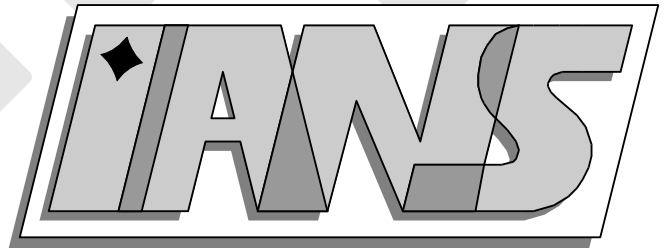


**Universität  
Stuttgart**



---

**Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen  
auf partielle Differentialgleichungen  
Vorlesung im Sommersemester 2006**

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**



**Universität Stuttgart**

---

Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen  
auf partielle Differentialgleichungen  
Vorlesung im Sommersemester 2006

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2006/012

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)  
Fakultät Mathematik und Physik  
Fachbereich Mathematik  
Pfaffenwaldring 57  
D-70 569 Stuttgart

**E-Mail:** [ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de)

**WWW:** <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.  
IANS-Logo: Andreas Klimke.  $\LaTeX$ -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Fixpunktsätze</b>	<b>9</b>
1.1 Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	10
1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder . . . . .	20
1.3 Schäferscher Fixpunktsatz . . . . .	34
<b>2 Satz über implizite Funktionen in Banachräumen</b>	<b>39</b>
2.1 Fréchet-Ableitungen in Banachräumen . . . . .	40
2.2 Satz von Hildebrandt und Graves über implizite Funktionen . . . . .	44
2.3 Satz über die Existenz inverser Abbildungen mit Anwendungen auf St.-Venant Materialien . . . . .	47
<b>3 Theorie monotoner Operatoren</b>	<b>49</b>
3.1 Monotonie und Stetigkeit . . . . .	49
3.2 Der Satz von Browder und Minty . . . . .	54
3.3 Der Nemyckii-Operator . . . . .	60
3.4 Pseudomonotone Operatoren und der Satz von Brézis . . . . .	65
<b>4 Zeitabhängige Probleme</b>	<b>77</b>
4.1 Ein Reaktion-Diffusion Problem . . . . .	78
4.2 Ein quasilineares parabolisches Problem . . . . .	80



# Einleitung

Zahlreiche Probleme in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, in der Ökonomie und Medizin werden als nichtlineare mathematische Aufgaben formuliert. Als Beispiel seien genannt:

- in der Festkörpermechanik: Deformation elastischer Körper, Kontakt- und Bruchprobleme, Verhalten von elasto-plastischen und plastischen Materialien;
- in der Strömungsmechanik: Flüsse um Hindernisse, Schockwellen in Gasen, Bewegung viskoser Fluide, Turbulenzen, Oberflächenwellen;
- in der Chemie, Physik und Biologie: nichtlineare Evolutionsgleichungen, Schmelzprozesse, chemische Reaktionen, Wärmeausbreitung, Verhalten von elastischen und magnetischen Feldern, Prozesse in Kernreaktoren, Diffusionsprozesse, dynamische Systeme;
- in der Ökonomie: Optimierungsprobleme, inverse Probleme.

In vielen Fällen führt die mathematische Modellierung auf nichtlineare Differential- und Integralgleichungen, auf die Minimierung nichtlinearer Funktionale oder auf Variationsungleichungen.

Wir untersuchen nichtlineare Operatorgleichungen im Rahmen der Funktionalanalysis:

$$Ax = y, \quad A : X \rightarrow Y .$$

Hierbei sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, z.B. können sie Teilmengen von Banachräumen sein. Die abstrakten Methoden der Funktionalanalysis führen zu Aussagen über die Lösbarkeit, Existenz und Eindeutigkeit, zu Abschätzungen und zur Charakterisierung des Verhaltens der Lösungen.

Es werden folgende Schwerpunkte gesetzt:

- Fixpunktsätze (z.B. Banach, Brouwer, Schauder) und Anwendungen
- Satz über implizite Funktionen in Banachräumen mit Beispielen
- Monotone und pseudomonotone Operatoren mit Anwendungen
- Existenz- und Eindeutigkeitsätze für Differentialgleichungen (u.a. gewöhnliche Differentialgleichungen, Navier-Stokes Gleichungen, quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme, Evolutionsgleichungen)
- zeitabhängige Probleme

Als Literatur wird empfohlen: [5], [9].





# Kapitel 1

## Fixpunktsätze

In diesem Kapitel gehen wir auf eine der wichtigsten Methoden zur Behandlung nichtlinearer Probleme ein: die Formulierung als Fixpunktgleichung und Anwenden von Fixpunktsätzen.

Es sei

$$T : M \subset X \rightarrow M$$

eine „Selbstabbildung“ einer Teilmenge eines metrischen, normierten oder topologischen Raumes  $X$  in sich. Die Gleichung

$$Tx = x$$

heißt Fixpunktgleichung, jede Lösung  $x$  wird Fixpunkt genannt.

Nicht jede Abbildung besitzt einen Fixpunkt. Man betrachte z.B. die Translation

$$Tx = x + x_0, x_0 \neq 0.$$

Wir demonstrieren an Beispielen, wie nichtlineare Probleme auf die Lösung von Fixpunktgleichungen zurückgeführt werden können

- (i) Bestimmung des Kerns (Nullraumes) einer Abbildung

$$Ax = 0.$$

Diese Gleichung kann in äquivalente Fixpunktgleichungen überführt werden

$$Tx = x \pm Ax = x$$

$$Tx = x \pm \lambda Ax = x, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, (\text{lineare Relaxation})$$

$$Tx = x - \lambda F(Ax) = x, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, F(Ax) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

(nichtlineare Relaxation)

$$Tx = x - (A'(x))^{-1}Ax = x,$$

vorausgesetzt  $(A'(x))^{-1}$  existiert, Newton-Verfahren

- (ii) Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

$$x(0) = x_0,$$

wobei  $f$  eine Abbildung

$$f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

ist. Das Anfangswertproblem kann als äquivalente Integralgleichung geschrieben werden:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds = Tx(t).$$

(iii) Dirichletproblem für eine nichtlineare Poissongleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Formal kann dieses Problem als Fixpunktgleichung mit Hilfe des inversen Operators  $(\Delta)^{-1}$  geschrieben werden:

$$u = (-\Delta)^{-1} f(u) = Tu.$$

## 1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten. Der Beweis ist konstruktiv, da ein Iterationsverfahren benutzt wird, das zu numerischen Berechnungen von Näherungslösungen mit entsprechenden a-priori und a-posteriori Fehlerabschätzungen führt. Er wird zumeist in der Analysis benutzt, um den Satz von Picard-Lindelöf über die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zu beweisen.

Wir formulieren den Banachschen Fixpunktsatz in metrischen Räumen  $X$  mit der Metrik  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Wir beginnen mit folgender Definition:

**Definition 1** Es sei  $T : M \subseteq X \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein metrischer Raum ist.

- $T$  ist  $k$ -kontrahierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq k\varrho(x, y) \tag{1.1}$$

$\forall x, y \in M$  und für ein festes  $k, 0 \leq k < 1$ , ist.

- $T$  ist kontrahierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M, x \neq y.$$

- $T$  ist nicht expandierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq \varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M \text{ (d.h. } k = 1\text{)}.$$

- $T$  ist Lipschitz-stetig, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq k\varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

und für ein  $k$  mit  $0 \leq k < \infty$  ist.

**Bemerkungen:**

Es gilt:  $k$ -kontrahierend  $\Rightarrow$  kontrahierend  $\Rightarrow$  nicht expandierend  $\Rightarrow$  Lipschitz-stetig.

Ist  $X$  ein normierter Raum und  $T$  eine lineare und stetige Abbildung, dann ist  $T$  stets Lipschitz-stetig mit  $k = \|T\|$ .

**Satz 1 (Banachscher Fixpunktsatz, 1922)**

Es sei

- $M$  eine abgeschlossene, nichtleere Menge in einem vollständigen metrischen Raum  $X$ .
- $T : M \subseteq X \rightarrow M$
- $T$  ist  $k$ -kontrahierend

Dann gilt

- *Eindeutigkeit:*  $x = Tx$  besitzt genau eine Lösung  $x \in M$ .
- *Konvergenz:* die Folge  $(x_n = Tx_{n-1})$  konvergiert gegen den Fixpunkt  $x$  für einen beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \in M$ .
- *Fehlerabschätzung a-priori:* für  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\rho(x_n, x) \leq k^n (1 - k)^{-1} \rho(x_0, x_1)$$

- *Fehlerabschätzung a-posteriori:*

$$\rho(x_{n+1}, x) \leq k(1 - k)^{-1} \rho(x_n, x_{n+1})$$

- *Konvergenzgeschwindigkeit:* für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $\rho(x_{n+1}, x) \leq k\rho(x_n, x)$ .

**Beweis:**

**1.Schritt:** Wir zeigen  $(x_n = Tx_{n-1})$  ist eine Cauchy-Folge,  $x_n \rightarrow x$  und  $Tx = x$ .

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq k\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^n\rho(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung liefert:

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+m}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1})\rho(x_0, x_1) \\ &\leq k^n(1 - k)^{-1}\rho(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

für genügend großes  $n$ . Da  $M$  abgeschlossen ist, konvergiert die Folge  $(x_n = Tx_{n-1})$  zu einem Grenzwert  $x \in M$ . Für diesen Grenzwert gilt:

$$\begin{aligned} \rho(x, Tx) &\leq \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tx) = \rho(x, x_{n+1}) + \rho(Tx_n, Tx) \\ &\stackrel{(1.1)}{<} \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x, x_n) < 2\varepsilon \quad \text{für genügend großes } n. \end{aligned}$$

Damit ist  $x = Tx$ .

**2.Schritt:** a-priori und a-posteriori Abschätzungen

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) &\leq \rho(x_n, x_{n+m}) + \rho(x_{n+m}, x) \\ &< k^n(1-k)^{-1}\rho(x_0, x_1) + \varepsilon \quad \text{für genügend großes } m.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\rho(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}\rho(x_0, x_1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Für  $x_0 = x_n$  erhalten wir

$$\rho(x_{n+1}, x) \leq k(1-k)^{-1}\rho(x_n, x_{n+1}).$$

Außerdem ist

$$\rho(x_{n+1}, x) = \rho(Tx_n, Tx) \leq k\rho(x_n, x).$$

**3.Schritt:** Eindeutigkeit

Es sei

$$x = Tx \text{ und } y = Ty.$$

Dann ist

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) < \rho(x, y) \quad \text{für } x \neq y,$$

was nicht sein kann. ■

**Bemerkung:**

Alle Voraussetzungen des Satzes 1 sind wesentlich, d.h. falls eine Voraussetzung verletzt wird, braucht kein Fixpunkt in  $M$  zu existieren (Übung).

