω_t^φ folgendermaßen beschrieben werden

$$G(\gamma_t^\varphi, t) = \int_{\gamma_t^\varphi} g(y, t) \, da_t^\varphi.$$

Hierbei ist $\gamma_t^\varphi = \bar{\omega}_t^\varphi \cap \partial\Omega_t^\varphi$.

Volumenkräfte können z.B. durch Gravitationskräfte, elastische und magnetische Felder oder Temperaturfelder gegeben sein. Oberflächenkräfte beschreiben z.B. den Einfluss anderer Körper oder Felder über den Rand $\partial\Omega_t^\varphi$ und können z.B. mit Hilfe von Oberflächenspannungen bzw. Kontaktkräften gegeben sein.

Ein grundlegendes Gesetz, das Bewegung und Kräfte in Form von Bilanzgleichungen verbindet, ist das Axiom über das Momentengleichgewicht, das mit Hilfe des Cauchyschen Spannungsvektors beschrieben wird.

Wir führen folgende Momente ein.

Definition 25 Sei $\rho = \rho(y, t)$ eine skalare Feldfunktion und $\rho \in C^1(\Omega_t^\varphi \times (t_0, T))$; $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ sei ein beschränktes Teilgebiet.

Als **Moment** (Impuls) bezeichnen wir das Integral

$$l(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t)v(y, t) \, dy.$$

Als **Drehimpuls** (angular momentum) um den Nullpunkt wird das Integral

$$a(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} y \times \rho(y, t)v(y, t) \, dy$$

bezeichnet.

Um ein Gleichgewicht zwischen den angreifenden Kräften und den zeitlichen Änderungen der Momente ausdrücken zu können, haben L. Euler (1757, 1771) und A.L. Cauchy (1823, 1827) den Begriff des Spannungsvektors eingeführt, der auf Oberflächen von Teilgebieten $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ definiert ist.

Axiom M Momentengleichgewicht, Spannungsprinzip von Euler und Cauchy

Momentengleichgewicht liegt vor, falls ein Vektorfeld $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(y, t, n) : \Omega_t^\varphi \times (t_0, T) \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ existiert, so dass

$$\frac{d}{dt} l(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} \hat{\mathbf{t}}(y, t, n) \, da_t^\varphi, \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} a(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} y \times f(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} y \times \hat{\mathbf{t}}(y, t, n) \, da_t^\varphi \quad (3.5)$$

für alle $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ gilt. $\hat{\mathbf{t}}$ heißt Cauchyscher Spannungsvektor. S^3 bezeichnet die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 .

Bemerkung:

Wirken auf den Körper keine äußeren Kräfte, so folgen die Impuls- und Drehimpulserhaltung:

$$l(t) = \text{const}, \quad a(t) = \text{const}.$$

Ein zentrales Resultat der Kontinuumsmechanik ist, dass $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{t}}(y, t)$ linear in Bezug auf n ist.

Satz 14 (Cauchyscher Spannungssatz, Bewegungsgleichungen) Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

- (i) Das Axiom M und das Massenerhaltungsgesetz gelten für jedes Kontrollvolumen.
- (ii) Für jedes feste t und jedes $n \in S^3$ sei $\hat{\mathbf{t}}(\cdot, t, n)$ stetig differenzierbar in $\overline{\Omega}_t^\varphi$.
- (iii) Für jedes feste t und jedes $y \in \overline{\Omega}_t^\varphi$ sei $\hat{\mathbf{t}}(y, t, \cdot)$ stetig auf S^3 .

Dann existiert ein stetiges differenzierbares Tensorfeld, Cauchyscher Spannungstensor genannt, so dass

- (a) $\hat{\mathbf{t}}(y, t, n) = \hat{T}(y, t)n$ für $(y, t, n) \in \Omega_t^\varphi \times (t_0, T) \times S^3$ ist,
- (b) \hat{T} symmetrisch ist, das heißt $\hat{T}(y, t) = (\hat{T}(y, t))^T$ für $(y, t) \in \Omega_t^\varphi \times (t_0, T)$,
- (c) es gilt die Bewegungsgleichung

$$\text{div}_y \hat{T}(y, t) + f(y, t) = \rho(y, t) \dot{v}(y, t) \quad \text{für } (y, t) \in \Omega_t^\varphi \times (t_0, T). \quad (3.6)$$

Hierbei beschreibt $\rho \dot{v}$ die Trägheitskraft.

Bemerkung

Ob die Randbedingung $\hat{\mathbf{t}}(y, t, n) = \hat{T}(y, t)n = g(y, t)$ auf $\partial\Omega_t^\varphi$ erfüllbar ist für eine Kraftdichte g , muss durch Lösbarkeitssätze für partielle Differentialgleichungen geklärt werden.

Beweis

1. Schritt Vereinfachung der Schreibweise.

Wir führen die Kraftdichte

$$\hat{b}(y, t) = f(y, t) - \rho(y, t) \dot{v}(y, t) \quad (3.7)$$

ein.

Das Reynoldssche Transporttheorem (2.32) liefert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} l(\omega_t^\varphi, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) v(y, t) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} ((\rho v)^\cdot + \rho v \operatorname{div} v) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} (v \dot{\rho} + \dot{v} \rho + \rho v \operatorname{div} v) \, dy. \end{aligned}$$

Nochmalige Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems und Beachtung von (i) führt zu

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0,$$

woraus die Differentialgleichung

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (3.8)$$

folgt. Damit ist

$$\frac{d}{dt} l(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} \dot{v} \rho \, dy.$$

Die Relation (3.4) lautet dann

$$\int_{\omega_t^\varphi} \dot{v} \rho \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} f(y, t) \, dy + \int_{\partial \omega_t^\varphi} \hat{t}(y, t, n) \, da_t^\varphi,$$

woraus

$$0 = \int_{\omega_t^\varphi} \hat{b}(y, t) \, dy + \int_{\partial \omega_t^\varphi} \hat{t}(y, t, n) \, da_t^\varphi \quad (3.9)$$

folgt.

Wir halten die Zeit t fest und vereinbaren die Schreibweise

$$\begin{aligned} \hat{t}(y, t, n) &= \mathbf{t}(y, n), \\ \hat{b}(y, t) &= \mathbf{b}(y). \end{aligned}$$

Damit lautet (3.9)

$$0 = \int_{\omega_t^\varphi} \mathbf{b}(y) \, dy + \int_{\partial \omega_t^\varphi} \mathbf{t}(y, n) \, da_t^\varphi. \quad (3.10)$$

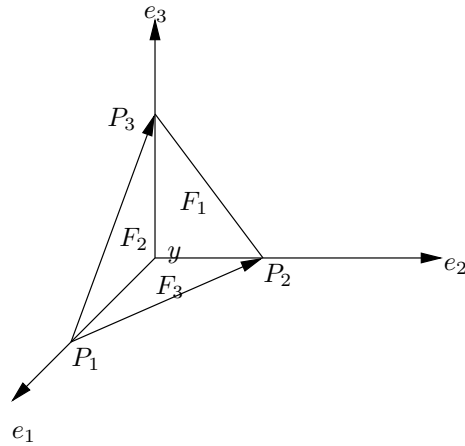


Abbildung 3.1: Tetraeder mit Flächen F_1, F_2, F_3

2. Schritt Konstruktion von T , Beweis von a).

Wir betrachten einen festen Punkt $y \in \Omega_t^\varphi$. Da Ω_t^φ offen ist, existiert ein Tetraeder $H \in \Omega_t^\varphi$ mit einem Eckpunkt y und den Seitenflächen $F_i, i = 1, 2, 3$, deren äußere Normalenvektoren $n_i = -e_i$ sind (siehe Abbildung 3.1).

Die vierte Seite F_0 besitzt einen äußeren Normalenvektor

$$n_0 = \sum_{i=1}^3 n_{i_0} e_i, \quad n_{i_0} > 0.$$

Es gilt, dass

$$\text{area } F_i = n_{i_0} \text{ area } F_0 \tag{3.11}$$

ist (siehe Lemma 14 im Anschluss an diesen Beweis).

Für $w_t^\varphi = H$ lautet (3.10)

$$\int_H b(y) \, dy + \int_{\partial H} \mathbf{t}(y, n) \, da_t^\varphi = 0. \tag{3.12}$$

In Komponentenschreibweise lautet (3.12)

$$\int_H \begin{pmatrix} b_1(y) \\ b_2(y) \\ b_3(y) \end{pmatrix} dy = - \sum_{i=1}^3 \int_{F_i} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(y, -e_i) \\ \mathbf{t}_2(y, -e_i) \\ \mathbf{t}_3(y, -e_i) \end{pmatrix} da_t^\varphi - \int_{F_0} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(y, n_0) \\ \mathbf{t}_2(y, n_0) \\ \mathbf{t}_3(y, n_0) \end{pmatrix} da_t^\varphi.$$

Da die Integranden stetig sind, können wir in jeder Zeile den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden:

Es gibt Punkte $\eta_{ij} \in F_i, i = 0, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$, so dass

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{y} \in H} |b_j(\tilde{y})| \text{ vol } H &\geq \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_j(\eta_{ij}, -e_i) \text{ area } F_i + \mathbf{t}_j(\eta_{0j}, n_0) \text{ area } F_0 \right| \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \text{area } F_0 \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_j(\eta_{ij}, -e_i) n_{i_0} + \mathbf{t}_j(\eta_{0j}, n_0) \right| \end{aligned}$$

ist.

Wir führen jetzt einen Grenzübergang aus, indem wir die Eckpunkte P_1, P_2, P_3 gleichmäßig auf den Achsen gegen den Eckpunkt y streben lassen. Dabei bleiben die Normalenvektoren ungeändert.

Es ist (nach Lemma 14 im Anschluss)

$$\sup_{\tilde{y} \in H} |b_j(\tilde{y})| \lim_{P_i \rightarrow y} \frac{\text{vol } H}{\text{area } F_0} = 0 = \left| \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}_j(y, -e_i) n_{i_0} + \mathbf{t}_j(y, n_0) \right|.$$

Folglich ist

$$-\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(y, -e_i) n_{i_0} = \mathbf{t}(y, n_0). \quad (3.13)$$

Es war $n_0 = \sum_{i=1}^3 n_{i_0} e_i$, $n_{i_0} > 0$ und (3.13) gilt für beliebiges $n_0 \in S^3$ mit $n_{i_0} > 0$, was durch geeignete Wahl der Punkte P_i erreicht werden kann.

Wir betrachten jetzt die Grenzwerte für $j = 1, 2, 3$ (entartetes Polyeder)

$$n_0 \rightarrow e_j, \text{ d.h. } n_{i_0} \rightarrow \delta_{ij} \quad (\text{Kroneckersymbol}).$$

Auf Grund der Stetigkeit folgt nach dem Grenzübergang in (3.13)

$$-\mathbf{t}(y, -e_j) = \mathbf{t}(y, e_j) \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (3.14)$$

und daher

$$-\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(y, -e_i) n_{i_0} \stackrel{(3.14)}{=} \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(y, e_i) n_{i_0} = \mathbf{t}(y, n_0) \quad n_{i_0} > 0. \quad (3.15)$$

Wir führen diese Überlegungen ebenfalls in Tetraedern aus, die an den Achsen gespiegelt sind, d.h. $n_{i_0} < 0$ ist erlaubt. Wir erhalten, dass (3.15) auch für beliebige $n_0 = n \in S^3$ gilt.

Somit folgt für ein beliebiges $n \in S^3$:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(y, e_i) n_i = \mathbf{t}(y, n). \quad (3.16)$$

Nun sind wir in der Lage T zu definieren: $T = (T_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ist die Matrix, deren Einträge

$$T_{ij}(y) = \mathbf{t}_i(y, e_j) \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (3.17)$$

sind.

Aus (3.16) folgt in der Tat

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(y, n) &= \sum_{j=1}^3 \mathbf{t}(y, e_j) n_j \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(y, e_1) n_1 + \mathbf{t}_1(y, e_2) n_2 + \mathbf{t}_1(y, e_3) n_3 \\ \mathbf{t}_2(y, e_1) n_1 + \mathbf{t}_2(y, e_2) n_2 + \mathbf{t}_2(y, e_3) n_3 \\ \mathbf{t}_3(y, e_1) n_1 + \mathbf{t}_3(y, e_2) n_2 + \mathbf{t}_3(y, e_3) n_3 \end{pmatrix} \\ &= T n \end{aligned} \quad (3.18)$$

3. Schritt (Beweis von c)

Wir setzen (3.17) in (3.10) ein und wenden den Divergenzsatz (1.32) an. Es ist

$$\int_{\omega_t^\varphi} b(y) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} T(y)n \, da_t^\varphi = \int_{\omega_t^\varphi} (b(y) + \operatorname{div}_y T(y)) \, dy = 0$$

für ein beliebiges Gebiet $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$.

Daher muss

$$\begin{aligned} b(y) + \operatorname{div}_y T(y) &= \hat{b}(y, t) + \operatorname{div}_y \hat{T}(y, t) \\ &= f(y, t) - \rho(y, t)\dot{v}(y, t) + \operatorname{div}_y \hat{T}(y, t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

sein und wir erhalten (3.6).

4. Schritt (Beweis von b)

Die Symmetrie von \hat{T} folgt aus der Voraussetzung (3.5).

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(\omega_t^\varphi, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} y \times \rho(y, t) v(y, t) \, dy \\ &\stackrel{(2.32)}{=} \int_{\omega_t^\varphi} (y \times \rho v)' + (y \times \rho v) \operatorname{div} v \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \dot{y} \times \rho v + y \times (\rho v)' + (y \times \rho v) \operatorname{div} v \, dy. \end{aligned}$$

Da $\dot{y} = v$ und $v \times \rho v = 0$ ist, erhalten wir

$$\frac{d}{dt} a(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} (y \times \rho \dot{v} + y \times \dot{\rho} v + (y \times \rho v) \operatorname{div} v) \, dy.$$

Beachten wir noch die Relation (3.8), dann erhalten wir (3.5) in folgender Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a(\omega_t^\varphi, t) &= \int_{\omega_t^\varphi} y \times \rho \dot{v} \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} y \times f(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} y \times \hat{T}(y, t)n \, da_t^\varphi. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Mit der Abkürzung (3.7)

$$\hat{b}(y, t) = f(y, t) - \rho(y, t) \dot{v}(y, t)$$

lautet (3.20)

$$\int_{\partial\omega_t^\varphi} (y \times \hat{T}(y, t)n) \, da_t^\varphi = - \int_{\omega_t^\varphi} y \times \hat{b}(y, t) \, dy. \tag{3.21}$$

Wir setzen zur Abkürzung wieder für festes t

$$\begin{aligned} \hat{T}(y, t) &= T(y), \\ \hat{b}(y, t) &= b(y) \end{aligned}$$

und rechnen die linke Seite von (3.21) aus:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\omega_t^\varphi} (y \times T(y)n) \, da_t^\varphi &= \int_{\partial\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} y_2 \sum_j T_{3j}n_j - y_3 \sum_j T_{2j}n_j \\ y_3 \sum_j T_{1j}n_j - y_1 \sum_j T_{3j}n_j \\ y_1 \sum_j T_{2j}n_j - y_2 \sum_j T_{1j}n_j \end{pmatrix} da_t^\varphi \\
&\stackrel{\text{Divergenzsatz}}{=} \int_{\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} (y_2 T_{3j} - y_3 T_{2j}) \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} (y_3 T_{1j} - y_1 T_{3j}) \\ \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j} (y_1 T_{2j} - y_2 T_{1j}) \end{pmatrix} dy \\
&= \int_{\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} \sum_j \left[\delta_{j2} T_{3j} - \delta_{j3} T_{2j} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{3j} - y_3 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{2j} \right] \\ \sum_j \left[\delta_{j3} T_{1j} - \delta_{j1} T_{3j} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{1j} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{3j} \right] \\ \sum_j \left[\delta_{j1} T_{2j} - \delta_{j2} T_{1j} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{2j} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_j} T_{1j} \right] \end{pmatrix} dy \\
&\stackrel{(3.19)}{=} \int_{\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} T_{32} - T_{23} \\ T_{13} - T_{31} \\ T_{21} - T_{12} \end{pmatrix} dy - \int_{\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} y_2 b_3 - y_3 b_2 \\ y_3 b_1 - y_1 b_3 \\ y_1 b_2 - y_2 b_1 \end{pmatrix} dy.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Relation (3.21)

$$\int_{\omega_t^\varphi} \begin{pmatrix} T_{32} - T_{23} \\ T_{13} - T_{31} \\ T_{21} - T_{12} \end{pmatrix} dy - \int_{\omega_t^\varphi} y \times \hat{b} \, dy = - \int_{\omega_t^\varphi} y \times \hat{b} \, dy,$$

woraus $T_{ij} = T_{ji}$ folgt.

Der Beweis ist damit unter Berücksichtigung des folgenden Lemmas abgeschlossen. \blacksquare

Lemma 14 (Geometrie des achsenparallelen Tetraeders H) Sei H ein achsenparalleles Tetraeder mit den vier Eckpunkten

$$P_0 = y, \quad P_i = y + v_i, \quad v_i = c_i \vec{e}_i, \quad c_i > 0$$

und den P_i gegenüberliegenden Seitenflächen F_i $1 \leq i \leq 3$ (siehe Abbildung 3.2).