Um weitere Versionen des Banachschen Fixpunktsatzes formulieren zu können, wiederholen wir den Begriff der Kompaktheit.

**Definition 2** Sei  $X$  ein metrischer Raum.  $M \subset X$  heißt kompakt, wenn jede Folge eine Teilfolge enthält, die zu einem bestimmten Element der Menge  $M$  konvergiert.  $M$  ist relativ kompakt, falls die Abschließung  $\overline{M}$  kompakt ist.

**Bemerkungen:**

- (i) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen. In endlichdimensionalen normierten Räumen sind diese Eigenschaften notwendig und hinreichend für die Kompaktheit.
- (ii) Eine stetige Abbildung  $F : M \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M$  kompakt ist, nimmt ihr Extremum auf  $M$  an.

**Satz 2** Es sei  $T$  eine kontrahierende Abbildung, die eine abgeschlossene Teilmenge  $M$  eines vollständigen metrischen Raumes  $X$  in sich abbildet. Das Bild  $T(M) = M_0 \subset M$  sei relativ kompakt. Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt in  $\overline{M_0} \subset M$ .

**Beweis:**

Wir betrachten den Ausdruck  $\rho(x, Tx) = F(x)$  als Abbildung von  $\overline{M}_0$  in  $\mathbb{R}$ . Da  $\rho$  und  $T$  stetige Abbildungen sind, ist auch  $F$  stetig und nimmt daher ihr Minimum auf  $\overline{M}_0$  (kompakte Menge) an. Sei  $\rho(x_0, Tx_0) = \min_{x \in \overline{M}_0} \rho(x, Tx)$ . Wir zeigen indirekt, dass  $x_0$  ein Fixpunkt ist.

Sei  $\rho(x_0, Tx_0) > 0$ , d.h.  $x_0 \neq Tx_0$ . Da  $T$  kontrahierend ist, gilt:

$$\rho(Tx_0, T^2x_0) < \rho(x_0, Tx_0).$$

Da  $Tx_0 \in M_0 \subset \overline{M}_0$  ist, wäre  $Tx_0$  Minimum von  $F(x)$  in  $\overline{M}_0$  und nicht  $x_0$ . Aus diesem Widerspruch folgt, dass  $x_0 = Tx_0$  ist.

Wir zeigen die Eindeutigkeit:

Wir nehmen an, es gäbe ein weiteres  $y_0, y_0 \neq x_0$ , mit  $Ty_0 = y_0$ . Dies führt auf

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Tx_0, Ty_0) < \rho(x_0, y_0)$$

und damit zum Widerspruch. ■

Eine weitere Variante von Satz 2 ist folgender:

**Satz 3** *Es sei  $T$  eine kontrahierende Abbildung, die einen kompakten, metrischen Raum  $M$  in sich abbildet. Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt  $x \in M$ , der Grenzwert einer Folge  $x_n = Tx_{n-1}$  für einen beliebigen Startwert  $x_0 \in M$  ist.*

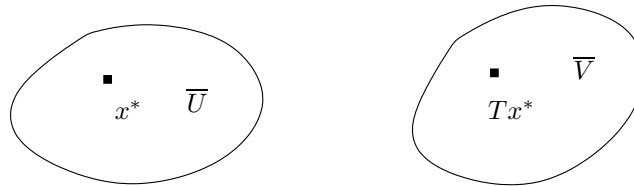


Abbildung 1.1: Disjunkte Umgebungen

**Beweis:**

Die Elemente  $x_n = T^n x_0$  befinden sich in der kompakten Menge  $M$ . Daher existiert eine konvergente Teilfolge  $(T^{n_i} x_0)_i$ , deren Grenzwert wir mit  $x^*$  bezeichnen. Da  $T$  eine stetige Abbildung ist, konvergiert die Bildfolge  $(T^{n_i+1} x_0)_i$  zum Grenzwert  $Tx^*$ .

Wir zeigen, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $T$  ist, also  $x^* = Tx^*$ . Wir nehmen indirekt an, dass  $x^* \neq Tx^*$  sei. Folglich existieren abgeschlossene disjunkte Umgebungen  $\overline{U}$  von  $x^*$  und  $\overline{V}$  von  $Tx^*$  in  $M$  (siehe Abbildung 1.1).

Die Produktmenge  $\overline{U} \times \overline{V}$  ist kompakt und daher nimmt die Abbildung

$$d(u, v) = \frac{\rho(Tu, Tv)}{\rho(u, v)}$$

ihr Maximum auf  $\overline{U} \times \overline{V}$  an. Wegen der Kontraktionseigenschaft erhalten wir

$$\rho(Tu, Tv) \leq k_0 \rho(u, v), \quad \forall u, v \in \overline{U} \times \overline{V},$$

wobei  $k_0 = \max_{u, v \in \overline{U} \times \overline{V}} d(u, v) < 1$  ist. Wir wählen nun einen Index  $i_0$  so, dass  $T^{n_i} x_0 \in \overline{U}$  und  $T^{n_i+1} x_0 \in \overline{V}$  für alle  $i \geq i_0$  ist. Es gilt für  $j > i_0$ , dass

$$\rho(T^{n_j} x_0, T^{n_j+1} x_0) \leq \dots \leq k_0^{j-i_0} \rho(T^{n_{i_0}} x_0, T^{n_{i_0}+1} x_0)$$

ist, und daher erhalten wir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(T^{n_j} x_0, T^{n_j+1} x_0) = \rho(x^*, Tx^*) = 0. \quad (\text{Widerspruch})$$

Wir zeigen, dass der Fixpunkt  $x^*$  auch Grenzelement der Ausgangsfolge  $T^n x_0$  ist. Ist  $n$  genügend groß, so können wir  $n = n_i + j$  schreiben. Damit wird

$$\begin{aligned} \rho(x^*, T^n x_0) &= \rho(x^*, T^{n_i+j} x_0) = \rho(T^j x^*, T^{n_i+j} x_0) \\ &< \rho(x^*, T^{n_i} x_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^*, T^n x_0) = 0. \quad \blacksquare$$

## Anwendungen

Wir sehen uns jetzt Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes an. Zunächst betrachten wir

### Iterationsmethoden zur Lösung linearer Operatorgleichungen.

Sei  $A : X \rightarrow X$  ein linearer stetiger Operator, der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet. Durch Einführung des Operators  $B : I - A$  erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$Bx + b = Tx = x,$$

die äquivalent zu  $Ax = b$  ist.

Da

$$\|Tx - Ty\| = \|Bx - By\| \leq \|B\| \|x - y\|$$

erhalten wir sofort: Ist  $\|B\| = \|I - A\| < 1$  dann existiert eine eindeutige Lösung. Etwas genauere Aussagen erhält man mit Hilfe des Spektralradius von  $B$ :

$$r(B) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz lautet dann

**Satz 4** Sei  $B = I - A$  ein linearer stetiger Operator, der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet.

a) Falls  $r(B) < 1$  ist, dann konvergiert die Folge

$$x_n = Bx_{n-1} + b$$

für jedes  $b \in X$  und für ein beliebiges Anfangselement  $x_0 \in X$  zu einer eindeutig bestimmten Lösung von

$$Bx + b = x.$$

b) Falls  $r(B) > 1$  ist, dann existiert ein Element  $b \in X$ , so dass die Folge  $(x_n)$  mit dem Anfangselement  $x_0 = 0$  divergiert.

**Beweis von a):**

Zunächst zeigt man, dass  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Die Elemente der Folge lauten:

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ beliebig} \\ x_1 & = b + Bx_0 \\ x_2 & = b + Bb + B^2x_0 \\ & \vdots \\ x_n & = b + Bb + \dots + B^{n-1}b + B^n x_0 \\ x_{n+1} & = b + Bb + \dots + B^{n-1}b + B^n x_1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) & = \|x_n - Tx_n\| = \|B^n x_0 - B^n x_1\| \\ & \leq \|B^n\| \|x_0 - x_1\|, \end{aligned}$$

und

$$\rho(x_n, x_m) \leq (\|B\| + \dots + \|B^{m-1}\|) \|x_0 - x_1\| \quad \text{für } m > n$$

ist. Die Zahlenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \|B^n\|$  konvergiert, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} = \rho(B) < 1.$$

Bezeichnen wir mit  $S_m = \sum_{n=1}^m \|B^n\|$  die Partialsumme, dann ist

$$\rho(x_n, x_m) = (S_{m-1} - S_{n-1}) \|x_0 - x_1\| < \varepsilon \quad \text{für } m > n > n_0(\varepsilon),$$

und  $(x_n)_n$  ist Cauchy-Folge mit dem Grenzwert  $x^*$ .

Wir zeigen, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $T$  ist:

$$\begin{aligned} \rho(x^*, Tx^*) & \leq \rho(x^*, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tx^*) = \rho(x^*, x_{n+1}) + \rho(Tx_n, Tx^*) \\ & < \varepsilon + \|B(x_n - x^*)\| \leq \varepsilon + \|B\| \|x_n - x^*\| \\ & < 2\varepsilon \end{aligned}$$

für genügend großes  $n$ .

Wir zeigen nun indirekt, dass der Fixpunkt eindeutig bestimmt ist.

Sei  $x = Tx$  und  $Ty = y$ ,  $x \neq y$ . Es gilt

$$\|x - y\| = \|T^n x - T^n y\| = \|B^n(x - y)\| \leq \|B^n\| \|x - y\| < \|x - y\| \quad \text{für } n > n_0.$$

(Widerspruch!) ■

**Ein semilineares Problem**

Gesucht ist eine skalare Funktion  $u$ , die in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist, so dass

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u & = f(u) \quad \text{in } \Omega \\ u & = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Der Parameter  $\mu$  sei eine positive reelle Zahl. Die schwache Formulierung von (1.2) lautet:  
Finde ein  $u \in W^{1,2}(\Omega) = V$ , so dass

$$a(u, v) = \mu \int \nabla u \nabla v \, dx = \langle f(u), v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (1.3)$$

Hier ist  $f : V \rightarrow V'$ .

Wir führen die Menge  $M$  ein:

$$M = \{u \in V : \|u\|_V \leq R\},$$

wobei  $R$  eine positive reelle Zahl ist. Wir nehmen an, dass

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'} \leq c_f \|u_1 - u_2\|_V \quad (1.4)$$

für alle  $u_1, u_2 \in M$ . Die Konstante  $c_f$  sei beschränkt durch die Konstante  $\alpha$  aus der Ungleichung

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

genauer,

$$c_f \leq \alpha - \delta, \quad (1.5)$$

wobei  $\delta$  eine kleine positive Zahl ist. Weiterhin sei  $f$  folgendermaßen beschränkt auf  $M$

$$\|f(u)\|_{V'} \leq \alpha R \quad \forall u \in M. \quad (1.6)$$

Wir linearisieren (1.3) im Punkt  $u_0 \in M$ :

$$a(u, v) = \langle f(u_0), v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (1.7)$$

Wir zeigen nun, dass die Abbildung  $T$ , die  $u_0 \in M$  die eindeutig bestimmte Lösung von (1.7) zuordnet,  $Tu_0 = u$ , eine lineare Abbildung von  $M$  in  $M$  und  $k$ -kontrahierend ist.

**Satz 5** *Es sei  $f : V \rightarrow V'$  eine Abbildung, die den Voraussetzungen (1.4), (1.5) und (1.6) genügt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in M$  des Problems (1.3), die durch ein iteratives Verfahren gewonnen werden kann.*

## Beweis

Die oben definierte Abbildung  $T$  hat folgende Eigenschaften:

1°  $T : M \rightarrow M$ .

$$\|Tu_0\|_V = \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0)\|_{V'} \leq R.$$

2°  $T$  ist  $k$ -kontrahierend auf  $M$ :

Es seien  $T(u_0) = u, T(w_0) = w$  Lösungen von (1.7). Dann ist

$$\begin{aligned} a(u, w, v) &= \langle f(u_0) - f(w_0), v \rangle, \\ \|Tu_0 - Tw_0\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0) - f(w_0)\|_{V'} \leq \frac{c_f}{\alpha} \|u_0 - w_0\|_V. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (1.5) führt zur Behauptung. ■



**Bemerkungen:**

- Die Konstante  $\alpha = \frac{\mu}{1+d(\Omega)^2}$ ,  $d(\Omega) = \min\{\text{diam}(\Omega \cap x_i - \text{Achse}), 1 \leq i \leq n\}$ , liefert eine obere Schranke von  $c_f$ , die vom Parameter  $\mu$  abhängt. Dadurch wird der Radius  $R$  der Menge beeinflusst. Außerdem spielt die Flachheit von  $f$  im Nullpunkt eine Rolle, was sich auf  $c_f$  und  $R$  auswirkt.
- Gilt  $\|f(u)\|_V \leq r$  für alle  $u \in V$ , dann kann  $R = \frac{r}{\alpha}$  gewählt werden.

**Existenz und Eindeutigkeit für schwache Lösungen des Dirichletproblems für die stationären Navier-Stokes Gleichungen**

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Gesucht werden das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u} = \vec{u}(x)$  und das Druckfeld  $p = p(x)$ , die folgendem Randwertproblem genügen:

$$-\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ in } \Omega, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1.9)$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.10)$$

Durch skalare Multiplikation der Gleichung (1.8) mit einem genügend glatten Vektorfeld  $\vec{v}$  und der Gleichung (1.9) mit einer genügend glatten Funktion  $q$  sowie partieller Integration erhalten wir:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx \quad (1.11)$$

$$- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \cdot \vec{v} + p n \cdot \vec{v} \right) d\sigma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} q \, dx = 0. \quad (1.13)$$

Führen wir die Abkürzungen

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx$$

$$c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx$$

$$b(\vec{v}, p) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} p \, dx$$

ein, dann erhalten wir unter Beachtung der Randbedingungen (1.10) mit Hilfe von (1.11) und (1.12) eine **schwache Formulierung** des Dirichlet Problems für die stationären Navier-Stokes Gleichungen:

Gesucht sind die Felder  $(\vec{u}, p) \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \times L_2(\Omega)$ , die den Gleichungen

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \\ b(\vec{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

für alle  $(\vec{v}, q) \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \times L_2(\Omega)$  und für alle  $\vec{f} \in \left( [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \right)'$  genügen.

$\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$  ist der Sobolevraum, welcher der Abschluss der beliebig oft differenzierbaren Funktionen aus  $C_0^\infty(\Omega)$ , die ihren Träger in  $\Omega$  haben, bezüglich folgender Norm ist:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$W = [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n = \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \times \dots \times \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$  ist der  $n$ -fache Produktraum.

Mit  $\left( [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \right)' = W'$  wird der Dualraum bezeichnet.

Wir betrachten weiterhin eine zu (1.14) äquivalente schwache Formulierung:

Für  $\vec{f} \in W'$  suche ein  $\vec{z} \in V = \left\{ \vec{v} \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n : \nabla \cdot v = 0 \right\}$ , so dass

$$a(\vec{z}, \vec{v}) + c(\vec{z}, \vec{z}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (1.15)$$

Die Lösbarkeit des Problems (1.14) bzw. (1.15) wird durch Zurückführen auf das lineare Stokes Problem untersucht. Dabei spielen insbesondere bei (1.15) folgende Abschätzungen eine zentrale Rolle

$$|a(\vec{u}, \vec{v})| \leq C_a \|\vec{u}\|_W \|\vec{v}\|_W \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in W, C_a \leq 4\nu, \quad (1.16)$$

$$a(\vec{u}, \vec{v}) \geq \alpha \|\vec{u}\|_W^2 \quad \forall \vec{u} \in W, \alpha = \nu C(\Omega), \quad (1.17)$$

$$c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) \leq \gamma \|\vec{u}\|_W \|\vec{v}\|_W \|\vec{w}\|_W, \gamma = \gamma(\text{diam } \Omega). \quad (1.18)$$

**Satz 6** Es sei  $\|f\|_{W'} \leq \frac{\alpha^2}{4\gamma} - \gamma\varepsilon^2$ , wobei  $\varepsilon > 0$  eine reelle Zahl ist. Dann existiert eine eindeutige Lösung  $(\vec{u}, p)$  von (1.14).  $\vec{u}$  ist in der Kugel

$$M = \{ \vec{w} \in V : \|\vec{w}\|_W \leq \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \}$$

eindeutig bestimmt.

## Beweis

Wir gehen von der schwachen Formulierung (1.15) aus. Es sei  $z_0$  ein beliebiges, festes Element aus  $V$ . Wir betrachten die Gleichung

$$a(\vec{z}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (1.19)$$

$\vec{F}$  befindet sich in  $W' \subset V'$ . Durch die Ungleichungen (1.16) und (1.17) sind die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram für die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $V \times V$  erfüllt. Daher existiert zu jedem  $\vec{z}_0 \in V$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{z} \in V$  des schwachen Problems (1.19). Diese genügt der Abschätzung

$$\|\vec{z}\|_V = \|\vec{z}\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|\vec{F}\|_{W'} \leq \frac{1}{\alpha} \left( \|\vec{f}\|_{W'} + \gamma \|\vec{z}_0\|_W^2 \right). \quad (1.20)$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $T : V \rightarrow V$ , die durch  $T\vec{z}_0 = \vec{z}$  definiert ist.

Wir zeigen, dass  $T$  den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

1.  $T$  bildet  $M$  in  $M$  ab:

Aus der Ungleichung (1.20) und der Voraussetzung an  $\vec{f}$  folgt, dass

$$\|T\vec{z}_0\|_W = \|\vec{z}\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \left[ \|\vec{f}\|_{W'} + \gamma \left( \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \right)^2 \right] \leq \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \quad (1.21)$$

ist.

2.  $T$  ist  $k$ -kontrahierend in  $M$ :

Es seien  $\vec{z}_0$  und  $\tilde{\vec{z}}_0$  Elemente aus  $M$  und  $\vec{z} = T\vec{z}_0$ ,  $\tilde{\vec{z}} = T\tilde{\vec{z}}_0$  die entsprechenden Lösungen von (1.19). Damit ist

$$\begin{aligned} a(\vec{z}, \vec{v}) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) . \\ a(\tilde{\vec{z}}, \vec{v}) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\tilde{\vec{z}}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) . \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(\vec{z} - \tilde{\vec{z}}, \vec{v}) &= -c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) + c(\tilde{\vec{z}}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) \\ &= c(\tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) + c(\vec{z}_0, \tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0, \vec{v}) . \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Ungleichung (1.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\vec{z} - \tilde{\vec{z}}\|_W &\leq \frac{1}{\alpha} \left[ \gamma \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W \|\tilde{\vec{z}}_0\|_W + \gamma \|\vec{z}_0\|_W \|\tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0\|_W \right] \\ &\leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W (\|\tilde{\vec{z}}_0\|_W + \|\vec{z}_0\|_W) \\ &\leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W 2 \left( \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\|T\vec{z}_0 - T\tilde{\vec{z}}_0\|_W \leq k \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W$$

für

$$k = \frac{\gamma}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\gamma} - 2\varepsilon \right) < 1 .$$

■

### Bemerkung:

1. Die Lösung  $(\vec{u}, p)$  von (1.14) ist nicht eindeutig. Das Druckfeld ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Durch die Normierung  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$  wird  $p$  eindeutig.
2. Ist die Reynoldszahl  $Re = \frac{1}{\nu}$  klein, dann wird durch diesen Satz eine Lösung garantiert (zähe Flüsse).

## 1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Beim Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes werden keine tiefliegenden Sätze aus der Theorie der metrischen Räume benutzt. Der Preis dafür ist, dass eine starke Eigenschaft, nämlich die  $k$ -Kontraktivität bzw. Kontraktivität des Operators, gefordert wurde. Möchte man diese Eigenschaft abschwächen, muss man an die Räume  $M$  mehr Forderungen stellen.

Der Fixpunktsatz von Brouwer wird für eine abgeschlossene Kugel im  $\mathbb{R}^n$  formuliert, der Satz von Schauder (1930) gilt in unendlich-dimensionalen Räumen. Beide sichern die Existenz (nicht die Eindeutigkeit) von Fixpunkten.