Sei n_0 der äußere Einheitsnormalenvektor an F_0 . Dann gilt

$$n_{0i} \text{area} F_0 = \text{area} F_i. \quad (3.22)$$

Ist $c_1 = \hat{c}_1 h, c_2 = \hat{c}_2 h, c_3 = \hat{c}_3 h$, dann folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{vol} H}{\text{area} F_0} = 0. \quad (3.23)$$

Beweis

Die Seitenfläche F_0 wird durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= P_1 \vec{P}_2 = c_2 \vec{e}_2 - c_1 \vec{e}_1, \\
\vec{b} &= P_1 \vec{P}_3 = c_3 \vec{e}_3 - c_1 \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

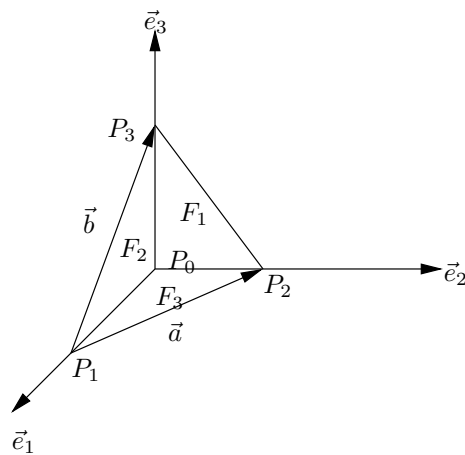


Abbildung 3.2: Das Tetraeder H

Der Einheitsnormalenvektor an F_0 lautet

$$n_0 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|},$$

seine Komponenten sind

$$n_{0i} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{e}_i}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} n_{01} |\vec{a} \times \vec{b}| &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{e}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -c_1 & c_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 = c_2 c_3, \\ n_{02} |\vec{a} \times \vec{b}| &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{e}_2 = c_1 c_3, \\ n_{03} |\vec{a} \times \vec{b}| &= c_1 c_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt (3.22):

$$n_{0i} \text{ area } F_0 = n_{0i} \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{1}{2} c_j c_k = \text{area } F_i, \quad j \neq k \neq i.$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \text{Vol } H &= \frac{\text{area } F_3 \cdot h \hat{c}_3}{3} = \frac{h^3}{6} \hat{c}_1 \hat{c}_2 \hat{c}_3, \\ \text{area } F_0 &= \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{h^2}{2} \sqrt{(\hat{c}_2 \hat{c}_3)^2 + (\hat{c}_1 \hat{c}_2)^2 + (\hat{c}_1 \hat{c}_3)^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt (3.23)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Vol } H}{\text{area } F_0} = 0.$$

■

Bemerkung

Falls die Gültigkeit des Massenerhaltungsgesetzes nicht vorausgesetzt wird, kann trotzdem eine Bewegungsgleichung hergeleitet werden:

- Es gelte das Axiom (3.4) mit $f = \rho \tilde{f}$.
- Es sei $\hat{i}(y, t, n) = \hat{T}(y, t)n$ (Cauchyscher Spannungssatz), dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}_y(\rho v \otimes v) = \rho \tilde{f} + \operatorname{div}_y \hat{T}. \quad (3.24)$$

Navier-Stokes Gleichungen

Wir hatten bisher folgende Bewegungsgleichungen hergeleitet:

- $\rho \dot{v} = \operatorname{div}_y \hat{T} + f(y, t)$ (Massenerhaltung gilt), (3.25)
- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{div}_y(\rho v \otimes v) = \operatorname{div}_y \hat{T} + \rho \tilde{f}$ (Massenerhaltung wird nicht vorausgesetzt). (3.26)

Beachten wir, dass $\dot{v} = v' + (\operatorname{grad}_y v) v$ (siehe (2.24)) gilt und

$$\operatorname{div}_y(\rho v \otimes v) = \rho v \operatorname{div} v + \operatorname{grad}(\rho v)v$$

ist (siehe (1.24) und (1.21)), dann können wir (3.25) und (3.26) folgendermaßen schreiben:

Falls Massenerhaltung gilt, dann ist

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung}) \quad (3.27)$$

und

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho (\operatorname{grad} v) v = \operatorname{div}_y \hat{T} + \rho \tilde{f}. \quad (3.28)$$

Wird Massenerhaltung nicht vorausgesetzt, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{grad}(\rho v)v + \rho v \operatorname{div} v = \operatorname{div}_y \hat{T} + \rho \tilde{f}. \quad (3.29)$$

Die Relationen (3.27) und (3.28) sind vier Gleichungen zur Bestimmung von zehn Unbekannten $(v_1, v_2, v_3, \hat{T}_{13}, \hat{T}_{23}, \hat{T}_{12}, \hat{T}_{11}, \hat{T}_{22}, \hat{T}_{33}, \rho)$.

(3.29) sind drei Gleichungen zur Bestimmung von v (drei Unbekannte), \hat{T} (9 Unbekannte) und ρ (1 Unbekannte), insgesamt 13 Unbekannte.

Es gibt zwei Möglichkeiten, um die Unbekannten zu bestimmen:

1. Hinzunahme weiterer Gleichungen, z.B. aus Energieerhaltungssätzen oder thermodynamischen Relationen.
2. Begrenzung auf Klassen von Materialien und Ausnutzung spezifischer Materialeigenschaften. Reduktion der Anzahl der Unbekannten.

Wir werden hier den zweiten Weg einschlagen, um die Navier-Stokes Gleichungen herzuleiten.

Zähe Flüssigkeiten

In diesem Fall erfolgt eine Kraftübertragung zwischen den Teilchen (Punkten) nur durch Druck und Reibung. Der Spannungstensor \hat{T} lässt sich in Druck- und Reibungsspannungen zerlegen

$$\hat{T} = -pI + T_R.$$

Die Druckspannungen sind richtungsunabhängig und werden mit Hilfe des skalaren Druckfeldes $p = p(y, t)$ beschrieben. Reibung tritt dann auf, wenn sich Teilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegen.

G.G. Stokes (1819-1903; irischer Physiker und Mathematiker in Cambridge) hat eine Reihe von Annahmen aufgestellt, die gestatten, T_R zu beschreiben.

- (1) T_R ist eine Funktion von $S = \frac{1}{2}(Dv + (Dv)^\top)$, das heißt $T_R = F(S)$.
- (2) F ist linear.
- (3) $F(QSQ^\top) = QF(S)Q^\top$ mit $QQ^\top = I$ (Invarianz bezüglich orthogonaler Transformationen kartesischer Koordinatensysteme, Tensorcharakter von \hat{T}), d.h. es liegt ein isotropes Medium vor.
- (4) $F(0) = 0$.

Satz 15 [5, Theorem 1.8.7, S. 45] Falls (1) bis (4) gelten, dann ist

$$\hat{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} v)I + 2\mu \frac{1}{2}(\operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} v)^\top) = -pI + \lambda \operatorname{tr} S I + 2\mu S \quad (3.30)$$

Hierbei sind λ und μ skalare Viskositätsparameter, die von thermodynamischen Größen abhängen können.

Bemerkung

In Kapitel 4, das der Elastizitätstheorie gewidmet ist, wird eine Beweismethode vorgestellt werden.

Setzen wir (3.30) in (3.28) bzw. (3.29) ein, so erhalten wir

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \operatorname{grad} v v = -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad} (\lambda \operatorname{div} v) + \operatorname{div} (\mu \operatorname{grad} v + \mu (\operatorname{grad} v)^\top) + \rho \tilde{f}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \operatorname{grad}(\rho v)v + \rho v \operatorname{div} v = -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} v) + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v + \mu (\operatorname{grad} v)^\top) + \rho \tilde{f}. \quad (3.32)$$

So sind (3.27) und (3.31) vier Gleichungen für die fünf Unbekannten v_1, v_2, v_3, p und ρ , wohingegen (3.32) drei Gleichungen für vier Unbekannte darstellen, falls ρ als bekannt vorausgesetzt wird.

Für Flüssigkeiten (kein Gas) ist ρ oft annähernd konstant. Wir sehen auch μ als konstant an.

In diesem Fall wird aus (3.27) und (3.31) das System der **Navier-Stokes Gleichungen**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} v v &= -\operatorname{grad} \frac{p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \Delta v + \tilde{f}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

da $\operatorname{div}((\operatorname{grad} v)^\top) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} v) = 0$ ist.

Dies sind vier Gleichungen für vier Unbekannte.

Liegt eine stationäre Bewegung (bzw. eine Strömung mit sehr geringen zeitlichen Veränderungen) vor, dann erhalten wir das System der stationären Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{\rho} \Delta v + \text{grad } v v + \text{grad } \frac{p}{\rho} &= \tilde{f}, \\ \text{div } v &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Bemerkung

Die Gleichungen (3.32) werden ebenfalls Navier-Stokes-Gleichungen genannt.

Spezialfall

Nichtviskose Flüssigkeiten weisen keine Reibungsspannungen auf.

Es ist

$$\hat{T} = -p I.$$

Für konstantes ρ wird (3.33) zu einem Differentialgleichungssystem erster Ordnung (Entartung)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad } v v &= -\text{grad } \frac{p}{\rho} + \tilde{f}, \\ \text{div } v &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung eines idealen Fluids und wird als Euler-Gleichung (konvektive Form) bezeichnet.

3.3 Energieerhaltungsgleichungen

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, ist die Anzahl der bisher betrachteten Gleichungen häufig nicht ausreichend, um die unbekanntenen Größen ρ , T und v zu bestimmen. Wir sehen uns jetzt an, wie man durch Energieerhaltungsgleichungen zusätzliche Relationen erhalten und weitere Größen, wie die Temperatur, berechnen kann.

Die Energie eines Systems setzt sich aus mehreren Termen zusammen: z.B. aus der inneren Energie, die sich auf das molekulare bzw. atomare Verhalten bezieht; die kinetische Energie, die die Zeitabhängigkeit (Geschwindigkeit) des Flusses beschreibt; die äußere Energie, die im Zusammenhang mit einwirkenden Kräften auftritt; die potentielle Energie, die z.B. von Verzerrungen bzw. Spannungen abhängt.

Wir betrachten zunächst folgende Energie, die auf thermodynamischen Überlegungen beruht.

Definition 26 (Totale Energie) Als totale Energie der Fluidpartikel im Teilgebiet $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ bezeichnen wir die Summe aus innerer und kinetischer Energie:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\omega_t^\varphi, t) &= \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \left(e(y, t) + \frac{1}{2} |v(y, t)|^2 \right) dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} E(y, t) dy \end{aligned} \quad (3.35)$$

mit
$$E(y, t) = \rho(y, t) \left(e(y, t) + \frac{1}{2} |v(y, t)|^2 \right).$$

Hierbei ist $e(y, t)$ eine genügend glatte innere Energiedichtefunktion, die häufig als Funktion von der Massendichte ρ , dem Druck p und der Temperatur θ ausgedrückt werden kann.

Nach dem ersten Gesetz der Thermodynamik (Axiom E) liegt Energieerhaltung (bzw. Energiegleichgewicht) vor, falls

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\omega_t^\varphi, t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} E(y, t) dy &= \int_{\omega_t^\varphi} \rho f \cdot v dy + \underbrace{\int_{\partial \omega_t^\varphi} T n \cdot v da_t^\varphi}_{\text{äußere Energie}} \\ &+ \underbrace{\int_{\omega_t^\varphi} \rho q dy - \int_{\partial \omega_t^\varphi} \vec{q} \cdot n da_t^\varphi}_{\text{Wärmeenergie}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ist. Hierbei ist q die Dichtefunktion der Wärmequellen, \vec{q} der Wärmefluss.

Lemma 15 Seien die Integranden in (3.36) stetige Funktionen. Die zu (3.36) gehörige Differentialgleichung hat folgende Gestalt:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(Ev) = \rho \tilde{f} \cdot v + \operatorname{div}(Tv) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}.$$

Ist

$$T = -pI + \lambda \operatorname{div} v I + 2\mu S \quad (\text{siehe (3.30), Navier-Stokes-Gleichungen}), \quad (3.37)$$

dann ist

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(Ev) = \rho \tilde{f} \cdot v - \operatorname{div}(pv) + \operatorname{div}(\lambda v \operatorname{div} v) + \operatorname{div}(2\mu Sv) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (3.38)$$

Beweis

Die linke Seite von (3.36) lautet:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\omega_t^\varphi, t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} E(y, t) \, dy \stackrel{(2.32)}{=} \int_{\omega_t^\varphi} [E'(y, t) + \operatorname{div}(Ev)] \, dy.$$

Wenden wir auf die rechte Seite von (3.36) den Divergenzsatz an und nutzen das Lokalisierungsprinzip, dann erhalten wir (3.38). ■

Wir leiten jetzt eine Differentialgleichung her, in der nur die zeitlichen Ableitungen von e auftreten.

Lemma 16 *Die Voraussetzungen von Satz 14 seien erfüllt, d.h. Impulserhaltung (Axiom M) und Massenerhaltung gelten. Dann lautet eine zu (3.36) gehörige modifizierte (lokale) Differentialgleichung:*

$$\begin{aligned} \rho \dot{e} &= T : \frac{1}{2}(Dv + (Dv)^\top) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q} \\ &= T : S + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Bemerkung:

Der Term $T : S$ stellt die spezifische Spannungsleistung dar.

Beweis:

Wir berechnen $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\omega_t^\varphi, t)$ nach dem Reynoldsschen Transporttheorem (2.35). Die einzelnen Summanden von $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(\omega_t^\varphi)$ lauten dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho e \, dy &= \int_{\omega_t^\varphi} ((\rho e)^\cdot + \rho e \operatorname{div} v) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} (e \underbrace{(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v)}_{=0} + \rho \dot{e}) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \rho \dot{e} \, dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \frac{1}{2}(\rho v \cdot v) \, dy &= \int_{\omega_t^\varphi} \left(\frac{1}{2}(\rho v \cdot v)^\cdot + \frac{1}{2} \rho v \cdot v \operatorname{div} v \right) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \left(\frac{1}{2}(\dot{\rho} v \cdot v + 2\rho \dot{v} \cdot v) + \frac{1}{2} \rho v \cdot v \operatorname{div} v \right) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \left(\frac{1}{2} \underbrace{(\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v)}_{=0} (v \cdot v) + \rho \dot{v} \cdot v \right) \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \rho \dot{v} \cdot v \, dy. \end{aligned}$$

Da $Tn \cdot v = n \cdot Tv = Tv \cdot n$ ist, erhalten wir

$$\int_{\omega_t^\varphi} (\rho \dot{e} + \rho \dot{v} \cdot v) \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} (f \cdot v + \operatorname{div}(Tv) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}) \, dy. \quad (3.40)$$

Da nach (3.6) $\operatorname{div} T = \rho \dot{v} - f$ und damit $\operatorname{div} T \cdot v = \rho \dot{v} \cdot v - f \cdot v$ ist, wird (3.40) umgeformt zu

$$\int_{\omega_t^\varphi} \rho \dot{e} \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} (-\operatorname{div} T \cdot v + \operatorname{div}(Tv) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}) \, dy. \quad (3.41)$$

Nun ist nach (1.26) unter Berücksichtigung von $T = T^\top$

$$\operatorname{div}(Tv) = \operatorname{div} T \cdot v + T : \operatorname{grad} v \quad (3.42)$$

und daher nimmt (3.41) die Gestalt

$$\int_{\omega_t^\varphi} \rho \dot{e} \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} (T : \operatorname{grad} v + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}) \, dy$$

an. Es folgt die Differentialgleichung

$$\rho \dot{e} = T : \frac{1}{2}(\operatorname{grad} v + (\operatorname{grad} v)^\top) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q},$$

wobei wegen der Symmetrie von T nur der symmetrische Anteil von $\operatorname{grad} v$ auftritt. ■

Navier-Stokes-Gleichung und die Energiegleichung

Wir diskutieren jetzt genauer die Verbindung der Energiegleichung (3.38) mit der Navier-Stokes-Gleichung.

Die Navier-Stokes-Gleichungen waren spezielle Bewegungsgleichungen, bei denen die Spannung durch

$$T = (-p + \lambda \operatorname{tr} S)I + 2\mu S(v) \quad (3.43)$$

gegeben ist. Wir hatten angenommen, dass (3.27) und (3.31) gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) &= 0 && \text{Kontinuitätsgleichung} \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(\operatorname{grad} v)v &= -\operatorname{grad} p + \operatorname{grad}(\lambda \operatorname{div} v) + \operatorname{div}(2\mu S(v)) + f && \text{Navier-Stokes-Gleichung} \end{aligned}$$

Das sind 4 Gleichungen zur Bestimmung der 5 Unbekannten ρ, v_1, v_2, v_3 und p . Die Energiebilanzgleichung liefert eine weitere Gleichung und lautet

Lemma 17 Die Voraussetzungen von Satz 14 seien erfüllt und (3.43) gelte. Weiterhin gelte die Energiebilanz (3.36), d.h. das erste Gesetz der Thermodynamik. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) = -p \operatorname{div} v + \lambda(\operatorname{div} v)^2 + 2\mu S : S + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}. \quad (3.44)$$

Beweis:

Wir wenden den Reynoldsschen Transportssatz (Relation (2.37)) auf (3.36) an:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho e \, dy &+ \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \left(\frac{1}{2} \rho v \cdot v \right) dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) \, dy + \int_{\omega_t^\varphi} \rho \dot{v} \cdot v \, dy \\ &= \int_{\omega_t^\varphi} (f \cdot v + \operatorname{div}(T v) + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}) \, dy. \end{aligned}$$

Wie im Beweis des vorigen Lemmas folgt

$$\int_{\omega_t^\varphi} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) \, dy = \int_{\omega_t^\varphi} (T : S + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}) \, dy.$$

Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \operatorname{div}(\rho e v) &= (-p + \lambda \operatorname{div} v) I : S + 2\mu S : S + \rho q - \operatorname{div} \vec{q} \\ &= -p \operatorname{div} v + \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu S : S + \rho q - \operatorname{div} \vec{q}. \end{aligned}$$

■

In der Gleichung (3.44) treten e und \vec{q} als neue Unbekannte auf, q wird als bekannt vorausgesetzt. Nimmt man an, dass konstitutive Beziehungen gelten, kann die Gleichung (3.44) z.B. genutzt werden, um die Temperatur bzw. den Druck zu berechnen.

Spezialfälle

1° Wir nehmen an, dass das Fouriersche Gesetz gilt.

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} \theta. \quad (3.45)$$

θ bezeichnet die absolute Temperatur, k ist der Wärmeleitkoeffizient. Dabei ist $k \geq 0$, $k = k(\theta)$. Sehr häufig wird angenommen, dass $k = \text{const}$ ist.

2° Es liege eine Gasströmung vor, d.h. man setzt voraus

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, \theta), \\ e &= e(\rho, \theta). \end{aligned}$$

Für ein ideales Gas ist

$$\begin{aligned} p &= R \theta \rho, & R \text{ ist eine Gaskonstante,} \\ e &= c_v \theta, & c_v \text{ ist eine Konstante.} \end{aligned}$$

In diesem Fall lautet die Gleichung (3.44)

$$\frac{\partial}{\partial t} (c_v \rho \theta) + \operatorname{div}(c_v \rho \theta v) + R \theta \rho \operatorname{div} v = \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu S : S + \rho q + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) \quad (3.46)$$

Dies ist eine Temperaturgleichung zur Bestimmung der Unbekannten θ .

3° Nehmen wir weiterhin an, dass konstante Materialparameter vorliegen:

$$\begin{aligned}c_v &= \text{const}, \\ \rho &= \text{const} \Rightarrow \text{div } v = 0, \\ k &= \text{const}, \\ \mu &= 0,\end{aligned}$$

dann nimmt (3.46) folgende Gestalt an:

$$\rho c_v \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v \cdot \nabla \theta \right) = \rho q + k \Delta \theta. \quad (3.47)$$

Die Gleichungen (3.46) bzw. (3.47) werden als Wärmeleitungsgleichungen bezeichnet.

3.4 Entropieprinzip

Wir haben im Abschnitt 3.3 das erste Gesetz der Thermodynamik genutzt, um Energiebilanzgleichungen aufzustellen. Wir betrachten jetzt das zweite Gesetz der Thermodynamik, in der als wesentliche Größe die Entropie auftritt.

Definition 27 Die Entropie eines Kontrollvolumens $\omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi$ ist zum Zeitpunkt t

$$H(\omega_t^\varphi, t) = \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \eta(y, t) \, dy,$$

wobei $\eta = \eta(y, t)$ die Entropiedichte bezeichnet.

Durch äußere Einwirkungen wird die Entropie geändert. Diese äußeren Einwirkungen werden wiederum durch Oberflächen- und Volumenintegrale beschrieben

$$\mathcal{B}(\omega_t^\varphi) = - \int_{\partial\omega_t^\varphi} \vec{b} \cdot n \, da_t^\varphi + \int_{\omega_t^\varphi} \rho b \, dy,$$

wobei \vec{b} der Entropie-Fluß und b eine skalare Volumendichtefunktion sind.