**Satz 7 (Fixpunktsatz von Brouwer)** *Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen, beschränkten Kugel des  $\mathbb{R}^n$  in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

**Satz 8 (Fixpunktsatz von Schauder)** *Sei  $M$  eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge eines Banachraumes  $X$ . Eine stetige Abbildung  $T : M \subset X \rightarrow M$  besitzt einen Fixpunkt.*

Wir beweisen zunächst den Brouwerschen Fixpunktsatz im  $n$ -dimensionalen Raum und übertragen dann mit Hilfe eines Approximationssatzes für kompakte Operatoren dieses Resultat auf unendlichdimensionale Räume.

### Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel im  $\mathbb{R}^1$ .

#### Beispiel:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.

Setzen  $g(x) = f(x) - x$ . Da  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  abbildet, ist

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \geq 0 \\ g(b) &= f(b) - b \leq 0 \end{aligned}$$

Aus dem Zwischenwertsatz von Bolzano folgt, dass mindestens ein  $x_0$  existiert mit  $g(x_0) = 0$ , d.h.  $f(x_0) = x_0$ .

Der Satz von Brouwer kann mit verschiedenen Methoden bewiesen werden, z.B. mit topologischen Methoden (Retraktionssatz) oder mit Variationsmethoden (Minimierung von Energiefunktionalen, Lösungen der homogenen Euler-Lagrange Gleichungen) [3, S.439],[5, S.11 ff.]. Wir wählen den 2. Weg. Zunächst führen wir kurz die entsprechenden Begriffe ein (siehe [6]).

### Lagrange Funktionen und Euler-Lagrange Gleichungen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand  $\partial\Omega$  und  $\vec{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{w} = \vec{w}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1(x), \dots, w_m(x))^T$ . Weiterhin sei  $\mathbb{R}^{m \times n}$  der Raum aller  $(m \times n)$ -Matrizen mit reellen Einträgen.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{\vec{w} \in [C^2(\bar{\Omega})]^m : \vec{w} = \vec{g} \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Das Funktional  $I$  auf  $\mathcal{M}$  besitze die Form

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D\vec{w}(x), \vec{w}(x), x) dx, \quad (1.22)$$

wobei  $D\vec{w}$  die Fréchetableitung (Jacobi-Matrix) des Vektorfeldes  $\vec{w}$  ist:

$$D\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Abbildung  $L : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Lagrange-Funktion. Um die Variablen von  $L$  zu kennzeichnen, führen wir die Schreibweise  $L = L(P, \vec{z}, x)$  ein, wobei  $D\vec{w} = P = (p_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ ,  $\vec{w} = \vec{z}$  sind.

Weiterhin sei

$$D_P L = \begin{pmatrix} L_{p_{11}} & \cdots & L_{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p_{m1}} & \cdots & L_{p_{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial p_{m1}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{mn}} \end{pmatrix}$$

und

$$D_{\vec{z}} L = \begin{pmatrix} L_{z_1} \\ \vdots \\ L_{z_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial z_m} \end{pmatrix}.$$

Folgender Satz verbindet das Funktional  $I$  mit einem System partieller Differentialgleichungen.

**Satz 9** *Besitzt das Funktional (1.22) einen Minimierer  $\vec{u}$  in  $\mathcal{M}$ , dann ist  $\vec{u}$  Lösung eines nicht-linearen Systems von partiellen Differentialgleichungen (System der Euler-Lagrange Gleichungen)*

$$-\operatorname{div} D_P L(D\vec{u}, \vec{u}, x) + D_{\vec{z}} L(D\vec{u}, \vec{u}, x) = \vec{0} \quad \text{in } \Omega.$$

Hierbei ist

$$-\operatorname{div} D_P L = \begin{pmatrix} \partial_1 L_{p_{11}} + \partial_2 L_{p_{12}} + \cdots + \partial_n L_{p_{1n}} \\ \cdots \\ \partial_1 L_{p_{m1}} + \partial_2 L_{p_{m2}} + \cdots + \partial_n L_{p_{mn}} \end{pmatrix}$$

ein Vektor aus  $\mathbb{R}^m$ .

### Beweis

Wir betrachten ein  $\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  und führen die reelle Funktion  $i$  einer reellen Variablen  $\tau$  ein

$$i(\tau) := I[\vec{u} + \tau\vec{v}].$$

Die Elemente  $\vec{u} + \tau\vec{v}$  sind aus  $\mathcal{M}$  und  $i(\tau)$  ist wohl definiert. Da  $\vec{u}$  Minimierer ist, muss  $i'(0) = 0$  sein.

Nach der Kettenregel ist

$$i'(\tau) = \int_{\Omega} L_P(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) \cdot \vec{v} \, dx,$$

wobei  $A : B = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}$  ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} i'(0) &= \int_{\Omega} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}} D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx = 0. \end{aligned}$$

■

Es gibt Lagrange-Funktionen, für die jedes Vektorfeld  $\vec{w} \in [C^2(\bar{\Omega})]^m$  Lösung der homogenen Euler-Lagrange Gleichung ist. Diese Lagrange-Funktionen heißen Null-Lagrange-Funktionen.

### Beispiel:

Es sei  $L = L(D\vec{w}) = \det(D\vec{w})$ , wobei  $\vec{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für  $L = L(P) = \det P$  gilt

$$D_P L(P) = \operatorname{Cof} P. \quad (1.23)$$

Hierbei ist die Cofaktor-Matrix einer Matrix  $A$  wie folgt definiert.

**Definition 3** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Für jedes Indexpaar  $(i, j)$  sei  $A'_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  die Matrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte erhält. Sei

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \det A'_{ij}. \quad (1.24)$$

Die Cofaktor-Matrix von  $A$  ist

$$\operatorname{Cof} A = (d_{ij})_{i,j}. \quad (1.25)$$

Es gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile}), \quad (1.26)$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}), \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

und damit

$$A(\operatorname{Cof} A)^{\top} = (\operatorname{Cof} A)^{\top} A = \det A I. \quad (1.29)$$

Falls  $A$  invertierbar ist, erhalten wir

$$\operatorname{Cof} A = \det A A^{-\top}.$$

Weiterhin gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof}(AB) &= \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B, \\ \operatorname{Cof}(A^{\top}) &= (\operatorname{Cof} A)^{\top}. \end{aligned}$$

Aus (1.26) folgt

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ks}} = (\operatorname{Cof} A)_{ks} \quad \text{für } k, s = 1, 2, \dots, n$$

und damit

$$D(\det A) = \text{Cof } A.$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen lauten für  $P = A = D\vec{w}$

$$\text{div } D_P L(P) = \text{div } \text{Cof } P = \text{div } \text{Cof } (D\vec{w}) = \vec{0}. \quad (1.30)$$

Dies ist die aus der Mechanik bekannte Piola-Identität.

Wir zeigen sie durch direktes Nachrechnen im Fall  $n = 3$ . Für allgemeineres  $n$  ist der Beweis in [3, S.440] und [5, S.14] zu finden.

**Lemma 1** Sei  $\vec{w} \in (C^2(\overline{\Omega}))^3$ . Es gilt die Piola-Identität

$$\text{div } \text{Cof } (D\vec{w}) = \vec{0}.$$

### Beweis

Es ist

$$\text{Cof } (D\vec{w}) = (d_{ij})_{i,j=1,2,3}$$

mit

$$d_{ij} = \partial_{j+1} w_{i+1} \partial_{j+2} w_{i+2} - \partial_{j+2} w_{i+1} \partial_{j+1} w_{i+2},$$

wobei die Indizes modulo 3 zu nehmen sind. Es ist für  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} (\text{div } \text{Cof } D\vec{w})_i &= \sum_{j=1}^3 \partial_j d_{ij} = \partial_1 [\partial_2 w_{i+1} \partial_3 w_{i+2} - \partial_3 w_{i+1} \partial_2 w_{i+2}] \\ &\quad + \partial_2 [\partial_3 w_{i+1} \partial_1 w_{i+2} - \partial_1 w_{i+1} \partial_3 w_{i+2}] \\ &\quad + \partial_3 [\partial_1 w_{i+1} \partial_2 w_{i+2} - \partial_2 w_{i+1} \partial_1 w_{i+2}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

### Bemerkung:

Man kann zeigen, dass  $L(P) = L(D\vec{w})$  genau dann eine Null-Lagrange-Funktion ist, wenn es Matrizen  $B$  und  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und Konstanten  $a$  und  $d \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$L(P) = a + B : P + C : \text{Cof } P + d \det P$$

ist. Die Bedeutung der Null-Lagrange-Funktionen liegt darin, dass das Energiefunktional  $I(\vec{w}) = \int_{\Omega} L(D\vec{w}, \vec{w}, x) dx$  nur von den Randdaten von  $\vec{w}$  abhängt.

**Satz 10** Sei  $L = L(D\vec{w}, \vec{w}, x)$  eine Null-Lagrange-Funktion. Seien  $\vec{w}$  und  $\vec{u}$  zwei Funktionen aus  $[C^2(\overline{\Omega})]^m$  mit  $\vec{w} = \vec{u}$  auf  $\partial\Omega$ .

Dann ist

$$I[\vec{w}] = I[\vec{u}]. \quad (1.31)$$

**Beweis**

Sei

$$i(\tau) = I[\tau\vec{u} + (1 - \tau)\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D(\tau\vec{u} + (1 - \tau)\vec{w}), \tau\vec{u} + (1 - \tau)\vec{w}, x) dx, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \int_{\Omega} L_P(\tau D\vec{u} + (1 - \tau)D\vec{w}) : (D\vec{u} - D\vec{w}) + L_{\vec{z}}(\tau D\vec{u} + (1 - \tau)D\vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) dx \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} \int_{\Omega} [-\text{div } L_P(\tau D\vec{u} + (1 - \tau)D\vec{w}) + L_{\vec{z}}(\tau D\vec{u} + (1 - \tau)D\vec{w})] \cdot (\vec{u} - \vec{w}) dx. \end{aligned}$$

Da  $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$  auf dem Rand verschwindet, entfällt der Randterm. Weiterhin ist  $\tau\vec{u} + (1 - \tau)\vec{w}$  Lösung der homogenen Euler-Lagrange Gleichungen, da  $L$  eine Null-Lagrange-Funktion ist. Daher ist  $i'(\tau) = 0$ , woraus  $i(\tau) = \text{const}$  für  $0 \leq \tau \leq 1$  folgt. Wir erhalten unmittelbar (1.31).  $\blacksquare$

Wir sind jetzt in der Lage, den Fixpunktsatz von Brouwer zu beweisen.