Zweiter Satz der Thermodynamik

Die Entropieproduktion

$$\begin{aligned} \Sigma(\omega_t^\varphi, t) &= \frac{d}{dt} H(\omega_t^\varphi, t) - \mathcal{B}(\omega_t^\varphi, t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \eta(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} \vec{b} \cdot n \, da_t^\varphi - \int_{\omega_t^\varphi} \rho b \, dy \end{aligned} \quad (3.48)$$

ist stets eine nichtnegative Größe, d.h.

$$\Sigma(\omega_t^\varphi) \geq 0 \quad \forall \omega_t^\varphi \subset \Omega_t^\varphi.$$

Die Relation

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t^\varphi} \rho(y, t) \eta(y, t) \, dy + \int_{\partial\omega_t^\varphi} \vec{b} \cdot n \, da_t^\varphi - \int_{\omega_t^\varphi} \rho b \, dy \geq 0$$

wird Entropie-Ungleichung genannt. Die Entropie ist damit keine Erhaltungsgröße. Die zu (3.48) gehörenden lokalen Differentialgleichungen können analog zu den Energieerhaltungsgleichungen mit Hilfe des Reynoldsschen Transporttheorems hergeleitet werden. Sie lauten: Falls $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0$, dann ist

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \vec{b} - \rho b \geq 0 \quad \text{materielle Ableitung,} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\eta v) + \operatorname{div} \vec{b} - \rho b \geq 0 \quad \text{räumliche Ableitung.} \quad (3.50)$$

Spezialfall

Der Entropiefluss \vec{b} und die Entropiedichte b werden häufig in Zusammenhang mit dem Wärmefluss \vec{q} und der Wärmedichtefunktion q gesehen

$$\begin{aligned}\vec{b} &= \frac{1}{\Theta} \vec{q} \\ b &= \frac{1}{\Theta} q.\end{aligned}$$

Hierbei ist Θ die absolute Temperatur. Die Entropiegleichung (3.49) nimmt in diesem Fall die Form

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{\Theta} - \rho \frac{q}{\Theta} \geq 0 \quad (3.51)$$

an. Diese Ungleichung (3.51) wird Clausius-Duhem Ungleichung genannt.

Wir fassen jetzt die Gleichungen zusammen, die wir aus den verschiedenen Erhaltungsgleichungen (Masse, Impuls, Energie) gewonnen hatten und diskutieren deren Zusammenhang mit der Entropiegleichung (3.49). Seien \vec{f} und q gegebene Größen. Dann liefern uns die Erhaltungsgleichungen 5 Differentialgleichungen und die Symmetrie von T

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} v = 0 \quad (\text{Massenerhaltung}) \quad (3.52)$$

$$\rho \dot{v} - \operatorname{div} T = f \quad (\text{Impulserhaltung}) \quad (3.53)$$

$$T = T^\top \quad (\text{Drehimpulserhaltung}) \quad (3.54)$$

$$\rho \dot{e} + \operatorname{div} \vec{q} - T : S = q\rho \quad (\text{Energieerhaltung}) \quad (3.55)$$

zur Bestimmung der 13 Unbekannten $(\rho, v_1, v_2, v_3, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{23}, T_{33}, q_1, q_2, q_3, e)$. Werden konstitutive Relationen für T, e und q hinzugefügt, $T = T(\rho, v, \Theta), \vec{q} = \vec{q}(\rho, \Theta), e = e(\rho, \Theta)$, z.B.

$$T = (-p + \lambda \operatorname{tr} S)I + 2\mu S \quad (3.56)$$

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} \Theta \quad (3.57)$$

$$p = p(\rho, \Theta) \quad (3.58)$$

$$e = e(\rho, \Theta), \quad (3.59)$$

dann reduziert sich die Anzahl der Unbekannten auf 5, nämlich auf $(\rho, v_1, v_2, v_3, \Theta)$. Man sagt, die Menge der Felder $(\rho, \vec{v}, \Theta, \vec{f}, q)$, die (3.52)-(3.55) und konstitutive Beziehungen (formuliert z.B. in (3.56) - (3.59)) genügen, beschreiben einen thermodynamischen Prozess. Darüber hinaus muss der zweite Hauptsatz erfüllt sein, d.h.

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \vec{b} - \rho b \geq 0 \quad (3.60)$$

Dies kann durch weitere geeignete konstitutive Beziehungen für η, \vec{b} und b erreicht werden und wird durch das Entropie-Prinzip postuliert.

Entropie-Prinzip

[9, S.131] Die konstitutiven Beziehungen für $T, \vec{q}, p, e, \vec{b}, b, \eta$ müssen so aufgestellt werden, dass die Entropie-Ungleichung (3.60) für jeden thermodynamischen Prozess gilt. Es ist ein wichtiges Ziel der Thermodynamik, solche konstitutiven Beziehungen zu finden.

Kapitel 4

Elastostatik

In diesem Kapitel werden wir das Verhalten von elastischen Festkörpern untersuchen. Wesentlich ist hier, dass die einwirkenden Kräfte zeitunabhängig sein sollen und angenommen wird, dass die ablaufenden Prozesse als stationäre Prozesse aufgefasst werden können. Dynamische Probleme der Elastizitätstheorie werden hier nicht behandelt.

4.1 Momenten-Gleichgewicht im stationären Fall

Wir erinnern zunächst an die im Abschnitt 2.1 eingeführten Grundbegriffe wie Deformation φ , das Verschiebungsfeld u und die Verzerrungstensoren C , B und E :

$$\begin{aligned}\varphi : \Omega &\rightarrow \Omega^\varphi = \varphi(\Omega), \\ \varphi(x) &= x + u(x), \\ C &= (\nabla \varphi)^\top \nabla \varphi, \\ B &= \nabla \varphi (\nabla \varphi)^\top, \\ E &= \frac{1}{2}(C - I).\end{aligned}$$

Wir führen stationäre Oberflächen- und Volumenkräfte auf $\omega^\varphi \subset \Omega^\varphi$ ein:

$$\begin{aligned}F^\varphi(\omega^\varphi) &= \int_{\omega^\varphi} f^\varphi(y) \, dy, \\ G^\varphi(\gamma^\varphi) &= \int_{\gamma^\varphi} g^\varphi(y) \, da^\varphi, \\ \gamma^\varphi &= \bar{\omega}^\varphi \cap \Gamma_1^\varphi, \quad \Gamma_1^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi.\end{aligned}$$

Das Spannungsprinzip von Euler und Cauchy (Axiom M) lautet im stationären Fall:

Axiom Stat-M

Gleichgewicht liegt vor, falls ein Vektorfeld $t^\varphi = t^\varphi(y, n^\varphi) : \Omega^\varphi \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (der Cauchysche Spannungsvektor) existiert, so dass

$$0 = \int_{\omega^\varphi} f^\varphi(y) \, dy + \int_{\partial\omega^\varphi} t^\varphi(y, n^\varphi) \, da^\varphi, \quad (\text{Stat-M1})$$

$$0 = \int_{\omega^\varphi} y \times f^\varphi(y) \, dy + \int_{\partial\omega^\varphi} y \times t^\varphi(y, n^\varphi) \, da^\varphi \quad (\text{Stat-M2})$$

für ein beliebiges Teilgebiet $\omega^\varphi \subset \Omega^\varphi$ gilt.

Der entsprechende Cauchysche Spannungssatz mit der stationären Gleichgewichtsrelation lautet:

Satz 16 (Spannungssatz) *Wir nehmen an*

- (i) *Das Axiom Stat-M gelte.*
- (ii) *$\varphi : \Omega \rightarrow \Omega^\varphi$ ist eine C^1 -Deformation.*
- (iii) *$f^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist stetig.*
- (iv) *$\mathfrak{t}^\varphi(\cdot, n^\varphi)$ ist stetig differenzierbar auf $\overline{\Omega}^\varphi$ für jedes $n^\varphi \in S^3$.*
- (v) *$\mathfrak{t}^\varphi(y, \cdot)$ ist stetig auf S^3 für jedes $y \in \Omega^\varphi$.*

Dann existiert ein stetig differenzierbares Tensorfeld

$$T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

mit

$$(a) \quad T^\varphi(y)n^\varphi = \mathfrak{t}^\varphi(y, n^\varphi) \quad \text{für alle } (y, n^\varphi) \in \Omega^\varphi \times S^3, \quad (4.1)$$

$$(b) \quad T^\varphi(y) = (T^\varphi(y))^T \quad \text{für alle } y \in \overline{\Omega}^\varphi,$$

(c) *es gilt die Gleichgewichtsrelation*

$$\operatorname{div}^\varphi T^\varphi(y) + f^\varphi(y) = 0. \quad (4.2)$$

Die partielle Differentialgleichung (4.2) stimmt mit der „stationären Bewegungsgleichung (3.6)“ überein.

Das Randwertproblem und das Prinzip der virtuellen Arbeit (schwache Formulierung)

Bisher haben wir nur die angreifenden Volumenkräfte mit der Dichte f einbezogen. Die Berücksichtigung der Randkräfte führt zu folgendem Randwertproblem in Ω^φ :

Finde ein symmetrisches $T^\varphi = T^\varphi(y)$, $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass gilt

$$-\operatorname{div}^\varphi T^\varphi(y) = f^\varphi(y) \quad \text{in } \Omega^\varphi, \quad (4.3)$$

$$T^\varphi(y)n^\varphi = g^\varphi(y) \quad \text{auf } \Gamma_1^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi. \quad (4.4)$$

Satz 17 *Das Randwertproblem (4.3), (4.4) ist „formal“ äquivalent zu einer schwachen Formulierung (Prinzip der virtuellen Arbeit):*

Man finde ein $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass gilt

$$\int_{\Omega^\varphi} T^\varphi(y) : D^\varphi w^\varphi(y) \, dy = \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi(y) \cdot w^\varphi(y) \, dy + \int_{\Gamma_1^\varphi} g^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi \quad (4.5)$$

für alle $w^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$, $w^\varphi \in \tilde{V}^\varphi = \{w^\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}^\varphi) : w^\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega^\varphi \setminus \overline{\Gamma}_1^\varphi\}$.

Bemerkungen

- Die Bezeichnung „formal“ äquivalent heißt, dass wir stillschweigend annehmen, dass die Lösung von (4.5) genügend glatt ist, so dass $\text{div}^\varphi T^\varphi$ im klassischen Sinn existiert.
- Als Funktionenraum V^φ wählt man eigentlich folgenden Sobolevraum:

$$V^\varphi = H^1(\Omega^\varphi, \Gamma_1^\varphi) = \{w^\varphi \in H^1(\Omega^\varphi) : \text{spur } w^\varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega^\varphi \setminus \bar{\Gamma}_1^\varphi\}.$$

Hier ist $\text{spur } w^\varphi$ die Einschränkung von w^φ auf den Rand (siehe [13, §8]).
 Der Raum V^φ ist die Abschließung von \tilde{V}^φ in der Sobolevnorm

$$\|w^\varphi\|_{V^\varphi} = \left(\int_{\Omega^\varphi} (w^\varphi)^2 \, dy + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^\varphi} (\partial_i w^\varphi)^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}},$$

vorausgesetzt der Rand von $\partial\Omega^\varphi$ ist durch Lipschitz-stetige Funktionen beschreibbar.

Beweis

- a) Wir nehmen an, T^φ sei eine stetig differenzierbare Lösung von (4.3), (4.4). Wir multiplizieren (4.3) skalar mit einem Element $w^\varphi \in \tilde{V}^\varphi$ und integrieren über Ω^φ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varphi} -\text{div } T^\varphi \cdot w^\varphi \, dy &= \int_{\Omega^\varphi} \left(-\text{div}^\varphi(T^{\varphi\top} w^\varphi) + T^\varphi : D^\varphi w^\varphi \right) \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega^\varphi} -T^{\varphi\top} w^\varphi \cdot n^\varphi \, da^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} T^\varphi : D^\varphi w^\varphi \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega^\varphi} -T^\varphi n^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} T^\varphi : D^\varphi w^\varphi \, dy \\ &= - \int_{\Gamma_1^\varphi} T^\varphi n^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} T^\varphi : D^\varphi w^\varphi \, dy \\ &= \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot w^\varphi \, dy. \end{aligned}$$

Setzen wir die Randbedingung (4.4), $T^\varphi n^\varphi = g^\varphi$ auf Γ_1^φ ein, dann erhalten wir (4.5).

- b) Wir nehmen an, T^φ sei eine stetig differenzierbare Lösung von (4.5). Da w^φ auf $\partial\Omega^\varphi \setminus \bar{\Gamma}_1^\varphi$ verschwindet, lautet (4.5):

$$\int_{\Omega^\varphi} T^\varphi(y) : D^\varphi w^\varphi(y) \, dy = \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi(y) \cdot w^\varphi(y) \, dy + \int_{\partial\Omega^\varphi} g^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi.$$

Es ist
$$T^\varphi : D^\varphi w^\varphi = \text{div}^\varphi(T^{\varphi\top} w^\varphi) - w^\varphi \cdot \text{div } T^\varphi,$$

woraus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varphi} (\text{div}^\varphi(T^{\varphi\top} w^\varphi) - w^\varphi \cdot \text{div}^\varphi T^\varphi) \, dy &\stackrel{\text{Divergenz-}}{=} \int_{\partial\Omega^\varphi} T^\varphi n^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi - \int_{\Omega^\varphi} w^\varphi \cdot \text{div}^\varphi T^\varphi \, dy \\ &= \int_{\partial\Omega^\varphi} g^\varphi \cdot w^\varphi \, da^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot w^\varphi \, dy \end{aligned}$$

folgt.

Damit ist

$$\int_{\Omega^\varphi} (-\operatorname{div}^\varphi T^\varphi - f^\varphi) \cdot w^\varphi \, dy + \int_{\partial\Omega^\varphi} (T^\varphi n^\varphi - g^\varphi) \cdot w^\varphi \, da^\varphi = 0$$

für alle $w^\varphi \in \tilde{V}^\varphi$.

Aus einem Fundamental-Lemma der Variationsrechnung (siehe unten) folgt, dass

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}^\varphi T^\varphi &= f^\varphi && \text{in } \Omega^\varphi, \\ T^\varphi n^\varphi &= g^\varphi && \text{auf } \Gamma_1^\varphi \end{aligned}$$

ist. ■

Lemma 18 (Fundamental-Lemma der Variationsrechnung) Sei Ω ein beschränktes, genügend glatt berandetes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$ und Γ eine Teilmenge von $\partial\Omega$, so dass $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ offen und nicht leer ist. Weiterhin sei $\vec{f} \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $\vec{g} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Falls

$$\int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, da = 0 \quad \forall \vec{v} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \vec{v}|_{\Gamma} = \vec{0}, \quad (4.6)$$

dann ist $\vec{f}(x) = \vec{0}$ für $x \in \Omega$ und $\vec{g}(x) = \vec{0}$ für $x \in \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$.

Beweis

Wir nehmen an, dass ein Punkt $x_0 \in \Omega$ existiert, so dass $\vec{f}(x_0) \neq \vec{0}$ ist. Wir wählen eine Kugelumgebung $K_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ auf der $\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) > 0$ ist. Weiterhin wählen wir eine spezielle Funktion $\vec{v} \in C_0^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, nämlich $\vec{v} = w_\varepsilon(x) \vec{f}(x_0)$. Hierbei ist (siehe Abbildung 4.1):

$$w_\varepsilon(x) = \begin{cases} e \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}\right) & \text{für } x \in K_\varepsilon(x_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

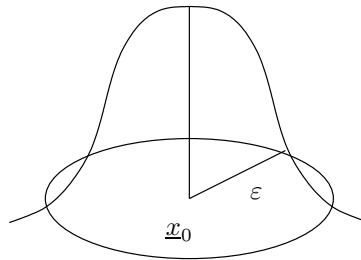


Abbildung 4.1: Hutfunktion $\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x - x_0|^2}\right)$

Wir bemerken, dass $w_\varepsilon(x_0) = e e^{-1} = 1$, $w_\varepsilon(x)|_{\partial K_\varepsilon(x_0)} = e e^{-\infty} = 0$ und $w_\varepsilon(x) \geq 0$ ist.

Für dieses \vec{v} ist

$$\int_{\Omega} \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, dx + \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, da = \int_{K_\varepsilon(x_0)} \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x_0) w_\varepsilon(x) \, dx > 0.$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme (4.6) erhalten und es muss $\vec{f}(x) \equiv \vec{0}$ in Ω sein.

Die Relation (4.6) lautet jetzt:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, da = 0 \quad \forall \vec{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \text{ mit } \vec{v}|_\Gamma = \vec{0}. \quad (4.7)$$

Sei $x_1 \in \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}$ und $\vec{g}(x_1) \neq \vec{0}$. Wir gehen wie oben vor und wählen eine Kugel $K_\varepsilon(x_1)$ mit $K_\varepsilon(x_1) \cap \bar{\Gamma} = \emptyset$ und $\vec{g}(x) \cdot \vec{g}(x_1) > 0$ auf $K_\varepsilon(x_1) \cap \partial\Omega$. Wir betrachten die vektorwertige Funktion $\vec{v}(x) = w_\varepsilon(x)\vec{g}(x_1)$ aus dem Raum der Testfunktionen.

Es ist:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, da = \int_{K_\varepsilon(x_1) \cap \partial\Omega} w_\varepsilon(x)\vec{g}(x_1) \cdot \vec{g}(x) \, da > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.7) und es folgt $\vec{g}(x) = \vec{0}$ auf $\partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}$. ■

Bemerkung

Falls $\Gamma = \partial\Omega$ ist, dann ist $\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \vec{v} \, da = 0$ und wir können keine Aussage über \vec{g} treffen.

Die Gleichgewichtsrelation und das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Referenzkonfiguration

Im nichtstationären Fall (Strömungsmechanik) hatten wir die Bewegungsgleichungen in der aktuellen Konfiguration Ω^φ betrachtet (Eulersche Betrachtungsweise).

In der Festkörpermechanik (stationärer Fall) ist es günstig, die Lagrangesche Betrachtungsweise anzuwenden. Hierzu müssen die Gleichgewichtsrelation (4.2) bzw. das Prinzip der virtuellen Arbeit (schwache Formulierung) in die Referenzkonfiguration transformiert werden.

Wir erinnern an die Piolatransformation (1.33), (1.34) $P : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$P T^\varphi(x^\varphi) = T^\varphi(\varphi(x)) \text{Cof}(D\varphi(x)) = T(x). \quad (4.8)$$

Definition 28 Sei $T^\varphi(y) = T^\varphi(x^\varphi)$ der durch den Spannungssatz definierte Spannungstensor (4.1), (3.17). Dann wird

$$T(x) = P T^\varphi(x^\varphi)$$

erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor genannt.

Satz 18 Falls der Spannungstensor T^φ dem Randwertproblem (4.3), (4.4) genügt, dann ist der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor Lösung des folgenden Randwertproblems in der Referenzkonfiguration Ω :

$$-\text{div}T(x) = \det D\varphi(x) f^\varphi(\varphi(x)) =: f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.9)$$

$$T(x)n = \det D\varphi \|(D\varphi)^{-\top} n\|_{\mathbb{E}^3} g^\varphi(\varphi(x)) =: g(x) \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (4.10)$$

Das Randwertproblem (4.9), (4.10) ist „formal“ äquivalent zum schwach formulierten Problem: Finde einen Tensor $T : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$, so dass

$$\int_{\Omega} T(x) : Dw(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot w(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} g(x) \cdot w(x) \, da$$

für alle $w \in \tilde{V}$, $\tilde{V} = \{w \in C^\infty(\Omega) : w = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_1}\}$.

Weiterhin ist

$$D\varphi(x)T(x)^\top = T(x)D\varphi(x)^\top, \quad (4.11)$$

d.h. T ist im Allgemeinen nicht symmetrisch.

Beweis

Satz 9 besagt, dass (4.9) gilt. Weiterhin gelten (1.36) und (1.37) auf dem Rand eines beliebigen Teilgebietes $A \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} T(x)n(x) \, da &= \int_{\partial A^\varphi} T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) \, da^\varphi \\ &= \int_{\partial A} T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) \|\text{Cof } D\varphi n(x)\|_{\mathbb{E}^3} \, da. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Integranden stetig sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} T(x)n(x) &= T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) \|\text{Cof } D\varphi n(x)\|_{\mathbb{E}^3} \\ &= g^\varphi(x^\varphi) \|\text{Cof } D\varphi n(x)\|_{\mathbb{E}^3} \\ &= \det D\varphi \|D\varphi(x)^{-\top} n(x)\|_{\mathbb{E}^3} g^\varphi(\varphi(x)), \end{aligned}$$

woraus (4.10) folgt.

Die Äquivalenz des klassischen und des schwach formulierten Randwertproblems wird analog zum Satz 17 gezeigt. Die Relation (4.11) folgt unmittelbar aus der Definition der Piolatransformation:

$$\begin{aligned} T &= PT^\varphi = T^\varphi \det D\varphi (D\varphi)^{-\top}, \\ T(D\varphi)^\top &= T^\varphi \det D\varphi, \\ D\varphi T^\top &= T^\varphi \det D\varphi, \end{aligned}$$

das heißt $D\varphi T$ ist symmetrisch, aber T im Allgemeinen nicht. ■

Um einen symmetrischen Piola-Kirchhoff-Spannungstensor zu erhalten, wird die obige Definition modifiziert:

Definition 29 Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ist definiert als

$$\Sigma(x) = (D\varphi(x))^{-1}T(x) = (D\varphi(x))^{-1}T^\varphi(x^\varphi)\text{Cof}(D\varphi(x)).$$

Bemerkung

$D\varphi^{-1}T$ ist symmetrisch, da

$$T \stackrel{(4.11)}{=} D\varphi T^\top (D\varphi)^{-\top} \text{ und } D\varphi^{-1}T = T^\top (D\varphi)^{-\top} = (D\varphi^{-1}T)^\top$$

ist.

Aus Satz 18 folgt unmittelbar der folgende Satz:

Satz 19 Falls der Spannungstensor T^φ dem Randwertproblem (4.3), (4.4) genügt, dann ist der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor Σ Lösung des Randwertproblems

$$-\text{div}(D\varphi\Sigma) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.12)$$

$$D\varphi\Sigma n = g(x) \quad \text{auf } \Gamma_1, \quad (4.13)$$

wobei f und g durch (4.9) und (4.10) gegeben sind.

Bemerkung

In (4.12) und (4.13) hängen f und g ebenfalls von der Deformation φ ab. Hier wird jetzt eine Vereinfachung der Situation vorgenommen. Man nimmt an, dass „tote“ Lasten vorliegen, d.h. f und g hängen nicht von der Deformation φ ab. Das ist sinnvoll, falls

$$\det D\varphi \stackrel{\text{Satz 2}}{=} \det(I + Du) = 1 + \operatorname{tr} Du + \frac{1}{2}[(\operatorname{tr} Du)^2 - \operatorname{tr}(Du)^2] + \det Du \approx 1$$

ist, d.h. der Verschiebungsgradient Du kleine Einträge besitzt. Beispiele für tote Lasten sind Schwerkraft, Luft- und Wasserdruck.

Die Gleichgewichtsrelation (4.12) besteht aus drei partiellen Differentialgleichungen für neun Unbekannte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{13}, \Sigma_{22}, \Sigma_{23}$ und Σ_{33} . Daher benötigen wir wieder Materialgleichungen, um die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Wir werden uns auf elastische Materialien konzentrieren.

4.2 Elastische Materialien

Elastische Materialien sind dadurch charakterisiert, dass der Cauchy'sche Spannungstensor T^φ nur von x und $D\varphi(x)$ abhängt, d.h.

$$T^\varphi(\varphi(x)) = R(x, D\varphi(x)).$$

R wird Antwortfunktion (response function) genannt. Dies wollen wir etwas genauer beschreiben. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^{3 \times 3} &= \{A : A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det A > 0\}, \\ \mathcal{S}^{3 \times 3} &= \{A : A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, A \text{ ist symmetrisch}\}, \\ \mathcal{S}_>^{3 \times 3} &= \{A : A \in \mathcal{S}^{3 \times 3}, A \text{ ist positiv definit}\}, \\ \mathcal{O}_+^{3 \times 3} &= \{A : A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, A \text{ ist orthogonal}, \det A > 0\}. \end{aligned}$$

Definition 30 Ein Material, welches das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ einnimmt, ist elastisch, falls eine Abbildung

$$R : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathcal{S}^{3 \times 3}$$

existiert, so dass der Cauchy'sche Spannungstensor T^φ der deformierten Konfiguration Ω^φ in der Referenzkonfiguration folgendermaßen beschrieben werden kann

$$T^\varphi(\varphi(x)) = R(x, D\varphi(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (4.14)$$

Die Abbildung R wird Antwortfunktion zum Cauchy'schen Spannungstensor T^φ genannt, die Gleichung (4.14) ist eine Materialgleichung bzw. konstitutive Gleichung.

Bemerkungen

- (i) Die Relation (4.14) besagt, dass die Menge der zulässigen Deformationen für elastische Materialien eingeschränkt wird.
- (ii) Ist ein Material elastisch, dann können der erste und zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor wie folgt beschrieben werden:

$$T(x) = T^\varphi(x^\varphi) \det D\varphi(x) (D\varphi(x))^{-\top} = R(x, D\varphi(x)) \text{Cof } D\varphi(x) = \hat{T}(x, D\varphi(x)), \quad (4.15)$$

$$\Sigma(x) = (D\varphi(x))^{-1} T(x) = (D\varphi(x))^{-1} \hat{T}(x, D\varphi(x)) = \hat{\Sigma}(x, D\varphi(x)). \quad (4.16)$$

Die Relationen

$$\begin{aligned} T(x) &= \hat{T}(x, D\varphi(x)) && \text{für } x \in \bar{\Omega}, \\ \Sigma(x) &= \hat{\Sigma}(x, D\varphi(x)) && \text{für } x \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

sind ebenfalls konstitutive Beziehungen, $\hat{T}, \hat{\Sigma}$ sind entsprechende Antwortfunktionen. T und Σ lassen sich allein aus dem aktuellen Deformationszustand herleiten. Sie sind nicht von der Verformungsgeschichte abhängig.

Häufig wird zwischen homogenen und inhomogenen elastischen Materialien unterschieden. Homogene Materialien sind solche, deren Eigenschaften für alle Punkte $x \in \bar{\Omega}$ gleich sind.

Definition 31 Ein elastisches Material heißt homogen, falls

$$T^\varphi(\varphi(x)) = R(D\varphi(x)) \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

gilt.

Im anderen Fall spricht man von inhomogenen elastischen Materialien.

Folgerung

Für homogene elastische Materialien gilt

$$\begin{aligned} T(x) &= \hat{T}(D\varphi(x)), \\ \Sigma(x) &= \hat{\Sigma}(D\varphi(x)). \end{aligned}$$

\hat{T} und $\hat{\Sigma}$ werden experimentell bestimmt.

Eine Grundforderung wird an die Materialgesetze gestellt. Die konstitutiven Gleichungen als observable physikalische Relationen müssen unabhängig vom Beobachter sein, d.h. die observablen Größen müssen invariant bezüglich der Wahl eines kartesischen Koordinatensystems sein (Tensorcharakter). Man spricht in diesem Fall vom Prinzip der materiellen Objektivität.

Prinzip der materiellen Objektivität

Die observable Größe sei der Cauchysche Spannungsvektor

$$t^\varphi(\varphi(x), n^\varphi).$$

Wir beschreiben die Situation, indem wir die deformierte Konfiguration $\bar{\Omega}^\varphi$ um den Ursprung drehen, was durch die Abbildung $\psi = Q\varphi$ realisiert wird.

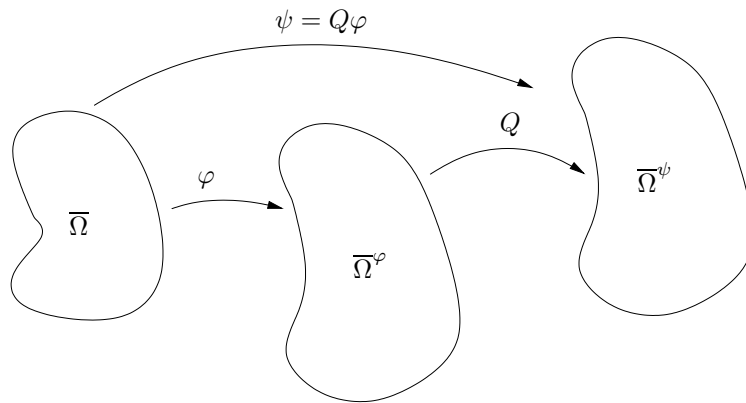


Abbildung 4.2: Deformation und Drehung

Axiom (Prinzip) der materiellen Objektivität

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Referenzkonfiguration, φ und ψ seien C^1 -Deformationen mit $\psi = Q\varphi$, $Q \in O_+^{3 \times 3}$, $Q Q^T = I$, $\det Q = 1$. Dann gilt für den Cauchyschen Spannungsvektor

$$t^{Q\varphi}(Q\varphi(x), Qn) = t^\psi(\psi(x), Qn) = Q t^\varphi(\varphi(x), n) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, n \in S^3, Q \in O_+^{3 \times 3}. \quad (4.17)$$

Folgerung

Es gelte (4.17). Dann hat die Antwortfunktion R , die durch (4.14) definiert wurde, folgende Eigenschaft:

$$R(x, QF) = QR(x, F)Q^T \quad \text{für alle } F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \quad (4.18)$$

und

$$\hat{T}(x, D\psi(x)) = \hat{T}(x, QD\varphi(x)) = Q\hat{T}(x, D\varphi(x)), \quad (4.19)$$

$$\hat{\Sigma}(x, D\psi(x)) = \hat{\Sigma}(x, QD\varphi(x)) = \hat{\Sigma}(x, D\varphi(x)) \quad (4.20)$$

für alle C^1 -Deformationen φ .

Beweis

Es ist

$$T^\psi(\psi(x))Qn = \mathbf{t}^\psi(\psi(x), Qn) = Q\mathbf{t}^\varphi(\varphi(x), n) = QT^\varphi(\varphi(x))n \quad \forall n \in S^3,$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} T^\psi(\psi(x))Q &= QT^\varphi(\varphi(x)), \\ T^\psi(\psi(x)) &= QT^\varphi(\varphi(x))Q^\top, \\ T^\psi(\psi(x)) &= R(x, D\psi) = R(x, QD\varphi) = QR(x, D\varphi)Q^\top. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Für jedes $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ existiert eine C^1 -Deformation φ mit $D\varphi = F$ (setze $\varphi(x) = Fx$). Daher folgt aus (4.21) unmittelbar (4.18).

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \hat{T}(x, D\psi(x)) &= \hat{T}(x, QD\varphi) \stackrel{(4.15)}{=} R(x, QD\varphi(x))\text{Cof}(QD\varphi(x)) \\ &\stackrel{(4.21)}{=} QR(x, D\varphi)Q^\top \det(QD\varphi)(QD\varphi)^{-\top} \\ &= QR(x, D\varphi) \det(QD\varphi)Q^\top Q^{-\top}(D\varphi)^{-\top} \\ &\stackrel{(4.15)}{=} Q\hat{T}(x, D\varphi(x)) \end{aligned} \quad (4.22)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(x, D\psi(x)) &= (QD\varphi(x))^{-1}\hat{T}(x, D\psi) = (D\varphi(x))^{-1}Q^{-1}Q\hat{T}(x, D\varphi(x)) \\ &= \hat{\Sigma}(x, D\varphi(x)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Damit haben wir (4.19) und (4.20) gezeigt. \blacksquare

Wir bemerken, dass aus den obigen Überlegungen folgt: Falls (4.18) gilt, dann gilt (4.17), das heißt, das Axiom der materiellen Objektivität ist erfüllt. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 32 (Objektivität der Antwortfunktion) Die Antwortfunktion R eines elastischen Materials ist objektiv, falls

$$R(x, QF) = QR(x, F)Q^\top$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$, $Q \in O_+^{3 \times 3}$, $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ ist.

Satz 20 (Objektivität eines elastischen Materials) Für ein elastisches Material mit den Antwortfunktionen R, \hat{T} und $\hat{\Sigma}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) R ist objektiv.

$$(ii) \quad \hat{T}(x, QF) = Q\hat{T}(x, F) \quad \forall Q \in O_+^{3 \times 3}, F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, x \in \bar{\Omega} \quad (4.24)$$

$$(iii) \quad \hat{\Sigma}(x, QF) = \hat{\Sigma}(x, F) \quad \forall Q \in O_+^{3 \times 3}, F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, x \in \bar{\Omega} \quad (4.25)$$

(iv) Es existiert eine Abbildung:

$$\hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times S_{>}^{3 \times 3} \rightarrow S^{3 \times 3}$$

mit

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \hat{\Sigma}(x, F^\top F) \quad \forall F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, x \in \bar{\Omega}. \quad (4.26)$$

Beweis [4, Th. 3.3-1, S. 101]

Wir zeigen nur: aus (iii) folgt (iv) und aus (iv) folgt (i).

(iii)→(iv):

Seien F und G aus $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ mit $F^\top F = G^\top G$. Dann ist $Q = G F^{-1} \in O_+^{3 \times 3}$ und

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \hat{\Sigma}(x, QF) = \hat{\Sigma}(x, G).$$

Daraus folgt

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \tilde{\Sigma}(x, F^\top F).$$

(iv)→(i):

Da

$$\hat{T}(x, QF) \stackrel{(4.22)}{=} R(x, QF) \text{Cof}(QF)$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} R(x, QF) &= \hat{T}(x, QF) (\text{Cof}(QF))^{-1} \\ &\stackrel{(4.24)}{=} QF \hat{\Sigma}(x, QF) (\text{Cof}(QF))^{-1} \\ &= QF \hat{\Sigma}(x, (QF)^\top QF) \underbrace{(\text{Cof}(QF))^{-1}}_{= (Q \text{Cof } F)^{-1}} \\ &= QF \tilde{\Sigma}(x, F^\top F) (\text{Cof } F)^{-1} Q^{-1} \\ &\stackrel{(4.26)}{=} QF \hat{\Sigma}(x, F) (\text{Cof } F)^{-1} Q^{-1} \\ &\stackrel{(4.16)}{=} QF F^{-1} \hat{T}(x, F) (\text{Cof } F)^{-1} Q^{-1} \\ &\stackrel{(4.15)}{=} QR(x, F) Q^{-1} \\ &= QR(x, F) Q^\top. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\hat{T}(x, QF) = QR(x, F) Q^\top Q \text{Cof } F = Q \hat{T}(x, F),$$

das heißt (i) gilt. ■

Die Aussage (iv) besagt: Der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, D\varphi) = \tilde{\Sigma}(x, D\varphi^\top D\varphi) \tag{4.27}$$

hängt vom rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor $C = D\varphi^\top D\varphi$ ab. Die Relation (4.27) ist damit eine Spannungs-Verzerrungs-Relation.

Isotrope elastische Materialien

Eine intuitive Beschreibung der Isotropie lautet: Das Materialverhalten ist das gleiche „in allen Richtungen“. Mathematisch kann dies folgendermaßen ausgedrückt werden:

Definition 33 (isotropes elastisches Material) *Ein elastisches Material ist isotrop in einem Punkt $x \in \Omega$, falls für die Spannungs-Antwortfunktion R gilt:*

$$R(x, F Q) = R(x, F) \quad \forall Q \in O_+^{3 \times 3}, F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}, x \in \bar{\Omega}. \quad (4.28)$$

Mit anderen Worten: Ein elastisches Material ist isotrop, falls die Antwortfunktion unabhängig von einer Drehung der Referenzkonfiguration um einen beliebigen Punkt $x \in \bar{\Omega}$ ist. Die Antwortfunktion R wird in diesem Fall auch isotrop genannt.

Folgerung

Die Antwortfunktionen des ersten und zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors für isotrope elastische Materialien haben die Eigenschaften:

$$\hat{T}(x, F Q) = \hat{T}(x, F) Q, \quad (4.29)$$

$$\hat{\Sigma}(x, F Q) = Q^\top \hat{\Sigma}(x, F) Q \quad (4.30)$$

für alle $Q \in O_+^{3 \times 3}$, $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$, $x \in \bar{\Omega}$.

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} \hat{T}(x, D \varphi Q) &\stackrel{(4.15)}{=} R(x, D \varphi Q) \text{Cof}(D \varphi Q) \\ &\stackrel{(4.28)}{=} R(x, D \varphi) (\text{Cof } D \varphi) Q \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \hat{T}(x, D \varphi) Q. \end{aligned}$$

Für $F = D \varphi$ folgt (4.29).

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(x, D \varphi Q) &= (D \varphi Q)^{-1} \hat{T}(x, D \varphi Q) = Q^{-1} \hat{\Sigma}(x, D \varphi) Q \\ &= Q^\top \hat{\Sigma}(x, D \varphi) Q. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für $F = D \varphi$ die Relation (4.30). ■

Mit Hilfe des folgenden Satzes erhalten wir eine genauere Beschreibung der Spannungs-Antwortfunktion R für isotrope elastische Materialien.

Satz 21 (Rivlin-Eriksen Darstellungssatz, 1955) *Die Antwortfunktion R ist objektiv und isotrop genau dann, wenn*

$$R(x, F) = \tilde{R}(x, F F^\top) = \sum_{i=0}^2 \beta_i(x, \iota_1(B), \iota_2(B), \iota_3(B)) B^i \quad (4.31)$$

für alle $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ und $B = F F^\top$. Hierbei sind $\iota_1(B) = \text{tr } B$, $\iota_2(B) = \text{tr Cof } B$, $\iota_3(B) = \det B$ die Hauptinvarianten der symmetrischen Matrix B .

Der Beweis von Satz 21 ist in [4, S. 109 ff] zu finden

Man beachte, dass $B = D \varphi D \varphi^\top$ der linke Cauchy-Green-Verzerrungstensor ist, falls $D \varphi = F$ gesetzt wird.

Folgerung

Es gilt

$$R(x, F^\top) = \tilde{R}(x, F^\top F) = \sum_{i=0}^2 \beta_i(x, \iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) C^i, \quad (4.32)$$

wobei $C = F^\top F$ ist.

Aus dem Satz von Rivlin-Eriksen folgt eine Beschreibung des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors Σ mit Hilfe des rechten Cauchy-Green Verzerrungstensors $C = (D\varphi)^\top D\varphi$.

Satz 22 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine Referenzkonfiguration, die aus isotropem elastischen Material besteht. Weiterhin nehmen wir an, dass das Prinzip der materiellen Objektivität gilt.

Dann ist

$$\Sigma(x) = \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x, \iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) (C(x))^i, \quad (4.33)$$

wobei $C = (D\varphi)^\top D\varphi$ ist und $\iota_i(C)$, $i = 1, 2, 3$, die Hauptinvarianten von C sind. Die Koeffizienten $\gamma_i : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind skalarwertig.