**Satz 11** Jede stetige Abbildung  $T$  einer abgeschlossenen Kugel des  $\mathbb{R}^n$  in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.

**Beweis:**

Wir betrachten o.B.d.A. die abgeschlossene Einheitskugel

$$T : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)} = B.$$

**1.Schritt:**

Wir zeigen, dass es keine Funktion  $\vec{w}$  aus  $[C^2(\overline{\Omega})]^n$  gibt

$$\vec{w} : B \rightarrow \partial B, \quad (1.32)$$

so dass für alle  $x \in \partial B$

$$\vec{w}(x) = x. \quad (1.33)$$

Wir nehmen an, dass eine solche Funktion  $\vec{w}$  existiert. Sei  $\vec{\text{id}}$  die identische Abbildung  $\vec{\text{id}}(x) = x$  für alle  $x \in B$ . Dann gilt  $\vec{w}(x) = \vec{\text{id}}(x)$  auf  $\partial B$ . Nach Satz 10 ist

$$\int_B \det D\vec{w} dx = \int_B \det D\vec{\text{id}} dx = \text{vol } B \neq 0. \quad (1.34)$$

Andererseits ist  $\vec{w}(x) \in \partial B$  und deshalb  $|\vec{w}| = |\vec{w}|^2 = 1$ . Differentiation von  $|\vec{w}|^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2(x) = 1$  liefert

$$\text{grad } |\vec{w}|^2 = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n w_i(x) \partial_1 w_i \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^n w_i(x) \partial_n w_i \end{pmatrix} = 2(D\vec{w})^\top \vec{w} = \vec{0}.$$

Damit ist die Zahl 0 ein Eigenwert von  $(D\vec{w})^\top$  für alle  $x \in B$ . Man beachte, dass  $\vec{w}(x) \neq \vec{0}$  ist. Folglich ist  $\det(D\vec{w})^\top = \det(D\vec{w}) = 0$  und nach (1.34) ist  $\text{vol } B = 0$  (Widerspruch!).



**2.Schritt:** Wir zeigen, dass es keine stetige Funktion gibt für die (1.32) und (1.33) gelten. Angenommen es gäbe eine. Wir setzen sie stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus B$  fort, indem wir definieren

$$w(x) = x \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B.$$

Es ist  $|w(x)| \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Wir glätten die fortgesetzte Funktion  $w(x)$  so, dass die Glättung  $w_\varepsilon(x) = x$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$  und  $w_\varepsilon(x) \geq \frac{1}{2}$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist.

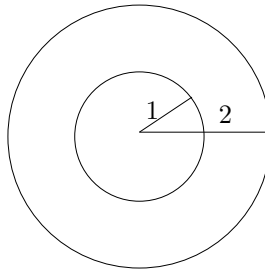


Abbildung 1.2:  $w_\varepsilon(x) = x$

Dann ist

$$\tilde{w}(x) = \frac{2w_\varepsilon(x)}{|w_\varepsilon(x)|}$$

wohl definiert, glatt und

$$\begin{aligned} \tilde{w} &: B_2(0) \rightarrow \partial B_2(0) \\ \tilde{w}(x) &= x \text{ für } x \in \partial B_2(0). \end{aligned}$$

Wir wiederholen den Beweis von Schritt 1 für  $\tilde{w}$  und erhalten einen Widerspruch.

### 3. Schritt:

Sei  $T : B \rightarrow B$  eine stetige Funktion, die keinen Fixpunkt besitzt. Wir konstruieren eine Funktion  $w$ , die stetig ist und die Eigenschaften (1.32) und (1.33) besitzt:

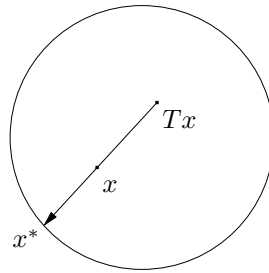
Wir legen durch die verschiedenen Punkte  $x$  und  $T(x)$  einen Strahl, der von  $T(x)$  startet und einen eindeutigen Schnittpunkt  $x^*$  mit  $\partial B$  besitzt. Wir definieren:

$$\begin{aligned} w &: x \rightarrow x^* \\ w &: B \rightarrow \partial B. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $w(x) = x = x^*$  falls  $x \in \partial B$  ist.  $w$  ist stetig, da  $T$  stetig ist. Eine solche Funktion kann nicht existieren. ■

### Folgerung:

Sei  $M$  eine zu einer abgeschlossenen Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  homöomorphe Menge, d.h. es existiert eine stetige, eineindeutige und surjektive Abbildung  $f$  von  $B$  auf  $M$ ,  $f : B \rightarrow M$ . Jede stetige Abbildung  $T : M \rightarrow M$  besitzt einen Fixpunkt.

Abbildung 1.3: Konstruktion des Schnittpunktes  $x^*$ **Beweis:**

Die Abbildung  $A = f^{-1} \circ T \circ f : B \rightarrow B$  ist stetig. Daher besitzt  $A$  einen Fixpunkt  $x_0$ :

$$Ax_0 = f^{-1} \circ T \circ f(x_0) = x_0.$$

Folglich ist

$$T \circ f(x_0) = f(x_0),$$

d.h.  $f(x_0) \in M$  ist Fixpunkt von  $T$ . ■

Beispiele für solche Mengen  $M$  sind konvexe, kompakte Mengen im  $\mathbb{R}^n$ .

Als eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes formulieren wir einen Satz über die Existenz von Lösungen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Die nichtlinearen Gleichungen

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

oder kurz

$$g(x) = 0$$

seien gegeben.  $g$  wird als Abbildung von  $\overline{K}_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  aufgefasst. Wir untersuchen die Frage, ob Nullstellen des Gleichungssystems in der Kugel  $\overline{K}_r(0)$  existieren.

**Satz 12**  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  sei ein normierter Raum und  $g$  eine stetige Abbildung von  $\overline{K}_r(0) \subset X \rightarrow X$ . Falls

$$(g(x), x)_{E^n} \geq 0 \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = r$$

ist, dann besitzt das System  $g(x) = 0$  eine Lösung in  $\overline{K}_r(0)$ .

$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{E^n}$  bezeichnet das Skalarprodukt im euklidischen Raum  $E^n$ .

**Beweis:**

Wir nehmen an, dass  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \overline{K}_r(0)$  sei. Die Abbildung

$$f(x) = -r \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$$

ist dann eine stetige Abbildung von  $\overline{K}_r(0)$  in  $\overline{K}_r(0)$  und es ist  $\|f(x)\| = r$  für alle  $x \in \overline{K}_r(0)$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein  $x_0 \in \overline{K}_r(0)$  mit

$$x_0 = f(x_0).$$

Da  $\|x_0\| = \|f(x_0)\| = r$  ist, liegt  $x_0$  auf dem Rand von  $\overline{K}_r(0)$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}(g(x_0), x_0) &= \left( -\frac{1}{r} f(x_0) \|g(x_0)\|, x_0 \right) \\ &= -\frac{1}{r} \|g(x_0)\| (f(x_0), x_0) \\ &= -\frac{1}{r} \|g(x_0)\| (x_0, x_0) < 0.\end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung des Satzes verletzt und es muss eine Nullstelle des Gleichungssystems in  $\overline{K}_r(0)$  existieren. ■

### Der Schaudersche Fixpunktsatz [Julius Schauder(1899-1943)]

Der Schaudersche Fixpunktsatz ist eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Mengen  $M$  aus unendlich-dimensionalen Räumen.

Man kann anhand eines Gegenbeispiels zeigen, dass der Brouwersche Fixpunktsatz nicht ohne weiteres auf unendlich-dimensionale Räume übertragen werden kann und sogar in separablen unendlich-dimensionalen Hilberträumen nicht gilt.

**Satz 13 (Kakutani 1943)** Sei  $H$  ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann gibt es eine stetige Abbildung  $T : H \rightarrow H$ , die die abgeschlossene Einheitskugel in sich selbst abbildet und keinen Fixpunkt besitzt.

#### Beweis

In  $H$  sei das Skalarprodukt  $(x, y)$  für  $x, y \in H$  definiert. Da  $H$  separabel ist, existiert eine Orthonormalbasis  $(y_n)_{-\infty < n < \infty}$ , so dass jedes  $x \in H$  die Darstellung

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$$

besitzt. Wir betrachten die Abbildung  $A$ , indem wir die Wirkung auf die Basisfunktionen angeben

$$A : H \rightarrow H, \quad y_n \rightarrow y_{n+1}.$$

Dann wird

$$Ax = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

$A$  ist linear und beschränkt:

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j y_{j+1} \right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist  $A$  auch stetig und bildet  $S_r = \{x \in H : \|x\| = r\}$  in sich ab. Für den Basisvektor  $y_0$  (beachte  $\|y_0\| = 1$ ) definieren wir

$$Tx := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)y_0 + Ax. \quad (1.35)$$

Die Abbildung  $T$  ist stetig und bildet  $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$  in sich selbst ab:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leq \frac{1}{2}(1 - \|x\|)\|y_0\| + \|Ax\| = \frac{1}{2}(1 - \|x\|) + \|x\| \\ &= \frac{1}{2}(1 + \|x\|) \leq 1.\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an,  $T$  besitze einen Fixpunkt  $x_0 \in B$ ,  $Tx_0 = x_0$ . (1.35) liefert uns

$$x_0 - Ax_0 = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0. \quad (1.36)$$

**1.Fall:**

$x_0 = 0$ . Dann ist  $\frac{1}{2}y_0 = 0$ , was nicht sein kann.

**2.Fall:**

$\|x_0\| = 1$ . Dann ist  $x_0 = Ax_0$  und

$$x_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

Es folgt  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$  für alle  $i$  und  $\|x_0\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i^2 \neq 1$ , Widerspruch.

**3.Fall:**

$0 < \|x_0\| < 1$ . Wir erhalten aus (1.36)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (\alpha_i - \alpha_{i-1})y_i = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0.$$

Durch Koeffizientenvergleich wird

$$\begin{aligned}\alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0 \quad \text{für } i = 0, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} \quad \text{für } i \neq 0.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\dots \alpha_{-3} = \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \dots$$

und  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \infty$ . Widerspruch! ■

Im Schauderschen Fixpunktsatz wird von der Teilmenge  $M$  gefordert, dass sie kompakt und konvex sei, oder, dass der stetige Operator  $T$  zusätzlich kompakt sei. Diese unterschiedlichen Voraussetzungen führen zu zwei äquivalenten Fassungen des Schauderschen Fixpunktsatzes.

**Definition 4 (kompakter (vollstetiger) Operator)** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ .  $T$  ist kompakt, wenn

1.  $T$  ist stetig.
2.  $T$  bildet beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab.

**Lemma 2** Es sei  $T$  eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes  $X$  in einen metrischen Raum  $Y$ . Dann ist sein Bild kompakt.

**Beweis:**

Wir betrachten eine offene Überdeckung  $(V_\alpha)_\alpha$  der Bildmenge  $T(X)$ . Da  $T$  stetig ist, sind die Urbilder  $T^{-1}(V_\alpha)$  offen und bilden eine Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  kompakt ist, reichen endlich viele Urbilder  $T^{-1}(V_{\alpha_i}), i = 1, \dots, n$  aus, deren Vereinigung  $X$  überdeckt. Damit ist auch  $T(X) \subset \cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ . ■

Beispiele für kompakte Operatoren sind u.a. lineare und nichtlineare Integraloperatoren

$$T(x) = y(t) = \int_a^b K(t, s, x(s)) ds$$

$$S(x) = y(t) = \int_a^t K(t, s, x(s)) ds$$

und Einbettungsoperatoren in entsprechenden Banachräumen.

Kompakte Operatoren spielen eine zentrale Rolle in der nichtlinearen Funktionalanalysis. Aussagen für stetige Operatoren in endlichdimensionalen Räumen lassen sich häufig auf „vollstetige“ Operatoren in unendlich-dimensionalen Räumen übertragen. Eine Grundlage für diese Übertragung bildet der folgende Satz:

**Satz 14 (Approximationssatz für kompakte Operatoren)** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $T : M \subset X \rightarrow Y$ , wobei  $M$  eine nichtleere beschränkte Teilmenge ist.  $T$  ist kompakt genau dann, wenn zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein kompakter Operator  $P_n : M \rightarrow Y$  existiert, so dass  $\dim(\text{span } P_n(M)) < \infty$  und*

$$\sup_{x \in M} \|T(x) - P_n(x)\|_Y \leq \frac{1}{n} \quad (1.37)$$

ist.

**Beweis:**

- a) Wir nehmen an, dass  $T$  kompakt ist. Dann ist  $T(M)$  relativ kompakt, d.h. für jedes  $n$  gibt es Elemente  $y_i \in T(M), i = 1, \dots, N$ , so dass

$$\min_i \|Tx - y_i\| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in M.$$

Die Elemente  $\{y_i\}$  bilden ein endliches  $\frac{1}{n}$ -Netz für  $T(M)$ .

Wir führen den Schauderoperator  $P_n$  ein:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) y_i,$$

wobei  $a_i(x) = \max\{\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|, 0\}$  eine stetige reellwertige Abbildung von  $M$  in  $\mathbb{R}$  ist. Da

$$a_i(x) = 0 \quad \text{ist, falls} \quad \|Tx - y_i\| \geq \frac{1}{n}$$

$$\text{und} \quad a_i(x) \neq 0 \quad \text{ist, falls} \quad \|Tx - y_i\| < \frac{1}{n}, \quad (1.38)$$

ist  $P_n(x)$  wohldefiniert und eine stetige Abbildung von  $M$  in  $M_n$ , wobei  $M_n = \text{co}(y_1, \dots, y_N) \subseteq \text{span}(y_1, \dots, y_N)$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \|P_n(x) - T(x)\| &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x)(y_i - T(x))}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} \right\| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x) \|y_i - T(x)\|}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} \stackrel{(1.38)}{<} \frac{1}{n} \quad \forall x \in M. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Weiterhin sind die Operatoren  $P_n$  kompakt. Da nämlich  $T(M)$  beschränkt ist, ist nach (1.39) auch das Bild  $P_n(M)$  beschränkt und als Teilmenge des endlichdimensionalen Raumes  $\text{span}(y_1, \dots, y_N)$  relativ kompakt.

b) Die Voraussetzung (1.37) gelte.

Es gilt für die Elemente  $x, y \in M$ :

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \|T(x) - P_n(x) + P_n(x) - P_n(y) + P_n(y) - T(y)\| \\ &< \frac{2}{n} + \|P_n(x) - P_n(y)\| < \frac{3}{n} \quad \text{für } \|x - y\| < \delta(n), \end{aligned}$$

und damit ist  $T$  eine stetige Abbildung.

$T(M)$  ist außerdem relativ kompakt. Sei nämlich  $\{z_1, \dots, z_N\}$  ein endliches  $\frac{1}{n}$ -Netz für  $P_n(M)$ . Dann gilt für ein  $y = T(x) \in T(M)$

$$\begin{aligned} \|y - z_i\| = \|T(x) - z_i\| &= \|T(x) - P_n(x) + P_n(x) - z_i\| \\ &< \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

falls  $z_i$  so gewählt wird, dass  $\|P_n(x) - z_i\| < \frac{1}{n}$  ist. Daher ist  $\{z_1, \dots, z_N\}$  ein endliches  $\frac{2}{n}$ -Netz für  $T(M)$  und  $T(M)$  ist relativ kompakt. ■

Wir beweisen jetzt den Schauderschen Fixpunktsatz.

**Satz 15** Sei  $T : M \subseteq X \rightarrow M$  stetig, wobei  $X$  ein Banachraum und  $M$  eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge ist. Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

**Beweis:**

Der Operator  $T = T|_M$  ist kompakt, da  $\overline{T(M)} \subset M$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ebenfalls kompakt ist. Aus dem Beweis des Approximationssatzes folgt, dass kompakte Operatoren  $P_n : M \rightarrow M_n = \text{co}(y_1, \dots, y_N) \subseteq M$  existieren mit

$$\|P_n x - T(x)\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in M. \quad (1.40)$$

Wir setzen

$$\tilde{P}_n = P_n|_{M_n} : M_n \rightarrow M_n.$$

Die Menge  $M_n$  ist abgeschlossen und homöomorph zur abgeschlossenen Kugel  $\overline{B_1(0)}$  im  $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$ ,  $\tilde{N} \leq N$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein Fixpunkt  $x_n \in M_n$  von  $\tilde{P}_n$ . Wir betrachten die Folge der Fixpunkte  $(x_n)_n, x_n \in M_n \subseteq M$ . Diese ist nach (1.40) beschränkt. Da  $M$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_i})_{n_i}, x_{n_i} \rightarrow x \in M$  für

$n_l \rightarrow \infty$ . Wir zeigen, dass dieser Grenzwert  $x$  der gesuchte Fixpunkt ist. Es ist

$$\|T(x) - x_{n_l}\| = \|T(x) - P_{n_l}x_{n_l}\| \leq \|T(x) - T(x_{n_l})\| + \|T(x_{n_l}) - P_{n_l}x_{n_l}\|.$$

Die rechte Seite konvergiert für  $n_l \rightarrow \infty$  zu Null, da  $T$  stetig ist und (1.40) gilt. Die Abschätzung

$$\|T(x) - x\| \leq \|T(x) - x_{n_l}\| + \|x - x_{n_l}\|$$

zeigt, dass  $T(x) = x$  ist. ■

Wir beweisen eine äquivalente Fassung des Schauderschen Fixpunktsatzes, die häufig benutzt wird. Sie lautet

**Satz 16** Sei  $T : M \subset X \rightarrow M$  ein kompakter Operator,  $X$  ein Banachraum und  $M$  eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von  $X$ . Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

Im Beweis wird folgendes Lemma von Mazur benutzt:

**Lemma 3** Sei  $X$  ein Banachraum und  $M \subseteq X$  relativ kompakt. Dann ist auch  $\text{co } M$  relativ kompakt.

### Beweis des Lemmas von Mazur:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Zu  $M$  existiert ein endliches  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz, d.h. es existieren Elemente  $z_1, \dots, z_n \in M$ , so dass für alle  $x$  ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  existiert mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.41)$$

Dadurch können wir eine Abbildung  $v : M \rightarrow \{1, \dots, n\}$  definieren:

$v(x) = j$ ,  $j$  ist der kleinste Index, so dass (1.41) gilt.

Wir wollen für  $\text{co}(M)$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz konstruieren.

Sei

$$y \in \text{co}(M), \quad y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i, \quad m = m(y) \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1].$$

Wir erhalten

$$\|y - \sum_{i=1}^m \lambda_i z_{v(y_i)}\| = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i (y_i - z_{v(y_i)}) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da  $\sum_{i=1}^m \lambda_i z_{v(y_i)} \in K = \text{co}(z_1, \dots, z_n)$  ist, gilt

$$\text{co}(M) \subset \cup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x). \quad (1.42)$$

Wir überlegen nun, dass es endlich viele Elemente  $K_1, \dots, K_N \in K$  gibt, so dass

$$K \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(K_i). \quad (1.43)$$

Dazu müssen wir zeigen, dass  $K := \text{co}(z_1, \dots, z_n)$  relativ kompakt ist. Da  $\text{co}(z_1, \dots, z_n)$  als Teilmenge eines endlich dimensionalen Raumes beschränkt ist, ist das offensichtlich.

Da  $K$  ein  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für  $\text{co}(M)$  und  $\{K_1, \dots, K_N\}$  ein  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für  $K$  ist, folgt  $\{K_1, \dots, K_N\}$  ist endliches  $\varepsilon$ -Netz für  $\text{co}(M)$ . ■

Wir sind jetzt in der Lage, die 2.Fassung des Satzes von Schauder zu beweisen.

**Beweis von Satz 16:**

Sei  $N = \overline{\text{co}(T(M))} \subseteq M$ . Nach dem Lemma von Mazur ist  $N$  kompakt, konvex und nicht leer.  $T$  ist stetig und bildet  $N$  in sich ab:

$$N \subseteq M \Rightarrow T(N) \subseteq T(M) \Rightarrow T(N) \subseteq \overline{\text{co}(T(N))} \subset \overline{\text{co}(T(M))} = N.$$

Nach der ersten Fassung des Schauderschen Fixpunktsatzes existiert genau ein Fixpunkt von  $T$ . ■

**Anwendungen:****1° Ein semilineares Problem**

Wir hatten bereits das semilineare Dirichletproblem

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.44)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (1.45)$$

mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes untersucht. Dabei waren an  $f$  Beschränktheitsvoraussetzungen gestellt worden. Wir wollen jetzt den Schauderschen Fixpunktsatz (Satz 16) anwenden, um unter gewissen Voraussetzungen an  $f$  die Existenz einer Lösung zu garantieren.