Beweis

Es ist

$$\Sigma(x) \stackrel{(4.16)}{=} \hat{\Sigma}(x, D\varphi) \stackrel{(4.26)}{=} \tilde{\Sigma}(x, D\varphi^\top D\varphi) = \tilde{\Sigma}(x, C) = \hat{\Sigma}(x, \sqrt{C}), \quad (4.34)$$

da $C \in S_{>}^{3 \times 3}$ und $\sqrt{C} \in S_{>}^{3 \times 3}$ sind, das heißt es ist $(\sqrt{C})^\top \sqrt{C} = (\sqrt{C})^2 = D\varphi^\top D\varphi$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}(x, \sqrt{C}) &\stackrel{(4.15), (4.16)}{=} (\sqrt{C})^{-1} R(x, \sqrt{C}) \operatorname{Cof} \sqrt{C} \\ &= \det \sqrt{C} (\sqrt{C})^{-1} R(x, \sqrt{C}) (\sqrt{C})^{-\top} \\ &\stackrel{(4.31)}{=} \det \sqrt{C} (\sqrt{C})^{-1} \tilde{R}(x, C) (\sqrt{C})^{-1} \\ &\stackrel{(4.32)}{=} \sqrt{\iota_3(C)} (\sqrt{C})^{-1} \left[\sum_{i=0}^2 \beta_i(\iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) C^i \right] (\sqrt{C})^{-1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Da

$$\begin{aligned} (\sqrt{C})^{-1} (\sqrt{C})^{-1} &= C^{-1}, \\ (\sqrt{C})^{-1} C (\sqrt{C})^{-1} &= I, \\ (\sqrt{C})^{-1} C^2 (\sqrt{C})^{-1} &= C \end{aligned}$$

ist, lässt sich (??) mit Hilfe von (4.35) beschreiben:

$$\Sigma(x) = \sqrt{\iota_3(C)} (\beta_0 C^{-1} + \beta_1 I + \beta_2 C). \quad (4.36)$$

Weiterhin liefert uns der Satz von Cayley-Hamilton (Satz 4)

$$C^{-1} = \frac{1}{\iota_3(C)} (\iota_2(C) I - \iota_1(C) C + C^2).$$

Damit wird aus (4.36)

$$\begin{aligned}\Sigma(x) &= \sqrt{\iota_3(C)} \left(\left(\frac{\iota_2(C)}{\iota_3(C)} \beta_0 + \beta_1 \right) I + \left(\beta_2 - \frac{\iota_1(C)}{\iota_3(C)} \beta_0 \right) C + \frac{1}{\iota_3(C)} \beta_0 C^2 \right) \\ &= \gamma_0 I + \gamma_1 C + \gamma_2 C^2,\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \gamma_0(x, \iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) = \sqrt{\iota_3(C)} \left(\beta_0 \frac{\iota_2(C)}{\iota_3(C)} + \beta_1 \right), \\ \gamma_1 &= \gamma_1(x, \iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) = \sqrt{\iota_3(C)} \left(-\beta_0 \frac{\iota_1(C)}{\iota_3(C)} + \beta_2 \right), \\ \gamma_2 &= \gamma_2(x, \iota_1(C), \iota_2(C), \iota_3(C)) = \sqrt{\iota_3(C)} \left(\frac{\beta_0}{\iota_3(C)} \right).\end{aligned}$$

■

Bemerkung:

Die Spannungs-Verzerrungsrelation (4.33) ist i.A. eine nichtlineare Beziehung (Es treten Potenzen bis zum Grad 5 auf).

Die konstitutiven Gleichungen in der Nähe der Referenzkonfiguration

Für $\varphi = \text{id}$, d.h. $\varphi(x) = x$ und $D\varphi = I$ beschreiben wir die Spannungen in der Referenzkonfiguration:

$$\begin{aligned}\Sigma(x) &= T^\varphi(x^\varphi) = T^\varphi(x) = T(x) \\ &= \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x, 3, 3, 1) I = pI,\end{aligned}$$

mit $p = \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x, 3, 3, 1)$. Das heißt, die entstehende Restspannung ist ein Druck. Falls die Restspannung verschwindet, spricht man von einem natürlichen Zustand.

Wir untersuchen nun die Situation, wenn wir uns in der Nähe der Referenzkonfiguration befinden.

Es ist

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, C) = \tilde{\Sigma}(x, I + 2E),$$

wobei $E = \frac{1}{2}(C - I)$ der Greensche-St. Venant Verzerrungstensor und $C = D\varphi^\top D\varphi$ sind.

Wir betrachten

$$\tilde{\Sigma}(x, I + 2E) = \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x, \iota_1(I + 2E), \iota_2(I + 2E), \iota_3(I + 2E))(I + 2E)^i$$

und sehen uns eine Taylorentwicklung der Koeffizienten γ_i für kleine E und festes x an. Ziel ist, eine lineare Abhängigkeit zwischen Σ und E zu finden.

Satz 23 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine Referenzkonfiguration, die aus isotropem elastischen Material besteht. Es gelte das Prinzip der materiellen Objektivität. Weiterhin seien die Koeffizienten γ_i in der Darstellung (4.33) nach $\iota = (\iota_1, \iota_2, \iota_3)$ stetig differenzierbar. Dann existieren Funktionen $p, \lambda, \mu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, C) = -p(x)I + \lambda(x) \operatorname{tr} E(x)I + 2\mu(x)E(x) + o(x, E(x)) \quad (4.37)$$

gilt.

Beweis

Es ist

$$\Sigma(x) = \sum_{i=0}^2 \gamma_i(x, \iota(I + 2E))(I + 2E)^i. \quad (4.38)$$

Wir betrachten folgende Taylor-Darstellung der differenzierbaren Koeffizienten γ_i für festes x :

$$\begin{aligned} \gamma_i(x, \iota(I + 2E(x))) &= \gamma_i \circ \iota(I + 2E) = \gamma_i \circ \iota(I) + (\gamma_i \circ \iota)'(I)2E + o(2E) \\ &\stackrel{\text{Satz 3 Kettenregel}}{=} \gamma_i(x, \iota(I)) + \gamma_i'(x, \iota(I))\iota'(I)2E + o(2E) \\ &= \gamma_i(x, \iota(I)) + \gamma_i'(x, \iota(I))[\iota(I + 2E) - \iota(I) - o(2E)] + o(2E). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \iota(I) &= (\iota_1(I), \iota_2(I), \iota_3(I)) = (3, 3, 1), \\ \iota_1(I + 2E) &= \operatorname{tr}(I + 2E) = 3 + 2 \operatorname{tr} E, \\ \iota_2(I + 2E) &= \frac{1}{2}[(\operatorname{tr}(I + 2E))^2 - \operatorname{tr}(I + 2E)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(3 + 2 \operatorname{tr} E)^2 - \operatorname{tr}(I + 4E + 4E^2)] \\ &= 3 + 4 \operatorname{tr} E + o(\|E\|), \\ \iota_3(I + 2E) &= 1 + 2 \operatorname{tr} E + o(\|E\|). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \gamma_i(x, \iota(I + 2E)) &= \gamma_i(x, 3, 3, 1) + D\gamma_i(x, 3, 3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \operatorname{tr} E + o(\|E\|) \\ 4 \operatorname{tr} E + o(\|E\|) \\ 2 \operatorname{tr} E + o(\|E\|) \end{pmatrix} + o(2E) \\ &= \gamma_i(x, 3, 3, 1) + \alpha_i(x, 3, 3, 1)\operatorname{tr} E(x) + o(\|E\|). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Setzen wir (4.39) in (4.38) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Sigma(x) &= (\gamma_0(x, 3, 3, 1) + \alpha_0(x, 3, 3, 1)\operatorname{tr} E(x))I \\ &\quad + (\gamma_1(x, 3, 3, 1) + \alpha_1(x, 3, 3, 1)\operatorname{tr} E(x))(I + 2E) \\ &\quad + (\gamma_2(x, 3, 3, 1) + \alpha_2(x, 3, 3, 1)\operatorname{tr} E(x))(I + 4E + 4E^2) + o(E) \\ &= [\gamma_0(x, 3, 3, 1) + \gamma_1(x, 3, 3, 1) + \gamma_2(x, 3, 3, 1)]I \\ &\quad + (\alpha_0(x, 3, 3, 1) + \alpha_1(x, 3, 3, 1) + \alpha_2(x, 3, 3, 1))\operatorname{tr} E(x)I \\ &\quad + (2\gamma_1(x, 3, 3, 1) + 4\gamma_2(x, 3, 3, 1))E + o(E) \\ &= -p(x)I + \lambda(x) \operatorname{tr} E(x)I + 2\mu(x)E(x) + o(E). \end{aligned}$$

■

Folgerung

Falls die Referenzkonfiguration im natürlichen Zustand ist, das heißt $-p(x) = 0$, dann ist

$$\Sigma(x) = \lambda(x) \operatorname{tr} E(x)I + 2\mu(x)E(x) + o(E(x)).$$

Falls das Material homogen ist, dann sind $\lambda(x) = \lambda$ und $\mu(x) = \mu$ Konstanten. Diese werden Lamé-Konstanten genannt.

Bemerkung:

Der Darstellungssatz von Rivlin-Erickson kann auch auf die isotropen Reibungsspannungen T_R bei Navier-Stokes-Flüssen angewandt werden. Dort war u.a. gefordert worden, dass T_R durch eine isotrope Antwortfunktion F beschrieben werden kann,

$$\begin{aligned} T_R &= F(S), \quad S = \frac{1}{2}(Dv + Dv^\top), \\ F(QSQ^\top) &= QF(S)Q^\top, \quad QQ^\top = I. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Dies führt auf die Darstellung von $F(S)$ analog zu (4.31)

$$F(S) = \beta_0 I + \beta_1 S + \beta_2 S^2,$$

$\beta_i = \beta_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \beta_i(S)$, λ_i sind die Eigenwerte von S .

Ist F zusätzlich linear - wie für T_R gefordert -, dann ergibt sich

$$F(S) = \alpha \operatorname{tr} SI + \beta S.$$

Für $\alpha = \lambda$ und $\beta = 2\mu$ erhalten wir schließlich die Aussage von Satz 15.

Die Lamé-Konstanten

Die Spannungs-Verzerrungsrelation

$$\Sigma(x) = \lambda \operatorname{tr} E(x)I + 2\mu E(x) + o(E(x)) \quad (4.41)$$

für homogene, isotrope elastische Materialien beruht auf der Kenntnis der Lamé-Konstanten λ und μ . Diese müssen experimentell bestimmt werden. Um sie zu erhalten geht man von geometrisch einfachen Referenzkonfigurationen aus, wie Kugel, Quader, Kreiszylinder. Außerdem betrachtet man einfache Deformationen, die durch Druck, Scherung oder axiale Drehung hervorgerufen werden.

Wir beschreiben zunächst wie die Spannungs-Verzerrungsrelation bei einer bestimmten Familie von C^{-1} -Deformationen sowohl in der Referenzkonfiguration Ω als auch im deformierten Gebiet Ω^φ aussehen.

Lemma 19 Sei Ω eine Referenzkonfiguration im natürlichen Zustand aus homogenen, isotropen, elastischem Material. Wir betrachten eine Familie von Deformationen $\{\varphi^\varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ der Form

$$\varphi^\varepsilon(x) = x + \varepsilon Gx + r(\varepsilon, x).$$

Hierbei ist $G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine Matrix mit konstanten Einträgen, $r(\varepsilon, x)$, $D_x r(\varepsilon, x)$ und $(D_x)^2 r(\varepsilon, x)$ seien von der Ordnung $o(\varepsilon, x)$. Dann gilt in der Referenzkonfiguration Ω :

$$\Sigma^\varepsilon(x) = \varepsilon[\lambda(\operatorname{tr} G)I + \mu(G + G^\top)] + o(\varepsilon, x)$$

und in $\Omega^{\varphi^\varepsilon}$:

$$T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) = \varepsilon[\lambda(\operatorname{tr} G)I + \mu(G + G^\top)] + o(\varepsilon, x).$$

Beweis

Es ist $D\varphi^\varepsilon(x) = I + \varepsilon G + o(\varepsilon, x)$. Daher ist in Ω

$$\begin{aligned} C^\varepsilon(x) &= (D\varphi^\varepsilon)^\top D\varphi^\varepsilon \\ &= [I + \varepsilon G^\top + o(\varepsilon, x)][I + \varepsilon G + o(\varepsilon, x)] \\ &= I + \varepsilon(G^\top + G) + o(\varepsilon, x), \\ E^\varepsilon(x) &= \frac{1}{2}(C^\varepsilon(x) - I) = \frac{\varepsilon}{2}(G^\top + G) + o(\varepsilon, x), \\ \Sigma^\varepsilon(x) &= \lambda \operatorname{tr} E^\varepsilon(x)I + 2\mu E^\varepsilon(x) + o(E^\varepsilon(x)) \\ &= \lambda\varepsilon(\operatorname{tr} G)I + \mu\varepsilon(G^\top + G) + o(\varepsilon, x). \end{aligned}$$

In Ω^φ gilt nach (4.8)

$$T^\varphi(\varphi(x)) = T(x)(\operatorname{Cof} D\varphi)^{-1} = D\varphi \Sigma(x)(\operatorname{Cof} D\varphi)^{-1}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) &= D\varphi^\varepsilon(x)\Sigma^\varepsilon(x)\frac{1}{\det(D\varphi^\varepsilon(x))}(D\varphi^\varepsilon(x))^\top \\ &= [I + \varepsilon G + o(\varepsilon, x)][\lambda\varepsilon(\operatorname{tr} G)I + \mu\varepsilon(G^\top + G) + o(\varepsilon, x)] \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{\det(I + \varepsilon G + o(\varepsilon, x))} \right] (I + \varepsilon G^\top + o(\varepsilon, x)). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Wir erinnern an die Formeln (1.13) und (1.14)

$$\begin{aligned} \det(I + B) &= 1 + \operatorname{tr} B + \iota_2(B) + \iota_3(B) \\ &= 1 + \operatorname{tr} B + o(B). \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{1+a} = \frac{1}{1-(-a)} = 1 + (-a) + (-a)^2 + (-a)^3 + \dots$$

für reelles a mit $|a| < 1$.

Damit wird für $B = \varepsilon G + o(\varepsilon, x)$, $\frac{1}{\det(I+B)} = \frac{1}{1+a}$ mit $a = \varepsilon \operatorname{tr} G + o(\varepsilon, x)$, $|a| < 1$, und schließlich

$$\frac{1}{(1+a)} = 1 - \varepsilon \operatorname{tr} G + o(\varepsilon, x).$$

Daher können wir (4.42) wie folgt schreiben

$$T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) = \varepsilon[\lambda(\operatorname{tr} G)I + \mu(G^\top + G)] + o(\varepsilon, x).$$

■

Wir beschreiben jetzt Experimente, die zur Bestimmung von λ und μ führen.

1. Experiment zur Bestimmung des Kompressionsmoduls $\kappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$.

Sei $\Omega = B_1(0)$ die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 . Eine gleichmäßige Kompression wird durch eine Familie von Deformationen beschrieben

$$\varphi^\varepsilon(x) = x - \varepsilon x + o(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Es ist $G = -I$ und

$$\begin{aligned} T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) &= \varepsilon[-\lambda 3I - 2\mu I] + o(\varepsilon) \\ &= -\varepsilon \pi I + o(\varepsilon) = -pI + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

mit $\pi = 3\lambda + 2\mu$ und $p = \varepsilon \pi$.

Damit wird

$$\pi = 3\lambda + 2\mu = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{\text{Druck}}{\varepsilon} [\text{Nm}^{-2}].$$

$\kappa = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ wird Kompressionsmodul genannt (bulk module).

2. Experiment zur Bestimmung des Schermoduls μ .

Sei $\Omega = (0, -1) \times (0, 1)^2$ ein Würfel. Die Deformation

$$\varphi^\varepsilon(x) = x + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon, x)$$

beschreibt eine Scherung (siehe Abbildung 4.3).

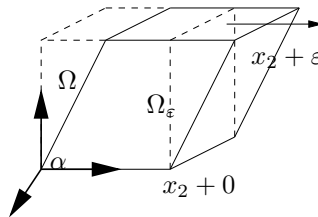


Abbildung 4.3: Scherung

In diesem Fall ist

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) = \varepsilon \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon, x).$$

Es folgt, dass

$$T_{23}^{\varphi^\varepsilon} = T_{32}^{\varphi^\varepsilon} = \mu \varepsilon,$$

bzw.

$$\mu = \frac{T_{23}^{\varphi^\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\text{Scherspannung}}{\frac{1}{\tan \alpha}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ist. Die Spannung wird in $\text{Nm}^{-2} = \left[\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} \right]$ gemessen.

3. Experiment zur Bestimmung der Poissonzahl.

Sei Ω ein Kreiszyylinder um die x_3 -Achse mit dem Durchmesser d und der Höhe h .

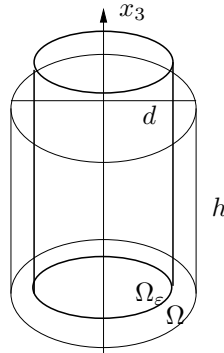


Abbildung 4.4: Zug auf Kreiszyylinder

Es wird ein Zug (Druck) in Richtung der x_3 -Achse ausgeführt (siehe Abbildung 4.4)

$$\varphi^\varepsilon(x) = x + \varepsilon \begin{pmatrix} -\nu x_1 \\ -\nu x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + o(\varepsilon, x).$$

Die reelle Zahl $\nu > 0$ wird Poissonzahl (Querkontraktionszahl) genannt.

In diesem Fall ist

$$G = \begin{pmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} T^{\varphi^\varepsilon}(\varphi^\varepsilon(x)) &= \varepsilon \left[\lambda(1 - 2\nu)I + \mu \begin{pmatrix} -2\nu & 0 & 0 \\ 0 & -2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] + o(\varepsilon, x) \\ &= \varepsilon A + o(\varepsilon, x), \end{aligned}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda(1 - 2\nu) - 2\mu\nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1 - 2\nu) - 2\mu\nu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1 - 2\nu) - 2\mu \end{pmatrix} + o(\varepsilon, x)$$

ist. Eine Spannung sollte nur in der x_3 -Richtung auftreten, das heißt $\lambda(1 - 2\nu) - 2\mu\nu = 0$.

Daher ist

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Da $\mu > 0$ und $3\lambda + 2\mu > 0$, folgt $\lambda + \mu > 0$ und die Definition von ν ist sinnvoll.

ν wird wie folgt bestimmt:

$$\nu = \frac{\frac{d-d^\varepsilon}{d}}{\frac{h^\varepsilon-h}{h}} = \frac{\varepsilon\nu}{\varepsilon}.$$

Die Komponente

$$A_{33} = \lambda(1 - 2\nu) - 2\mu = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E,$$

wird Young Modul bzw. Elastizitätsmodul E genannt.

Wie die Materialkoeffizienten λ, μ und ν, E zusammenhängen, zeigt folgende Tabelle:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \\ \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{array} \right\}$$

Weiterhin geben wir Lamé-Konstanten für einige homogene isotrope elastische Materialien an.

	E (10^{10}N/m^2)	ν	λ (10^{10}N/m^2)	μ (10^{10}N/m^2)	$\frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$ (10^{10}N/m^2)
Stahl	21	0.28	10	8.2	16
Eisen	20	0.28	9.9	7.8	15
Kupfer	11	0.34	8.7	4.1	11
Bronze	10	0.31	6.2	3.8	8.8
Aluminium	7.0	0.34	5.6	2.6	7.3
Glas	5.5	0.25	2.2	2.2	3.7
Nickel	2.2	0.30	1.3	0.85	1.8
Blei	1.8	0.44	4.6	0.63	5.0
Gummi	0.037	0.485	0.40	0.012	0.41

1GPa= 10^9N/m^2

Bemerkungen

- Ein elastisches Material wird inkompressibel genannt, falls sich im 1. Experiment der Radius der Kugel unter gleichmäßigem Druck nicht ändert.

In diesem Fall ist

$$\varepsilon = \frac{p}{3\lambda + 2\mu} \approx 0,$$

das heißt $3\lambda + 2\mu$ ist sehr groß ($\lambda \rightarrow \infty$).