**Lemma 4** Sei  $V = H^1(\Omega)$  und  $f : L_2(\Omega) \rightarrow V'$  eine beschränkte Abbildung, d.h.  $\|f(u)\|_{V'} \leq k_f$  für alle  $u \in L_2(\Omega)$ . Dann besitzt das Problem (1.44), (1.45) eine schwache Lösung in  $V$ .

**Beweis:**

Eine Funktion  $u \in V$  ist schwache Lösung von (1.44), (1.45) falls

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f(u), v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Wir vorn in Formel (1.7) betrachten wir ein  $u_0 \in L_2(\Omega)$  und die entsprechenden schwachen Probleme

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f(u_0), v \rangle \quad \forall v \in V, u_0 \in V.$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in V$  zu jedem  $u_0 \in L_2(\Omega)$ , beschrieben durch den Operator  $B$

$$B : u_0 \rightarrow u,$$

und

$$\|Bu_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0)\|_{V'} \leq \frac{k_f}{\alpha} = R,$$

d.h.  $B$  bildet jede Teilmenge von  $L_2(\Omega)$  in eine beschränkte konvexe Menge  $M_R = \{u \in V, \|u\| \leq R\}$  ab. Sei  $T = i \circ B$ , wobei  $i$  der Einbettungsoperator von  $V$  in  $L_2(\Omega)$  ist. Da

$$\|Tu_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \|Bu_0\|_V \leq R$$

bildet  $T = i \circ B : \overline{i(M_R)} \subset L_2(\Omega) \rightarrow \overline{i(M_R)} \subset \overline{i(M_R)} \subset L_2(\Omega)$  ab. Da die Einbettung  $i$  ein kompakter stetiger Operator ist und  $\overline{i(M_R)}$  beschränkt, abgeschlossen und konvex ist, muss  $T$  einen Fixpunkt  $u \in L_2(\Omega)$  besitzen. Da aber  $Tu = i \circ Bu = u$  ist, muss  $u \in V$  sein. ■



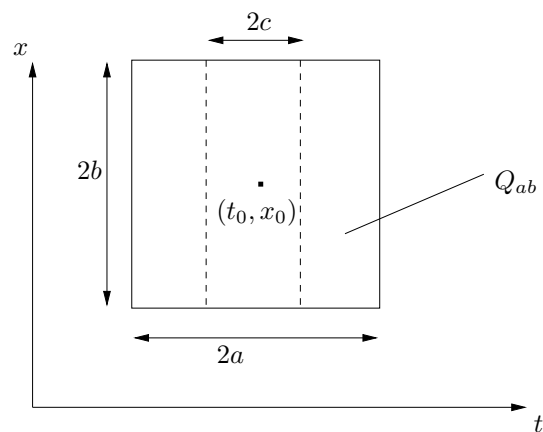
2° **Der Satz von Peano**

Als weitere Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes beweisen wir den Satz von Peano:

**Satz 17 (Satz von Peano)** Das Anfangswertproblem  $x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$  besitzt eine stetig differenzierbare Lösung im Intervall  $[t_0 - c, t_0 + c]$ , falls die Funktion

$$f : Q_{ab} \rightarrow \mathbb{R}$$

im Rechteck  $Q_{ab} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  stetig ist. Dabei ist  $c = \min\{a, \frac{b}{k}\}$  und  $|f(t, x)| \leq k, \forall (t, x) \in Q_{ab}$ .

Abbildung 1.4: Rechteck  $Q_{ab}$ **Beweis:**

Wir schreiben das Anfangswertproblem in Form einer äquivalenten Integralgleichung auf:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = Tx.$$

Es sei  $X = C([t_0 - c, t_0 + c])$  der Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall  $(t_0 - c, t_0 + c)$  mit der Maximum-Norm und

$$M = \{x \in X : \|x - x_0\|_{C([t_0 - c, t_0 + c])} \leq b\}.$$

Wir zeigen, dass  $T : M \subseteq X \rightarrow M$  eine Selbstabbildung ist:

$$\begin{aligned} \|Tx - x_0\| &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq c \cdot k \leq \frac{b}{k} \cdot k = b. \end{aligned}$$

$M$  ist beschränkt, abgeschlossen und konvex und  $T$  ist kompakt. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz existiert daher ein Element  $x \in M$  mit  $Tx = x$ , das stetig differenzierbar ist. ■

Weitere Anwendungen des Schauderschen Fixpunktsatzes treten bei der Untersuchung von Anfangswertproblemen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + \vec{f}(t, \vec{x}(t)), \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0\end{aligned}$$

auf. Insbesondere werden Stabilitätsuntersuchungen und die Existenz periodischer Lösungen behandelt [9].

### 1.3 Schäferscher Fixpunktsatz

Aus Schauders Fixpunktsatz folgt ein weiterer Fixpunktsatz, auch Schäferscher Fixpunktsatz genannt. Der Vorteil ist, dass keine vorgegebene abgeschlossene konvexe Teilmenge  $M$  betrachtet wird. Man geht von a-priori Abschätzungen für Eigenlösungen aus und zeigt dann, dass tatsächlich Fixpunkte existieren.

**Satz 18 (Schäferscher Fixpunktsatz)**  $T$  sei ein kompakter Operator, der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet. Die Mengen

$$M(\lambda) = \{u \in X : u = \lambda Tu \text{ für } \lambda \in (0, 1)\} \quad (1.46)$$

seien gleichmäßig beschränkt. Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

#### Beweis:

Sei  $\|u\| < R$  für Elemente  $u \in M(\lambda)$ , d.h.  $u = \lambda Tu$  mit einem  $\lambda \in (0, 1)$ .

#### 1.Schritt:

Wir setzen

$$\tilde{T}u := \begin{cases} Tu & \text{falls } \|Tu\| \leq R \\ \frac{RTu}{\|Tu\|} & \text{falls } \|Tu\| > R, \end{cases} \quad (1.47)$$

$\tilde{T} : \overline{B_R(0)} \subset X \rightarrow \overline{B_R(0)} \subset X$ . Sei  $K = \overline{\text{co}(\tilde{T}(B_R(0)))}$ . Aus der Kompaktheit von  $T$  folgt die Kompaktheit von  $\tilde{T} : K \rightarrow K$  (Übung).

#### 2.Schritt:

Aus dem Schauderschen Fixpunktsatz folgt, dass  $\tilde{T}$  einen Fixpunkt besitzt, d.h.  $\tilde{T}u = u$ . Wir zeigen, dass  $u$  auch Fixpunkt von  $T$  ist. Dazu nehmen wir an,  $u$  sei kein Fixpunkt von  $T$ . Daher muss  $\|Tu\| > R$  nach (1.47) sein und

$$\tilde{T}u = \frac{RTu}{\|Tu\|} = \lambda Tu = u,$$

mit  $\lambda = \frac{R}{\|Tu\|} < 1$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\|u\| < R$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $\|\tilde{T}u\| = \|u\| = R$  ist. ■

### Ein semilineares elliptisches Randwertproblem

Wir betrachten das folgende Randwertproblem im glatten beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  für eine skalare Funktion  $u$  [3, S.505]

$$-\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1.48)$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad (1.49)$$

wobei  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion ist.  $b$  genügt dann folgender Wachstumsbedingung: (setze  $\vec{p} = Du$ )

$$|b(\vec{p})| \leq C(|\vec{p}| + 1) \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.50)$$

**Satz 19** Sei  $\mu > 0$  genügend groß und  $b$  sei Lipschitz-stetig. Dann existiert eine Funktion  $u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ , die schwache Lösung von (1.48), (1.49) ist.

#### Beweis:

##### 1.Schritt:

Sei  $u_0 \in \mathring{H}^1(\Omega)$  beliebig. Wir setzen  $f_0 = b(Du_0)$ . Aus (1.50) folgt, dass  $f_0 \in L_2(\Omega)$  ist. Sei  $u = u(u_0)$  aus  $\mathring{H}^1(\Omega) = V$  die eindeutig bestimmte schwache Lösung von (1.48), (1.49) zu  $f_0$ , d.h.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \mu uv \, dx = - \int_{\Omega} f_0 v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (1.51)$$

Da  $\Omega$  glatt ist, kann man zusätzlich zeigen, dass  $u \in H^2(\Omega)$  ist und der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f_0\|_{L_2(\Omega)} \quad (1.52)$$

genügt (siehe [3, § 6.3]). Sei  $B : V \rightarrow H^2(\Omega) \cap V$  die Abbildung, die  $u_0 \in V$  die Lösung  $u \in V \cap H^2(\Omega)$  zuordnet. Aus (1.52) und (1.50) folgt

$$\begin{aligned} \|Bu_0\|_{H^2(\Omega)} &\leq c \|b(Du_0)\|_{L_2(\Omega)} \stackrel{(1.50)}{\leq} \tilde{c} \left[ \int_{\Omega} (|Du_0|^2 + 1) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \hat{c} (\|u_0\|_V + 1) \quad \forall u_0 \in V. \end{aligned} \quad (1.53)$$

##### 2.Schritt:

Wir zeigen  $B : V \rightarrow V$  ist stetig und kompakt.