Die Inkompressibilität kann auch mit Hilfe der Poissonzahl ausgedrückt werden:

$$\nu = \nu(\lambda, \mu) = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \nu(\lambda, \mu) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1}{2}.$$

Materialien mit $\lambda \gg \mu$ (z.B. Gummi) sind näherungsweise inkompressibel.

- Das dritte Experiment führt zu folgender linearen Spannungs-Verzerrungsrelation

$$T_{33}^{\varphi^\varepsilon} = \varepsilon E + o(\varepsilon, x),$$

wobei $\varepsilon = \frac{h^\varepsilon - h}{h}$ ist.

Der Elastizitätsmodul E beschreibt den Anstieg der Geraden $E = \tan \alpha$.

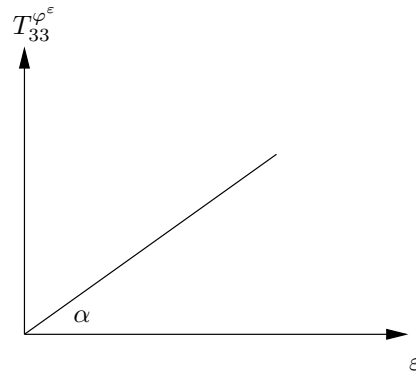


Abbildung 4.5: $E = \tan \alpha$

St. Venant-Kirchhoff Materialien

Falls wir die Terme höherer Ordnung in (4.41) vernachlässigen, erhalten wir eine Spannungs-Verzerrungsrelation, die von St. Venant 1844 und Kirchhoff 1852 vorgeschlagen wurde

$$\Sigma(x) = \lambda \operatorname{tr} E(x)I + 2\mu E(x). \quad (4.43)$$

Hierbei sind λ und μ konstant.

Der Verzerrungstensor E kann mit Hilfe des Verschiebungsfeldes u ausgedrückt werden

$$E = E(u) = \frac{1}{2}(Du + (Du)^\top + (Du)^\top Du). \quad (4.44)$$

Wir modifizieren jetzt das Randwertproblem (4.12), (4.13) zur Bestimmung der Unbekannten φ und Σ :

$$-\operatorname{div}(D\varphi(x)\Sigma(x)) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.45)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \bar{\Gamma}_1, \quad (4.46)$$

$$D\varphi(x)\Sigma(x)n = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_1. \quad (4.47)$$

Setzen wir die konstitutive Beziehung (4.43) in das Randwertproblem (4.45), (4.46), (4.47) ein, so erhalten wir mit $\varphi_0(x) = x$ folgendes Randwertproblem:

Finde ein Verschiebungsfeld u , so dass für gegebenes f und g

$$-\operatorname{div}((I + Du)(\lambda \operatorname{tr} E(u)(x)I + 2\mu E(u)(x))) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.48)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{für } x \in \Gamma_0, \quad (4.49)$$

$$(I + Du(x))(\lambda \operatorname{tr} E(u)(x)I + 2\mu E(u)(x))n(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \Gamma_1 \quad (4.50)$$

ist. Dies ist ein nichtlineares Randwertproblem. So treten z.B. Terme der Gestalt $\operatorname{div}(Du(Du)^\top Du)$ auf.

4.3 Das linearisierte Elastizitätsproblem

Wir linearisieren (4.48), (4.49) indem wir $E(u)$ durch

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}((Du)^\top + Du), \quad (4.51)$$

$\Sigma(u)$ durch

$$\sigma(u) = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (4.52)$$

und den Faktor $I + Du$ durch I ersetzen.

Bemerkung

Die linearisierten Tensoren $\varepsilon(u)$ und $\sigma(u)$ sind keine physikalischen Verzerrungen bzw. Spannungen, approximieren diese jedoch, falls Du genügend klein ist.

Definition 34 Die Relation (4.52)

$$\sigma(\varepsilon) = \lambda(\operatorname{tr} \varepsilon) I + 2\mu \varepsilon$$

wird Hookesches Gesetz für homogene, isotrope, elastische Materialien genannt.

Setzen wir (4.51) und (4.52) in (4.48) und (4.50) ein und ersetzen den Faktor $I + Du$ durch I , dann erhalten wir die Randwertprobleme für $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon(u)) = \sigma(u)$:

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad (4.53)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (4.54)$$

$$\sigma n = g \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (4.55)$$

Lemma 20 Für das Verschiebungsfeld u lautet das Randwertproblem (4.53), (4.54), (4.55):

Finde $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ so, dass

$$-(\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u)) = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (4.56)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (4.57)$$

$$\sigma(u) \cdot n = g \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (4.58)$$

Beweis

Es ist

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= -\operatorname{div} \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \partial_1 u_1 & \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) \\ \mu(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) & \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \partial_2 u_2 & \mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) \\ \mu(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) & \mu(\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) & \lambda \operatorname{div} u + 2\mu \partial_3 u_3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \mu \Delta u_1 + (\lambda + \mu) \partial_1 \operatorname{div} u \\ \mu \Delta u_2 + (\lambda + \mu) \partial_2 \operatorname{div} u \\ \mu \Delta u_3 + (\lambda + \mu) \partial_3 \operatorname{div} u \end{pmatrix} \\ &= -Lu = -(\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u)). \end{aligned}$$

■

Bemerkung

Der Differentialoperator L wird Lamé-Operator genannt. In Matrix-Form lautet er

$$Lu = \begin{pmatrix} \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_1^2 & (\lambda + \mu)\partial_1\partial_2 & (\lambda + \mu)\partial_1\partial_3 \\ (\lambda + \mu)\partial_2\partial_1 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_2^2 & (\lambda + \mu)\partial_2\partial_3 \\ (\lambda + \mu)\partial_3\partial_1 & (\lambda + \mu)\partial_2\partial_3 & \mu\Delta + (\lambda + \mu)\partial_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem

$$-Lu = -[\mu\Delta u + (\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div } u)] = f \tag{4.59}$$

wird Lamé oder Lamé-Navier System zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes u genannt.

Die Matrix-Vektor Darstellung des Hookeschen Gesetzes

Das Hookesche Gesetz in Tensorform lautet

$$\sigma = \tilde{M} \varepsilon, \quad \sigma_{ij} = \sum_k \sum_l \tilde{M}_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

wobei \tilde{M} ein Materialtensor 4. Stufe ist.

Es ist häufig bequemer, die Verzerrungs- und Spannungstensoren als Vektoren zu schreiben

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

Das Hookesche Gesetz lautet dann

$$\vec{\sigma} = M \vec{\varepsilon} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

M wird Elastizitätsmatrix genannt.

Weiterhin gilt

$$\vec{\varepsilon} = \tilde{D}u \quad \text{mit } \tilde{D} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

und

$$\vec{\sigma} = M \vec{\varepsilon} = M \tilde{D}u. \tag{4.63}$$

Da

$$Lu = \tilde{D}^\top \vec{\sigma} = \tilde{D}^\top M \vec{\varepsilon} = \tilde{D}^\top M \tilde{D}u \tag{4.64}$$

ist, erhalten wir für die „Normalspannung“ die Darstellung

$$\sigma n = N^\top \vec{\sigma} = N^\top M \tilde{D}u, \quad (4.65)$$

wobei

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

ist.

Bemerkung

Für anisotrope Materialien kann ebenfalls ein Hookesches Gesetz formuliert werden. In diesem Fall treten mehr Materialparameter auf und die Matrix M in (4.61) ist durch eine allgemeinere Matrix zu ersetzen.

Schwache Formulierung des linearisierten Randwertproblems

Das linearisierte Randwertproblem (4.56), (4.57), (4.58) lautet mit der Bezeichnung (4.59) und den Relationen (4.64), (4.65):

$$-Lu = -\tilde{D}^\top M \tilde{D}u = f \quad \text{in } \Omega, \quad (4.67)$$

$$u|_{\Gamma_0} = 0, \quad (4.68)$$

$$N^\top M \tilde{D}u|_{\Gamma_1} = g. \quad (4.69)$$

Eine schwache Formulierung des Randwertproblems (4.67), (4.68), (4.69) kann folgendermaßen beschrieben werden:

Sei V die Abschließung des linearen Funktionenraumes $\{u \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3, u|_{\Gamma_0} = 0\}$ bezüglich der Norm $\|u\|_V = \left(\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (|u_i|^2 + |\partial_1 u_i|^2 + |\partial_2 u_i|^2 + |\partial_3 u_i|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$. Finde ein $u \in V$, so dass

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) dx \\ &= \int_{\Omega} \{ \lambda \operatorname{tr} \varepsilon(u) \operatorname{tr} \varepsilon(v) + 2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) \} dx \\ &= \lambda \int_{\Omega} \operatorname{div} u \operatorname{div} v dx + 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx \\ &= \int_{\Omega} M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}v dx \\ &= \int_{\Gamma_1} g \cdot v da + \int_{\Omega} f \cdot v dx \end{aligned}$$

für alle $v \in V$ ist.

Definition 35 (schwache Lösung) Seien f und g genügend glatte Funktionen. Ein Element $u \in V$, das den Relationen

$$a(u, v) = \int_{\Gamma_1} gv \, da + \int_{\Omega} fv \, dx \quad (4.70)$$

für alle $v \in V$ genügt, heißt schwache Lösung des Randwertproblems (4.67), (4.68), (4.69).

Lemma 21 Sei $f \in [C(\bar{\Omega})]^3$, $g \in [C(\partial\Omega)]^3$ und $u \in [C^2(\bar{\Omega})]^3$ eine klassische Lösung des Randwertproblems (4.67), (4.48), (4.69). Dann ist u auch schwache Lösung.

Beweis

Wir multiplizieren (4.67) skalar mit einem Element $v \in V$ und integrieren über Ω . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -Lu \cdot v \, dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \cdot v \, dx \stackrel{(1.26)}{=} - \int_{\Omega} (\operatorname{div}(\sigma(u)v) - \sigma(u) : Dv) \, dx \\ &\stackrel{(1.32)}{=} \int_{\Omega} \sigma(u) : Dv \, dx - \int_{\partial\Omega} \sigma(u)n \cdot v \, da \\ &= \int_{\Omega} f \cdot v \, dx. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Da $\varepsilon(v) = \frac{1}{2}(Dv + Dv^T)$ der symmetrische Anteil von Dv ist, gilt

$$\sigma(u) : Dv = \sigma(u) : \varepsilon(v).$$

Beachten wir, dass v auf Γ_0 verschwindet, dann erhalten wir aus (4.71)

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da.$$

■

Bemerkung

Ist die schwache Lösung u genügend glatt, so folgt aus dem Fundamentallema der Variationsrechnung, dass u klassische Lösung des Randwertproblems (4.67), (4.68), (4.69) ist. Die Regularität der schwachen Lösung wird beeinflusst von der Glattheit des Randes $\partial\Omega$ und der Glattheit der Kraftdichten f und g .

Wir diskutieren die Lösbarkeit des schwach formulierten Randwertproblems:

Satz 24 (Satz von Lax-Milgram ([13], Satz 17.9, S. 264)) Sei V ein Hilbertraum, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $F \in V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Falls Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass

$$|a(u, v)| \leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (4.72)$$

$$a(u, u) \geq c_2 \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \quad (4.73)$$

dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$ von

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V$$

und es ist

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_2} \|F\|_{V'}.$$

Bemerkung

Die Eigenschaft (4.73) wird V -Elliptizität oder positive Definitheit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ genannt. (4.72) besagt, dass die Bilinearform in beiden Variablen stetig ist.

Satz 25 Das schwach formulierte Randwertproblem (4.70) besitzt eine eindeutig definierte Lösung $u \in V$, falls $\text{meas}\Gamma_0 > 0$ und falls die Elastizitätsmatrix M positiv definit ist. Hierbei ist

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v \, da.$$

Beweis

1. Schritt Wir zeigen, dass die Bilinearform der linearen Elastizität

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx$$

stetig ist, das heißt, dass (4.72) gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}v \, dx \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^6 \|(M \tilde{D}u)_i\|_{L_2(\Omega)} \|(\tilde{D}v)_i\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \max_{k,l=1,\dots,6} |M_{kl}| [\|\partial_1 u_1\| \|\partial_1 v_1\| + \|\partial_2 u_2\| \|\partial_2 v_2\| + \|\partial_3 u_3\| \|\partial_3 v_3\| \\ &\quad + \|\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2\| \|\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2\| + \dots + \|\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3\| \|\partial_3 v_1 + \partial_1 v_3\|] \\ &\leq c \sum_{i,j} \|\partial_i u_j\|_{L_2(\Omega)} \sum_{i,j} \|\partial_i v_j\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n a_k^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \left(\sum_k a_k \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a_k = \|\partial_i u_j\|_{L_2(\Omega)}^2$$

benutzt.

2. Schritt Es ist

$$a(u, u) = \int_{\Omega} M \tilde{D}u \cdot \tilde{D}u \, dx = \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}(u)^{\top} M \tilde{\varepsilon}(u) \, dx.$$

Da M symmetrisch und positiv definit ist, folgt

$$a(u, u) \geq \min\{\text{Eigenwerte von } M\} \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}(u)^{\top} \tilde{\varepsilon}(u) \, dx.$$

In [10, S. 86, Theorem 3.5] ist gezeigt. Für $\text{meas}\Gamma_0 > 0$ existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\int_{\Omega} \tilde{\varepsilon}(u)^{\top} \tilde{\varepsilon}(u) \, dx \geq K \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V. \quad (4.74)$$

Die Ungleichung (4.74) wird Kornsche Ungleichung genannt. Daraus folgt (4.73). ■

Bemerkung

M ist positiv definit, falls alle Eigenwerte α von M positiv sind. Die Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(M - \alpha I) = (\mu - \alpha)^3(2\mu - \alpha)^2(3\lambda + 2\mu - \alpha) = 0.$$

Daher muss notwendigerweise $\mu > 0, 3\lambda + 2\mu > 0$ sein. Folglich ist der Elastizitätsmodul

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} > 0,$$

da $3\lambda + 3\mu > 3\lambda + 2\mu > 0$, und $\lambda + \mu > 0$.

Für die Poissonzahl gilt:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > -1,$$

da $3\lambda + 2\mu > 0$ ist.

Beweis der Kornschen Ungleichung

Wie wir im Beweis von Satz 25 gesehen haben, spielt die Kornsche Ungleichung eine Schlüsselrolle für die Aussage, dass das linearisierte Elastizitätsproblem eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Sie wurde 1909 von A.Korn ([8]) für klassische Lösungen bewiesen. K.O. Friedrich bewies sie 1947 für stückweise glatte Ränder, G. Fichera zeigte sie 1972 für Gebiete mit einer starken Kegeleigenschaft. Für Lipschitzgebiete ist ein Beweis in [10, S.86, Theorem 3.5] zu finden. Auf den letzteren Ideen bauen auch Beweise von E.Zeidler ([16], S.278 ff.) und M. Brokate ([2], S.44 ff.) auf, denen wir hier folgen.

Der Beweis wird in 2 Teile gegliedert, der erste Teil stellt einige Ungleichungen in Sobolevräumen zur Verfügung, der zweite Teil befasst sich zunächst mit der Kornschen Ungleichung im $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ und schließlich mit der Kornschen Ungleichung (4.74) in $V \subset H^1(\Omega)$.

1. Teil: Ungleichungen in Sobolevräumen

Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n . Wir erinnern an die Sobolevräume

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \{u : u \in L^2(\Omega) : \partial_j u \in L^2(\Omega), 1 \leq j \leq n\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} |\partial_j u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$H^1(\Omega)$ ist der Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \partial_j u(x)\partial_j v(x) dx.$$

$$\overset{\circ}{H}^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}, \quad C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty : \text{supp } u \subset \Omega \text{ kompakt}\}$$

Wir führen den Dualraum von $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ ein.

Definition 36 $H^{-1}(\Omega) = (\overset{\circ}{H}^1(\Omega))'$ ist der Dualraum von $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$, d.h. er ist der Banachraum aller linearen stetigen Abbildungen $f : \overset{\circ}{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega) \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1}} |\langle f, u \rangle| = \sup_{\substack{u \in C_0^\infty(\Omega) \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1}} |\langle f, u \rangle|.$$

Es gilt $|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ für alle $u \in H^1(\Omega)$; $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ ist die kleinste Konstante c mit

$$|\langle f, u \rangle| \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

Lemma 22

(i) Der Raum $L^2(\Omega)$ kann als Teilraum von $H^{-1}(\Omega)$ aufgefasst werden.

(ii) Ist $u \in L^2(\Omega)$, dann ist $\partial_j u \in H^{-1}(\Omega)$ und es gilt

$$\|\partial_j u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)},$$

d.h. $\partial_j : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ist linear und stetig.

Beweis:

(i) Sei $I : L^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ der folgende Einbettungsoperator, der durch die duale Paarung auf $H^{-1}(\Omega) \times \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ definiert ist:

$$\langle I(u), v \rangle := (u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad v \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega).$$

Es ist

$$|\langle I(u), v \rangle| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

d.h.

$$\|Iu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.75)$$

Damit ist I ein stetiger Operator.

(ii) Die Ableitung $\partial_j u$ ist im Distributionensinn zu verstehen, d.h. für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt

$$\langle \partial_j u, v \rangle = (-1) \int_{\Omega} u \partial_j v \, dx \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} |\langle \partial_j u, v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} u(x) \partial_j v(x) \, dx \right| \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_j v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\partial_j u \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{und} \quad \|\partial_j u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.76)$$

■

Die folgende Ungleichung spielt eine zentrale Rolle beim Beweis der Kornschen Ungleichung.

Lemma 23 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit lokal Lipschitz-stetigen Rand. Dann gibt es Konstanten $c_0, c_1 > 0$, so dass für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$c_0 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq c_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.77)$$

Beweis:

Die rechte Ungleichung folgt aus (4.75) und (4.76). Die linke Ungleichung wird durch Übergang zur Fouriertransformation gezeigt. Dieser Beweis ist etwas länger und wir verweisen auf [?, S.41-44] und [15, S.306-308]. ■

Wir zeigen noch einen Zusammenhang zwischen den zweiten Ableitungen (im Distributionensinn) von Funktionen $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in [H^1(\Omega)]^3$ und ersten Ableitungen (im Distributionensinn) der Einträge des Verzerrungstensors $\varepsilon = \frac{1}{2}(Du + (Du)^\top)$; siehe auch Lemma 22 (ii).

Lemma 24 Sei $u \in [H^1(\Omega)]^3$. Dann ist

$$\partial_{jk}u_i = \partial_j\varepsilon_{ik}(u) + \partial_k\varepsilon_{ij}(u) - \partial_i\varepsilon_{jk}(u). \tag{4.78}$$

Beweis:

Sei $v \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig. Es ist $\partial_{jk} = \partial_{kj}$ und

$$\langle \partial_{jk}u_i, v \rangle = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_k u_i \partial_j v \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_j u_i \partial_k v \, dx.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} e_{ik}(u) &= \frac{1}{2}(\partial_i u_k + \partial_k u_i) \\ \langle \partial_j e_{ik}(u), v \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_i u_k + \partial_k u_i) \partial_j v \, dx \\ \langle \partial_k e_{ij}(u), v \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) \partial_k v \, dx \\ -\langle \partial_i e_{jk}(u), v \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_j u_k + \partial_k u_j) \partial_i v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_i u_k \partial_j v + \partial_i u_j \partial_k v) \, dx. \end{aligned}$$

Es folgt (4.78). ■

2. Teil: Die Kornsche Ungleichung im $H^1(\Omega)$ und in V .

Wir formulieren jetzt ein zentrales Ergebnis.

Satz 26 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitzgebiet. Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $u \in [H^1(\Omega)]^3$ gilt

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx + \sum_i \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \sum_i \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2, \tag{4.79}$$

bzw. etwas kompakter geschrieben

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Beweis:

Wir betrachten ein beliebiges $u \in [H^1(\Omega)]^3$ und wenden die Ungleichung (4.77) auf $\partial_j u_i \in L^2(\Omega)$ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \|\partial_j u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{c_0} \left(\sum_{i,j} \|\partial_j u_i\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \sum_{i,j,k} \|\partial_{kj} u_i\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\
&\stackrel{(4.78)}{\leq} \frac{1}{c_0} \left(\sum_{i,j} \|\partial_j u_i\|_{H^{-1}(\Omega)} + 9 \sum_{i,j,k} \|\partial_k e_{ij}(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right) \\
&\stackrel{(4.77)}{\leq} \frac{c_1}{c_0} \left(\sum_i \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + 9 \sum_{i,j} \|e_{ij}(u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq \tilde{c} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \right).
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung (4.79) mit $c = \frac{1}{\tilde{c}}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \|\partial_j u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_i \|u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\leq \tilde{c} (\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx) + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \hat{c} (\|u\|^2 + \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx)
\end{aligned}$$

■

Bemerkung:

Satz 26 besagt, dass die Normen $\|u\|_{\varepsilon} = \|\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^{3 \times 3}} + \|u\|_{[L^2(\Omega)]^3}$ und $\|u\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ äquivalent in $[H^1(\Omega)]^3$ sind.

Aus der Kornschen Ungleichung (4.79) im $H^1(\Omega)$ kann die Kornsche Ungleichung (4.74) gewonnen werden. Hierbei wird ausgenutzt, dass der Raum $H^1(\Omega)$ kompakt in $L^2(\Omega)$ eingebettet ist, d.h. jede beschränkte Folge $u_n \in H^1(\Omega)$ besitzt eine in $L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge.

Kurz:

$$\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq c \Rightarrow \exists (u_{n_k})_{n_k}, u_{n_k} \rightarrow u \text{ in } L^2(\Omega).$$

Satz 27 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Gebiet, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$, $\text{meas}(\Gamma_0) \neq 0$. Sei

$$V = \left[\overline{\{u \in [C^\infty(\bar{\Omega})]^3, u|_{\Gamma_0} = 0\}} \right]^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}^3.$$

Dann gilt (4.74), bzw. es existiert eine Konstante $K > 0$, so dass

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx \geq K \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in V. \quad (4.80)$$

Beweis:

Wir nehmen an, dass die Ungleichung (4.80) nicht gilt, d.h.:
Für alle $C > 0$ gibt es ein $u_C \in V$, so dass

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u_C) : \varepsilon(u_C) \, dx < C \|u_C\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Wir wählen $C = \frac{1}{n}$ und setzen

$$v_n := \frac{u_{\frac{1}{n}}}{\|u_{\frac{1}{n}}\|_{H^1(\Omega)}} \in V.$$

Die Folge $(v_n)_{n=1, \dots}$ ist beschränkt in $H^1(\Omega)$ und

$$\int_{\Omega} \varepsilon(v_n) : \varepsilon(v_n) \, dx < \frac{1}{n},$$

was bedeutet, dass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varepsilon(v_n) : \varepsilon(v_n) \, dx = 0. \tag{4.81}$$

Wegen der kompakten Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ gibt es eine Teilfolge von (v_n) (gleiche Bezeichnung), so dass

$$v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} v. \tag{4.82}$$

Diese Teilfolge muss auch in $H^1(\Omega)$ konvergieren, da die Normen $\|\cdot\|_{\varepsilon}$ und $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ aufgrund der Kornschen Ungleichung äquivalent sind und (4.81) und (4.82) besagen, dass $v_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\varepsilon}} v$. Der Raum V ist abgeschlossen und damit befindet sich v in V . Für dieses v muss wegen (4.81) gelten: $\varepsilon(v) = 0$, d.h. $v = a + b \times x$ (siehe (2.15)). Da $v \in V$ ist und damit auf Γ_0 verschwindet, folgt $v = 0$ (siehe Lemma 25). Das ist ein Widerspruch zur Wahl von

$$v_n := \frac{u_{\frac{1}{n}}}{\|u_{\frac{1}{n}}\|_{H^1(\Omega)}} \in V, \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$V \cap \ker \varepsilon = \{0\}.$$

Hierbei ist $\varepsilon : [H^1(\Omega)]^3 \rightarrow [L^2(\Omega)]^{3 \times 3}$, $\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$.

Lemma 25 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Lipschitz-Gebiet, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ Teilmenge mit $\text{meas}(\Gamma_0) \neq 0$. Dann ist

$$V \cap \ker \varepsilon = \{0\}$$

Beweis:

Wir wissen (siehe Satz 12, Relation (2.15)), dass

$$\ker \varepsilon = \mathcal{R} = \{v : v(x) = a + Bx, B = -B^T\}.$$

Für ein $v \in V \cup \ker \varepsilon$ gibt es Elemente $a, b \in \mathbb{R}^3$, so dass gilt

$$v(x) = b \times x + a = Bx + a.$$

Die Menge

$$M_{a,b} = \{x : x \in \mathbb{R}^3 : Bx + a = 0\} \supset \Gamma_0 \tag{4.83}$$

hat die Dimension 1, da $\text{rang } B = 2$ ist. Daher ist $M_{a,b}$ eine Gerade. Γ_0 muss jedoch echt zweidimensional sein, da $\text{meas } \Gamma_0 \neq 0$ ist. Das steht im Widerspruch zu (4.83), folglich ist $v \equiv 0$. ■

Energieminimierung

Aus der Physik ist bekannt: Ein System ist bestrebt, seine Energie zu minimieren. Wir führen den Begriff der elastischen und der totalen Energie für die lineare Elastizität ein. Wir zeigen, dass das schwach formulierte Problem äquivalent zum Minimierungsproblem für die totale Energie ist, d.h. die schwache Lösung stimmt mit dem Minimierer überein.

Definition 37 Das quadratische Funktional $J_{\text{elast}} : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$J_{\text{elast}}(u) = \frac{1}{2}a(u, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u) \, dx$$

wird elastisches Energiefunktional für das linearisierte elastische Problem genannt.

$$\begin{aligned} J(u) &= J_{\text{elast}} - \left(\int_{\Omega} f u \, dx + \int_{\Gamma_1} g u \, da \right) \\ &= J_{\text{elast}} - \langle F, u \rangle = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u). \end{aligned}$$

wird als totale Energie bezeichnet.

Die Existenz eines eindeutigen Minimierers von $J(u)$ kann garantiert werden, wenn das Funktional strikt konvex ist.

Definition 38 (konvexes Funktional) Ein Funktional $J : K \subset V \rightarrow \mathbb{R}$, definiert auf einer konvexen Teilmenge K eines Vektorraums V ist konvex, wenn für alle $u, v \in K$, $\alpha \in [0, 1]$ gilt

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v).$$

J ist strikt konvex auf K , wenn für $u, v \in K$, $u \neq v$, $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v).$$

Satz 28 (Konvexität und Ableitungen) [14, S.247, S.249ff.], [4, S.167]

Sei $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional über einer konvexen Teilmenge $K \subset V$ eines normierten Vektorraums V . J sei differenzierbar auf K . Dann gilt

a) J ist konvex auf K genau dann, wenn

$$J(v) \geq J(u) + J'(u)(v - u) \quad \forall u, v \in K.$$

b) J ist strikt konvex genau dann, wenn

$$J(v) > J(u) + J'(u)(v - u) \quad \forall u, v \in K, u \neq v.$$

Weiterhin wird J auf K genau dann für ein $u \in K$ minimal, wenn

$$J'(u)(u - v) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Ist die Menge K offen, so wird J für ein $u \in K$ genau dann minimal, wenn $J'(u) = 0$ ist.

Lemma 26 Wir nehmen an, dass die symmetrische Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch (positiv definit) sei. Dann ist das Energiefunktional $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle$ strikt konvex und es existiert genau ein Element $u \in V$, so dass gilt:

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \Leftrightarrow a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (4.84)$$

Beweis:

Um das Lemma zu beweisen, benutzen wir obigen Satz und zeigen zunächst die Relation (b). Dazu berechnen wir $J'(u)(v - u)$: Es ist

$$J(u + h) = J(u) + J'(u)h + o(\|h\|). \quad (4.85)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} J(u + h) &= \frac{1}{2}a(u + h, u + h) - \langle F, u + h \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + a(u, h) + \frac{1}{2}a(h, h) - \langle F, u \rangle - \langle F, h \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle + a(u, h) - \langle F, h \rangle + \frac{1}{2}a(h, h) \\ &= J(u) + J'(u)h + o(\|h\|), \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\text{mit } J'(u)h \stackrel{(4.85)}{=} a(u, h) - \langle F, h \rangle. \quad (4.87)$$

Wir verifizieren nun die Relation (b). Aufgrund von (4.87) ist

$$J(u) + J'(u)(v - u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle + a(u, v - u) - \langle F, v - u \rangle \quad (4.88)$$

$$= -\frac{1}{2}a(u, u) + a(u, v) - \langle F, v \rangle \quad (4.89)$$

und

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - \langle F, v \rangle \\ &> -\frac{1}{2}a(u, u) + a(u, v) - \langle F, v \rangle \\ &\stackrel{(4.88)}{=} J(u) + J'(u)(v - u), \end{aligned}$$

da

$$\frac{1}{2}a(v, v) + \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, v) = \frac{1}{2}a(u - v, u - v) > 0 \quad \forall u \neq v.$$

Die Relation (4.84) kann wie folgt bewiesen werden.

Wir nehmen zunächst an, dass $a(u, v) = \langle F, v \rangle$ ist für alle $v \in V$.

Dann ist

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= J(u) + t[a(u, v) - \langle F, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \geq J(u) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Nun nehmen wir an, dass $J(u) = \min J(v)$. Das Minimum eines streng konvexen Funktionals ist eindeutig bestimmt. Ist $g(t) = J(u + tv)$ minimal für $t = 0$, dann ist

$$g'(0) = J'(u)v \stackrel{(4.87)}{=} a(u, v) - \langle F, v \rangle = 0$$

und somit folgt $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V$. ■

Betrachten wir eine konvexe Teilmenge $K \subset V$ statt des ganzen Vektorraums V , so bekommen wir eine äquivalente Variations-Ungleichung.

Lemma 27 Sei die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch (positiv definit). Sei $K \subset V$ eine konvexe Teilmenge. Dann gilt für $u \in K$

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v) \Leftrightarrow a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Kapitel 5

Hyperelastische Materialien

Am Ende des vorherigen Kapitels haben wir ein lineares elastisches Materialmodell betrachtet, dessen totale Energie die Form besitzt

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle F, u \rangle.$$

Hierbei war $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische, V -elliptische Bilinearform und $F \in V'$. In diesem Fall war $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein strikt konvexes Funktional. Weiterhin gilt

$$J(u) = \min! \Leftrightarrow DJ(u)h = J'(u)h = a(u, h) - \langle F, h \rangle = 0 \quad \forall h \in V. \quad (5.1)$$

Ist der Minimierer u (bzw. die schwache Lösung u) genügend regulär und

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} M\varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot u \, da,$$

wobei M ein symmetrischer, positiv definiten Materialtensor ist, dann gilt

$$\begin{aligned} J(u+h) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} M\varepsilon(u+h) : \varepsilon(u+h) - M\varepsilon(u) : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot h \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot h \, da \\ &= \int_{\Omega} M\varepsilon(h) : \varepsilon(u) \, dx - \int_{\Omega} f \cdot h \, dx - \int_{\Gamma_1} g \cdot h \, da + o(h) \\ &\stackrel{\text{Hooke}}{=} \int_{\Omega} \text{div} \sigma h \, dx - \int_{\Omega} f \cdot h \, dx + o(h), \end{aligned}$$

d.h.

$$J'(u) \cdot h = - \int_{\Omega} \text{div} \sigma h \, dx - \int_{\Omega} f \cdot h \, dx = 0 \quad \forall h \in V$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned} -\text{div} \sigma(u) &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\Gamma_0} &= 0, \\ \sigma(u)u|_{\Gamma_1} &= g. \end{aligned}$$

Der Integrand $W_{\text{elast}}(u) = \frac{1}{2}M\varepsilon(u) : \varepsilon(u)$ ist die elastische Energiedichte, und es ist

$$D_{\varepsilon}W_{\text{elast}}(\varepsilon) = M\varepsilon = \sigma. \quad (5.2)$$

Die Gleichung (5.2) motiviert, die Klasse der hyperelastischen Materialien einzuführen.

Definition 39 Ein Material ist hyperelastisch, falls eine differenzierbare elastische Potentialfunktion (stored energy function, Verzerrungsenergie, elastische Dichtefunktion) $W : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass die konstitutive Beziehung für den ersten (bzw. zweiten) Piola-Spannungstensor gilt:

$$T(x) = \hat{T}(x, F) = \frac{\partial W}{\partial F}(x, F) = D_F W(x, F) \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \forall F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}. \quad (5.3)$$

$J_{\text{elast}}^\varphi = \int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) \, dx$ wird elastische Energie (bzw. Verzerrungsenergie) für eine Deformation φ genannt.

$$J(\varphi) = \int_{\Omega} W(x, D\varphi(x)) \, dx - \left(\int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \varphi \, da \right)$$

ist die totale Energie.

Für diese Materialien gilt folgender wichtige Satz:

Satz 29 Sei $J(\cdot)$ auf $H^1(\Omega)$ definiert und $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$, $\varphi \in H^1(\Omega)$. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent, falls φ genügend glatt ist:

(i) $J'(\varphi)h = 0 \quad \forall h \in V.$

(ii)

$$-\operatorname{div} \frac{\partial W}{\partial F}(x, D\varphi) = f(x, \varphi) \quad \text{für } x \in \Omega \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial F}(x, D\varphi)u = g(x, D\varphi) \quad \text{für } x \in \Gamma_1. \quad (5.5)$$

Beweis:

Wir berechnen $J'(\varphi)h$: Es ist

$$\begin{aligned} J_{\text{elast}}(\varphi + h) - J_{\text{elast}}(\varphi) &= \int_{\Omega} W(x, D\varphi + Dh) - W(x, D\varphi) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial W}{\partial F}(x, D\varphi) : Dh + o(x, Dh) \right\} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \hat{T}(x, D\varphi) : Dh \, dx + \int_{\Omega} o(x, Dh) \, dx. \end{aligned}$$

Falls $\int_{\Omega} o(x, Dh) \, dx = o(h)$ ist, dann gilt

$$J'_{\text{elast}}(\varphi)h = \int_{\Omega} \hat{T}(x, D\varphi) : Dh \, dx.$$

Für die Ableitung der totalen Energie folgt

$$\begin{aligned} J'(\varphi)h &= \int_{\Omega} \hat{T}(x, D\varphi) : Dh \, dx \\ &\quad - \left\{ \int_{\Omega} f(x, \varphi(x)) \cdot h(x) \, dx + \int_{\Gamma_1} g(x, D\varphi(x)) \cdot h(x) \, da \right\}. \end{aligned}$$

Partielle Integration und Anwendung des Fundamental-Lemmas der Variationsrechnung (Lemma 18) führt zur Behauptung. \blacksquare

Folgerung:

Falls $u \in V$ genügend glatter Minimierer von J ist, dann gilt

$$\operatorname{div} \frac{\partial W}{\partial F}(x, \nabla u) = f(x, u) \quad \text{in } \Omega, \quad (5.6)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial F}(x, \nabla u) = g(x, \nabla u) \quad \text{auf } \Gamma_1. \quad (5.8)$$

Bemerkung:

Die Gleichungen (5.6),(5.7),(5.8) werden auch zur totalen Energie J gehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen genannt.

Analog zum Abschnitt über isotrope elastische Materialien (Satz 21) kann man zeigen.

Satz 30 [4, S.152] Die elastische Energiedichte $W : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ eines hyperelastischen Materials ist objektiv und isotrop genau dann, wenn eine Funktion $\tilde{W} : \tilde{U}(S_{>}^{3 \times 3}) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$W(x, F) = \tilde{W}(x, \tilde{U}(F^\top F)) = \tilde{W}(x, \tilde{U}(F^\top F)) \quad \forall F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

Beispiel:

St. Venant Kirchhoff Materialien waren durch (4.43), (4.44) eingeführt worden

$$\begin{aligned} \Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, E) &= \lambda \operatorname{tr} E(x) I + 2\mu E(x) \\ E = E(u) &= \frac{1}{2}(Du + (Du)^\top + (Du)^\top Du). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Diese Materialien sind isotrop. Wir zeigen, dass sie auch hyperelastisch sind.

Lemma 28 Es existiert eine elastische Energiedichte $W = W(E)$, so dass $\frac{\partial W}{\partial E}(E) = \hat{\Sigma}(E)$ ist. Es ist

$$W(E) = \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2 + \mu \operatorname{tr} E^2. \quad (5.10)$$

Weiterhin gilt für $C = I + 2E = F^\top F$

$$\hat{W}(F) = W(E) = -\left(\frac{3\lambda + 2\mu}{4}\right) \operatorname{tr} C + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{8}\right) \operatorname{tr} C^2 + \frac{\lambda}{4} \operatorname{tr} \operatorname{Cof} C + \frac{6\mu + 9\lambda}{8} \quad (5.11)$$

Beweis:

Wir berechnen $\frac{\partial W}{\partial E}$. Für $H \in S_{>}^{3 \times 3}$ gilt:

$$\begin{aligned} W(E + H) &= \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E + \operatorname{tr} H)^2 + \mu \operatorname{tr}(E + H)(E + H) \\ &= \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr} E^2 + \lambda \operatorname{tr} E \operatorname{tr} H + \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} H)^2 \\ &\quad + \mu \operatorname{tr} E^2 + 2\mu \operatorname{tr}(EH) + \mu \operatorname{tr} H^2 \\ &= W(E) + \lambda \operatorname{tr} E \operatorname{tr} H + 2\mu \operatorname{tr}(EH) + o(H) \\ &= W(E) + \lambda \operatorname{tr} E I : H + 2\mu E : H + o(H). \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \lambda \operatorname{tr} E I + 2\mu E.$$

Wir berechnen nun die Relation (5.11).

Da $C = I + 2E$, $E = \frac{1}{2}(C - I)$, $E^2 = \frac{1}{4}(C^2 - 2C + I)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} E &= \frac{1}{2}(\operatorname{tr} C - 3) \\ \operatorname{tr} E^2 &= \frac{1}{4}(\operatorname{tr} C^2 - 2\operatorname{tr} C + 3).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\hat{W}(F) = W(E) &= \frac{\lambda}{2}(\operatorname{tr} E)^2 + \mu \operatorname{tr} E^2 = \frac{\lambda}{8}((\operatorname{tr} C)^2 - 6\operatorname{tr} C + 9) + \frac{\mu}{4}(\operatorname{tr} C^2 - 2\operatorname{tr} C + 3) \\ &= \operatorname{tr} C \left[-\frac{3}{4}\lambda - \frac{2\mu}{4} \right] + \frac{\lambda}{4} \frac{1}{2}(\operatorname{tr} C)^2 + \frac{\mu}{4} \operatorname{tr} C^2 + \frac{9\lambda}{8} + \frac{3}{4}\mu.\end{aligned}$$

Beachten wir, dass

$$\operatorname{tr} \operatorname{Cof} C = \frac{1}{2}((\operatorname{tr} C)^2 - \operatorname{tr} C^2),$$

also

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tr} C)^2 = \operatorname{tr} \operatorname{Cof} C + \frac{1}{2} \operatorname{tr} C^2,$$

so folgt (5.11). ■

Die Frage, ob das elastische Energiefunktional für St.Venant Materialien

$J_{\text{elast}}(u) = \int_{\Omega} W(E(u)) \, dx$ strikt konvex ist, kann leider nicht positiv beantwortet werden.

Konvexe elastische Energiedichten

Die Frage nach der Konvexität des elastischen Energiefunktionals kann leicht beantwortet werden, wenn die Energiedichte selbst eine konvexe Abbildung bezüglich $F = D\varphi$ ist.

Lemma 29

$$J_{\text{elast}}(\varphi) = \int_{\Omega} W(D\varphi) \, dx = \int_{\Omega} W(F) \, dx$$

ist (strikt) konvex, falls W bzgl. $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ (strikt) konvex ist.

Beweis:

Wir setzen $D\varphi = F$ und $D\psi = G$ für $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$. Es ist für $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}J_{\text{elast}}(\alpha\varphi + (1-\alpha)\psi) &= \int_{\Omega} W(\alpha F + (1-\alpha)G) \, dx \\ &\leq \int_{\Omega} \alpha W(F) + (1-\alpha)W(G) \, dx = \alpha J_{\text{elast}}(\varphi) + (1-\alpha)J_{\text{elast}}(\psi).\end{aligned}$$

■

Beispiel:

$\hat{W}(F) = \text{tr}C = \text{tr}F^\top F = \|F\|^2$ ist strikt konvex.

Bemerkung:

Die Menge der zulässigen Deformationen φ mit $D\varphi > 0$ ist nicht konvex. Genauer: es gilt folgendes Lemma.

Lemma 30 $\mathbb{R}_+^{3 \times 3} = \{F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det F > 0\}$ ist nicht konvex und die konvexe Hülle $\text{co}\mathbb{R}_+^{3 \times 3} = \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Beweis:

Die Matrix $-I = \frac{1}{2}\text{diag}(-3, 1, -1) + \frac{1}{2}\text{diag}(1, -3, -1)$ ist eine Konvexkombination aus Elementen von $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ und gehört nicht zu $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$.

Jede Matrix $F \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ kann in der Form

$$F = \frac{1}{2}(\lambda I + 2F) + \frac{1}{2}(-\lambda I) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

dargestellt werden. Es gibt ein $\lambda > 0$ so, dass

$$\det(\lambda I + 2F) = \lambda^3 + \iota_1(2F)\lambda^2 + \iota_2(2F)\lambda + \iota_3(2F) > 0.$$

Damit ist F eine Konvexkombination von Elementen von $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$.

$$F = \frac{1}{2}(\lambda I + 2F) + \frac{1}{4}\text{diag}(-3\lambda, \lambda, -\lambda) + \frac{1}{4}\text{diag}(\lambda, -3\lambda, -\lambda).$$

■

Der Begriff der konvexen Funktion auf nichtkonvexen Teilmengen muss definiert werden, um Deformationen φ einzubeziehen.

Definition 40 (Konvexe Fortsetzung) Sei $M \subset V$ eine nichtleere beliebige Teilmenge eines linearen Raumes V . Eine Funktion $W^* : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex, falls eine konvexe Funktion $W : \text{co}M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $W^*(v) = W(v)$ für alle $v \in M$ ist.

Beispiel:

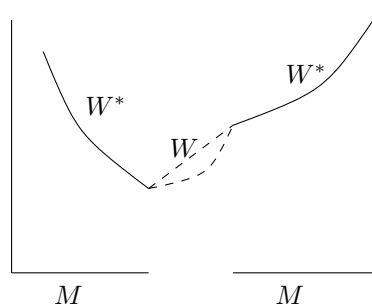


Abbildung 5.1: Konvexe Fortsetzung auf $\text{co}(M)$

Durch den Übergang zur konvexen Hülle von $\mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ werden auch eventuell Minimierer mit $\det(D\varphi) = 0$ erfasst. Geometrisch beschreibt $\det D\varphi$ den Faktor, um den sich ein Volumen von Ω unter der Deformation φ ändert

$$\text{vol}\varphi(\Omega) \approx \det D\varphi \text{vol}\Omega.$$

Wird $\det D\varphi = 0$, dann wird das Volumen des deformierten Körpers verschwinden. Intuitiv erfordert das eine unendliche Energie. Man kann zeigen ([4, S.170]), dass die Konvexität der Energiedichten $\hat{W} = \hat{W}(x, F)$ nicht vereinbar ist mit der Eigenschaft

$$\hat{W}(x, F) \rightarrow \infty, \quad \text{falls } \det F = 0, F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

Daher führte J. Ball 1977 ([1]) einen schwächeren Konvexitätsbegriff ein, den Begriff der Polykonvexität von Energiedichten. Polykonvexität steht nicht im Widerspruch zu physikalischen Forderungen und liefert ebenfalls Existenzresultate für Minimierer.

Definition 41 (Polykonvexität) Eine elastische Dichtefunktion $\hat{W} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ ist polykonvex, falls für jedes $x \in \bar{\Omega}$ eine konvexe Funktion $W(x, \cdot) : \text{co}X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = \{(F, \text{Cof}F, \det F), F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}\}$ und $\text{co}X = \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}^{3 \times 3} \times (0, \infty)$ existiert, so dass

$$\hat{W}(x, F) = W(x, F, \text{Cof}F, \det F) \quad \text{für alle } F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

Beispiel: St-Venant Material

Wir hatten gezeigt (5.11), dass

$$\hat{W}(F) = - \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{4} \right) \text{tr}(F^\top F) + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{8} \right) \text{tr}(F^\top F)^2 + \frac{\lambda}{4} \text{Cof}(F^\top F) + \frac{6\mu + 9\lambda}{8}$$

ist. Da $\text{Cof}(F^\top F) = \text{Cof}F^\top \text{Cof}F = (\text{Cof}F)^\top \text{Cof}F$ können wir zunächst formal $\hat{W}(F) = W(F, \text{Cof}F)$ schreiben. Ob W tatsächlich polykonvex ist, muss geprüft werden. Dabei hilft folgender Satz:

Satz 31 [4, S.181] Sei $\hat{W} : \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ eine elastische Energiedichte der Gestalt

$$\hat{W}(F) = \sum_{i=1}^I a_i \text{tr}(F^\top F)^{\frac{\gamma_i}{2}} + \sum_{j=1}^J b_j \text{tr}(\text{Cof}F^\top F)^{\frac{\delta_j}{2}} + \Gamma(\det F), \quad (5.12)$$

wobei $a_i > 0, \gamma_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq I$, $b_j > 0, \delta_j \geq 1$ für $1 \leq j \leq J$ und $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion ist. Dann ist \hat{W} polykonvex und genügt einer Koerzitivitätsungleichung

$$\hat{W}(F) \geq \alpha \{ \|F\|^p + \|\text{Cof}F\|^q + \Gamma \det(F) \}$$

für alle $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$. Hierbei ist

$$\alpha > 0, p = \max_i \{ \gamma_i \}, q = \max_j \{ \delta_j \}.$$

Bemerkungen

- (i) Für St Venant Materialien ist $I = 2, J = 1$ und $\gamma_1 = 2, a_1 < 0, \gamma_2 = 4, \delta_1 = 2, \Gamma \equiv 0$. Weiterhin kann man zeigen ([4, S.184],[12]), dass in der Tat Dichtefunktionen der Gestalt

$$\hat{W} = a_1 \text{tr}C + a_2 \text{tr}C^2 + b \text{tr} \text{Cof}C, \quad C = F^\top F,$$

mit $a_1 < 0, a_2 > 0, b > 0$ nicht polykonvex sind.

- (ii) Hyperelastische Materialien der Form (5.12) mit $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \Gamma(\delta) = \infty$ heißen Ogden Materialien.

Existenz von Minimierern für polykonvexe elastische Dichtefunktionen

Die Existenz von Minimierern für hyperelastische Materialien wurde von J. Ball (1977) untersucht. Wir geben ein Ergebnis an, das in ([4, S.371]) bewiesen ist.

Satz 32 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $\hat{W} : \Omega \times \mathbb{R}_+^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ eine elastische, integrierbare Dichtefunktion mit den Eigenschaften

(i) \hat{W} ist polykonvex.

(ii) $\lim_{\det F \rightarrow 0^+} \hat{W}(x, F) = \infty$.

(iii) Es gilt eine Koerzitivitätsungleichung: Es existieren Konstanten $\alpha > 0, p \geq 2, q \geq \frac{p}{p-1}, r > 1$, so dass

$$\hat{W}(x, F) \geq \alpha(\|F\|^p + \|\text{Cof}F\|^q + (\det F)^r) + \beta$$

für fast alle $x \in \bar{\Omega}$, für alle $F \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$.

Sei $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1, \text{meas}\Gamma_0 > 0, \varphi_0 : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und die folgende Menge sei nichtleer

$$\Phi := \left\{ \psi \in W^{1,p}(\Omega), \text{Cof}D\psi \in L^q(\Omega), \det D\psi \in L^r(\Omega), \right. \\ \left. \psi = \varphi_0 \text{ auf } \Gamma_0, \det D\psi > 0 \text{ in } \Omega \right\}$$

Sei $f \in L^p(\Omega), g \in L^r(\Gamma_1)$, so dass die Linearform

$$L : \psi \in W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L(\psi) := \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \psi \, da$$

stetig ist. Weiterhin sei die totale Energie definiert als

$$J(\psi) = \int_{\Omega} \hat{W}(x, D\psi(x)) \, dx - L(\psi)$$

mit $\inf_{\psi \in \Phi} J(\psi) < \infty$. Dann existiert ein Minimierer $\varphi \in \Phi$ von J , d.h. $J(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} J(\psi)$.

Bemerkungen

Für St Venant-Kirchhoff Materialien gilt für kleine $\|E\|$ folgendes: Es kann eine polykonvexe Energiedichte konstruiert werden, die für kleine $\|E\|$ mit der ursprünglichen Energiedichte übereinstimmt.

Index

- V-elliptisch, 108
- „geometrische“ Vielfachheit, 12
- Ableitung
 - Euler-, 46
 - Lagrange-, 46
 - materielle, 46
 - räumliche, 46
 - von Determinanten, 22
- Achsenparalleles Tetraeder, 62
- Antwortfunktion, 82
- Axiom E, 67
- Axiom M, 57
- Axiom Stat-M, 75
- Basis im \mathbb{R}^n , 10
- Bewegung, 43
 - isochore, 50
 - starre, 50
 - stationäre, 50
- Bewegungsgleichung, 57
- Bewegungsgleichungen, 56
- Bilinearform der linearen Elastizität, 100
- Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
 - linker, 37
 - rechter, 37
- Cauchyscher Spannungssatz, 57
- Cauchyscher Spannungstensor, 57
- Cauchyscher Spannungsvektor, 57, 75
- Clausius-Duhem Ungleichung, 73
- Cofaktor Matrix, 16
- Deformation, 35
 - starre, 38
- Dichtefunktion ρ , 53
- Divergenz, 28
- Divergenz des Vektorfeldes, 28
- Divergenz eines Tensors 2. Stufe, 28
- Drehimpuls, 56
- Drehimpulserhaltung, 73
- Druckspannungen, 65
- Dualraum, 20
- Eigenraum E_λ , 12
- Eigenvektor, 12
- Eigenwert, 12
- Elastizitätsmodul E , 94
- Elastostatik, 75
- Energiedichtefunktion, 67
- Energieerhaltung, 67, 73
- Energieminimierung, 106
- Entropie, 72
- Entropie-Ungleichung, 72
- Entropiedichte, 72
- Entropieprinzip, 72
- Entropieproduktion, 72
- Euler-Gleichung, 66
- Eulersche Betrachtungsweise, 45
- Fouriersches Gesetz, 70
- Fréchet-Ableitung, 19, 20
- Fundamental-Lemma
 - der Variationsrechnung, 78
- Gasströmung, 70
- Geschwindigkeit, 44
- Gradient, 23
- Green-St. Venant Verzerrungstensor, 37
- Höhere Ableitungen, 25
- Hauptachsentransformation, 13
- Hookesches Gesetz, 96
- hyperelastisch, 110
- ideales Fluid, 66
- ideales Gas, 70
- Impuls, 56
- Impulserhaltung, 73
- Invarianten von Matrizen, 15
- Kinematische Strömungsmodelle, 54
- Konstitutive Gleichung, 82, 88
- Kontinuitätsgleichung in der aktuellen Konfiguration, 53
- Kontrollvolumen, 47, 53
- Konvexe elastische Energiedichten, 112
- Konvexe Fortsetzung, 113
- Konvexes Funktional, 106
- Kornsche Ungleichung, 100
- Kraftdichte, 58
- Kreuzprodukt, 10

- Lagrangesche Betrachtungsweise, 45
- Lamé-Konstanten, 90
- Lamé-Navier System, 97
- Lamé-Operator, 97
- Lineare Abbildungen, 10
- Lineare Advektionsgleichung, 54
- Linearisiertes Elastizitätsproblem, 96
- Massenerhaltung, 53, 73
- Material
 - elastisches, 82
 - homogenes, 82
 - hyperelastisches, 109
 - isotropes, 86
 - isotropes elastisches, 86
- Materialgleichung, 82
- Matrix
 - schiefsymmetrische, 11
 - symmetrische, 11
- Moment, 56
- Momentenerhaltung, 56
- Momentengleichgewicht, 57
- Nabla-Operator, 26
- Navier-Stokes Gleichungen, 64, 65
 - stationäre, 66
- Nichtviskose Flüssigkeiten, 66
- Oberflächenintegrale, 30
- Oberflächenkräfte, 56
- Objektivität
 - der Antwortfunktion, 84
 - eines elastischen Materials, 84
- Operatornorm, 19
- orthogonale Matrix, 12
- partielle Ableitung, 23
- Piola Identität, 32
- Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
 - erster, 79
 - zweiter, 80
- Piola-Transformation für Matrizen, 32
- Piola-Transformation für Vektoren, 33
- Poissonzahl, 93
- Polare Zerlegung, 12
- Polare Zerlegung von $D\varphi$, 36
- Polykonvexität, 114
- Prinzip der materiellen Objektivität, 83
- Prinzip der virtuellen Arbeit, 76
- Quadratwurzeln aus Matrizen, 13
- Raum der linearen und stetigen
 - Abbildungen, 19
- Raum der Matrizen, 11
- Referenzgebiet, 43
- Referenzkonfiguration, 35
- Reibungsspannungen, 65
- Reynolds, O., 48
- Reynoldssches Transporttheorem, 47
- Rivlin-Eriksen Darstellungssatz, 86
- Satz
 - Divergenz-, 31
 - Gauß'scher Integral-, 31
 - Transformations-, 30
 - von Caley-Hamilton, 12
 - von Lax-Milgram, 99
- Satz der Thermodynamik
 - Erster, 67
 - Zweiter, 72
- schwache Formulierung, 98
- schwache Lösung, 99
- Spaltensummennorm, 20
- Spannungsprinzip, 57
- Spannungssatz, 76
- Spektralnrm, 20
- Spektralsatz, 12
- spezifische Spannungsleistung, 68
- St. Venant-Kirchhoff Materialien, 95
- stationärer Fall, 75
- Taylor-Formel, 25
- Temperaturgleichung, 70
- Tensor r -ter Stufe, 17
- Tensorprodukt, 12, 18
- Totale Energie, 67, 106
- Trajektorie, 44
- Transformation von
 - Oberflächenintegralen, 32
- Transport eines Volumens, 47
- Verjüngung, 18
 - des Tensorprodukts, 28
- Verkehrsströmung, 55
- Verschiebungsfeld, 36
 - infinitesimal starres, 40
- Verschiebungsgradient, 36
- Verzerrungen, 37
- Verzerrungstensor, 37
 - Linearisierter, 39
- Volumenintegrale, 30
- Volumenkräfte, 56
- Wärmefluss, 67
- Wärmequelle, 67
- Wärmeleitungsgleichungen, 71
- Zähe Flüssigkeiten, 65
- Zeilensummennorm, 19

Literaturverzeichnis

- [1] Ball, J. *Convexity and existence theorems in nonlinear elasticity.* Arch. Rational Mech. Anal. 63, 1977, S. 337-403.
- [2] Brokate, M. *Mathematische Elastizitäts- und Plastizitätstheorie* Vorlesungsskript SS 1995, Mathematisches Seminar der Universität Kiel.
- [3] Burgers, I.M. *A mathematical model illustrating the effect of turbulence.* In: Adv.Appl. Mech. 1, 1948, S. 171-199.
- [4] Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three Dimensional Elasticity.* North Holland, S. 993.
- [5] Feistauer, M. *Mathematical methods in fluid dynamics.* Pitman, 1993.
- [6] Gurtin, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics, Mathematics in Science and Engeneering.* Vol. 158, Academic Press, INC, 1981.
- [7] Kantorowitsch, L. W., Akilow, G. P. *Funktionalanalysis in normierten Räumen* Akademie-Verlag Berlin, 1964.
- [8] Korn, A. *„über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingung eine Rolle spielen* Bull. int. Cracovie Akad. umiejet, Classe sci. math. nat., 705-724, 1909.
- [9] Liu, I-Shih *Continuum Mechanics* Springer, 2002.
- [10] Nečas, J., Hlavaček, I. *Mathematical Theory of Elastic and Elasto Plastic Bodies: An Introduction.* Elsevier-Verlag, 1981.
- [11] Temam, A., Miranville, A. *Mathematical Modelling in Continuum Mechanics* Cambridge University Press, 2001.
- [12] Raoult, A. *Non-polyconvexity of the stored energy function of a Saint Venant-Kirchhoff material.* Aplikace Matematiky 6, S.417-419.
- [13] Wloka, J. *Partielle Differentialgleichungen.* Stuttgart: Teubner Verlag, 1982.
- [14] Zeidler, E. *Applied Functional Analysis.* Serie Applied Mathematical Sciences Band 109, Springer-Verlag 1995.
- [15] Zeidler, E. *Nonlinear Analysis and its Applications II/A Linear Monotone Operators* Springer Verlag, 1990.
- [16] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IV Applications to Mathematical Physics,* 1997.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn stud. math./phys. Markus Daub für das Schreiben und Überarbeiten des Textes, sowie für das Erstellen des Layouts und der Graphiken bedanken.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart
Germany

E-Mail: saendig@ians.uni-stuttgart.de

WWW: <http://ians.uni-stuttgart.de/~saendig/>

Erschienene Preprints ab Nummer 2005/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2005/001 *S. Nicaise, A.-M. Sändig*: Dynamical crack propagation in a 2D elastic body. The out-of plane state.
- 2005/002 *S. Hieber, A. Matei, B.I. Wohlmuth*: A mixed variational formulation and an optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity
- 2005/003 *A.-M. Sändig*: Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Vorlesung im Wintersemester 2004/2005
- 2005/004 *A.-M. Sändig, T. Buchukuri, O. Chkadia, D. Natroshvili*: Solvability and regularity results to boundary-transmission problems for metallic and piezoelectric elastic materials
- 2005/005 *B. Flemisch, B. I. Wohlmuth*: Stable Lagrange multipliers for quadrilateral meshes of curved interfaces in 3D
- 2005/006 *Geis, W.*: Numerical simulation of linear models for piezoelectric stack actuators
- 2005/007 *Geis, W.*: Determination of stress singularities in piezoelectric stack actuators
- 2005/008 *Sändig, A.-M.*: Mathematische Methoden in der Kontinuumsmechanik. Vorlesung im Sommersemester 2005