Zunächst sehen wir uns die Stetigkeit an. Sei  $(u_{0_k})_k$  eine konvergente Folge in  $V$ ,  $u_{0_k} \rightarrow u_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Folge  $(Bu_{0_k})_k$  ist nach (1.53) in  $H^2(\Omega)$  beschränkt, d.h.

$$\sup_k \|Bu_{0_k}\|_{H^2(\Omega)} < \infty.$$

Da  $H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$  kompakt in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  eingebettet ist (siehe [1, S.144]), besitzt  $(Bu_{0_k})_k$  eine in  $V$  konvergente Teilfolge

$$Bu_{0_{k_l}} \rightarrow w. \quad (1.54)$$

Wir überlegen, dass  $w = Bu_0$  ist. Es ist

$$\int_{\Omega} (DB_{0_{k_l}} \cdot Dv + \mu B_{0_{k_l}} v) \, dx = - \int_{\Omega} b(Du_{0_{k_l}}) v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (1.55)$$

Wegen (1.54) konvergiert die linke Seite von (1.55)

$$\int_{\Omega} (DBu_{0_{k_l}} \cdot Dv + \mu Bu_{0_{k_l}} v) dx \rightarrow \int_{\Omega} (Dw \cdot Dv + \mu wv) dx. \quad (1.56)$$

Da  $u_{0_k} \rightarrow u_0$  in  $V$  konvergiert und damit auch  $u_{0_{k_l}} \rightarrow u_0$  in  $V$ , konvergiert die rechte Seite von (1.55) wegen (1.50):

$$-\int_{\Omega} b(Du_{0_{k_l}})v dx \rightarrow -\int_{\Omega} b(Du_0)v dx. \quad (1.57)$$

Da (1.56) mit (1.57) für alle  $v \in V$  übereinsimmt, muss  $w = Bu_0$  sein. Nun können wir schließen, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} Bu_{0_k} = Bu_0$  ist:

$$\|Bu_{0_k} - Bu_0\| \leq \|Bu_{0_k} - Bu_{0_{k_l}}\| + \|Bu_{0_{k_l}} - Bu_0\|. \quad (1.58)$$

Da

$$\int_{\Omega} (DBu_{0_k} - DBu_{0_{k_l}}) \cdot Dv + \mu(Bu_{0_k} - Bu_{0_{k_l}})v dx = -\int_{\Omega} [b(Du_{0_k}) - b(Du_{0_{k_l}})]v dx$$

ist, gilt die Abschätzung

$$\|Bu_{0_k} - Bu_{0_{k_l}}\|_V \leq \text{const} \|b(Du_{0_k}) - b(Du_{0_{k_l}})\|_{L_2(\Omega)} \leq L \text{const} \|Du_{0_k} - Du_{0_{k_l}}\|_{L_2(\Omega)},$$

wobei  $L$  die Lipschitzkonstante für  $b$  ist. Daher konvergiert die rechte Seite von (1.58) zu Null.

Wir überlegen nun, warum  $B$  kompakt ist.

Dazu betrachten wir eine beschränkte Teilfolge  $(u_{0_k})_k$  in  $V$ . Aus (1.53) folgt, dass  $(Bu_{0_k})_k$  in  $H^2(\Omega)$  beschränkt ist. Daher besitzt  $(Bu_{0_k})_k$  eine konvergente Teilfolge in  $V$ .

### 3.Schritt:

Wir müssen jetzt die Beschränktheit der Mengen (1.46) zeigen.

Es ist  $u \in M(\lambda) = \{u \in V : u = \lambda Bu, 0 < \lambda < 1\}$ , falls  $\frac{u}{\lambda} = Bu$  ist. Setzen wir  $u = v$  in (1.51) ein, dann ist

$$\int_{\Omega} (DBu \cdot Du + \mu(Bu)u) dx = -\int_{\Omega} b(Du)u dx$$

und mit  $Bu = \frac{u}{\lambda}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du|^2 + \mu|u|^2 dx &= -\lambda \int_{\Omega} b(Du)u dx \\ &\leq \int_{\Omega} c(|Du| + 1)|u| dx. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Nach Anwendung der Ungleichung  $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon} a^2 + \varepsilon b^2$  für ein  $\varepsilon > 0$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} |Du||u| &\leq \frac{1}{4\varepsilon} |u|^2 + \varepsilon |Du|^2, \\ 1|u| &\leq \frac{1}{2} (|u|^2 + 1) \quad \text{für } \varepsilon = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Eine mögliche Abschätzung von (1.59) lautet:

$$\int_{\Omega} (|Du|^2 + \mu u^2) dx \leq c \int_{\Omega} (\varepsilon |Du|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |u|^2 + \frac{1}{2}) dx.$$

Für  $\varepsilon c < 1$  folgt

$$\int_{\Omega} (1 - c\varepsilon) |Du|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left( \frac{c}{4\varepsilon} + \frac{c}{2} - \mu \right) |u|^2 + c \int_{\Omega} \frac{1}{2} dx. \quad (1.60)$$

Für  $\mu \geq \frac{c}{4\varepsilon} + \frac{c}{2}$  ist der erste Term der rechten Seite von (1.60) nicht positiv und wir erhalten

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx \leq \frac{c}{1 - c\varepsilon} \frac{1}{2} \text{meas } \Omega.$$

Wegen der Normäquivalenz in  $V$  gilt

$$\|u\|_V \leq K$$

und die gleichmäßige Beschränktheit der Mengen  $M(\lambda)$  ist gezeigt. ■

Als weiteres Anwendungsbeispiel sei ein klassischer Satz zur Existenz von Lösungen von Randwertproblemen für nichtlineare partielle Differentialgleichungen genannt.

**Satz 20 (Bernstein 1906/10, Leray-Schauder 1934)** Gegeben sei die quasilineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösungen einer Dirichlet-Randbedingung genügen:

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + 2A_{12}(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + A_{22}(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es gelte:

1.  $\Omega$  sei ein beschränktes, konvexes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  sei durch eine Randkurve aus  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , darstellbar, die in jedem Randpunkt eine positive Krümmung besitzt.
2. Es sei  $M = \Omega \times \mathbb{R}^3$  und  $A_{ij} \in C^\alpha(\overline{M})$ ,  $i, j = 1, 2$  und  $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ .
3. Es existiert ein  $c > 0$ , so dass

$$A_{11}(P)\xi^2 + 2A_{12}(P)\xi\eta + A_{22}(P)\eta^2 \geq c(\xi^2 + \eta^2) \forall P \in M; (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

ist. (gleichmäßige Elliptizität)

Dann besitzt das obige Randwertproblem eine Lösung  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

### Beweisskizze:

Das Randwertproblem wird in ein Fixpunktproblem überführt. Dazu werden die folgenden Schritte ausgeführt.

1. Durch Wahl eines festen Elementes  $u = z$  in den Koeffizienten  $A_{ij}$  erfolgt eine Linearisierung und das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y, z, z_x, z_y) u_{xx} + 2A_{12}(x, y, z, z_x, z_y) u_{xy} + A_{22}(x, y, z, z_x, z_y) u_{yy} &= 0 \text{ in } \Omega \quad (1.61) \\ u &= \lambda g \text{ auf } \partial\Omega. \quad (1.62) \end{aligned}$$

wird betrachtet. Hierbei ist  $z \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ ,  $0 < \beta < 1$  und  $\lambda \in [0, 1]$  eine feste reelle Zahl. Für  $\gamma = \alpha \cdot \beta$  erhält man durch eine einfache Abschätzung, dass  $A_{ij}(x, y, z, z_x, z_y) = A_{ij}(x, y) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist. Außerdem ist offensichtlich  $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ .

2. Das lineare Problem (1.61) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung  $u(\lambda)$  in  $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ , d.h. zu jedem  $z \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  wird eine Lösung  $u(\lambda, \cdot) \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  zugeordnet. Das sei durch den Operator  $T(\lambda) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$

$$T(\lambda)z = u(\lambda)$$

realisiert. Es gilt, dass  $T(\lambda) = \lambda T(1)$  ist. Unser Ausgangsproblem ist lösbar, falls  $T(1) = T$  einen Fixpunkt besitzt.

3.  $T$  bildet zunächst  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ab.  $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist kompakt in  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  eingebettet. Diese Eigenschaft führt zu der Aussage, dass  $T$  als Abbildung von  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  in  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  kompakt ist.
4. Für Lösungen der Gleichungen

$$u = \lambda Tu, 0 < \lambda < 1,$$

gilt die a-priori Abschätzung (siehe [4])

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq c.$$

Nach dem Schäferschen Fixpunktsatz besitzt  $T$  einen Fixpunkt  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ , der Lösung des Randwertproblems  $\mathcal{A}u = (f, g)$  ist.

5. Es muss noch gezeigt werden, dass die Lösung  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  sich in  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  befindet. Im 2.Schritt haben wir gesehen, dass  $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist. Daher sind die Koeffizienten  $A_{ij}$  für dieses  $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ . Nach einem weiteren Satz von Schauder ist  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . ■

## Kapitel 2

# Satz über implizite Funktionen in Banachräumen

In der Analysisvorlesung im Grundstudium wird der Satz über implizite Funktionen durch Anwendung der Taylor-Formel und des Banachschen Fixpunktsatzes bewiesen. Er beschreibt, wann die lokale Existenz einer implizit gegebenen Funktion gesichert werden kann. Diese Aussage wird auf Abbildungen in Banachräumen übertragen und auf nichtlineare Randwertprobleme angewandt, um die lokale Existenz von Lösungen zu sichern.

Wir beginnen mit einer Wiederholung des klassischen Satzes über implizite Funktionen.

Sei

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = F(x, y) = 0$$

eine Gleichung für die implizit gegebene skalare Funktion  $y = y(x_1, \dots, x_n) = y(x)$ . Wann eine solche Auflösung  $y = y(x)$  lokal existiert beschreibt der folgende Satz:

**Satz 21** [8, S.269] Seien  $F = F(x, y)$  und  $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y(x, y)$  stetige Funktionen im Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Sei  $(x_0, y_0)$  ein Punkt aus  $G$  mit

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gibt es eine Kugel  $B_\delta(x_0)$  um  $x_0$ , in der die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

eindeutig nach  $y = g(x)$  aufgelöst werden kann. Dabei ist  $g \in C(B_\delta(x_0))$ . Die Funktion kann in  $B_\delta(x_0)$  durch ein vereinfachtes Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= g_k(x) - (F_y(x_0, y_0))^{-1} F(x, g_k(x)) \\ g_0(x) &:= y_0 \end{aligned}$$

berechnet werden.

## 2.1 Fréchet-Ableitungen in Banachräumen

Im Beweis [8] wird der Banachsche Fixpunktsatz verwandt. Da der Banachsche Fixpunktsatz in metrischen Räumen gilt, kann der Satz über implizite Funktionen auf allgemeinere Abbildungen  $F$  übertragen werden.

Dazu müssen wir den Begriff der Fréchet-Ableitung einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ ,  $X$  und  $Y$  sind Banachräume bzw. normierte Räume, wiederholen.

**Definition 5** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y, f \text{ ist linear und stetig}\}$$

den linearen Raum aller linearen und stetigen Abbildungen von  $X$  in  $Y$ , versehen mit der Operatornorm

$$\|f\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|fx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|fx\|_Y = \sup_{\|x\|=1} \|fx\|_Y.$$

Sei  $\Omega$  eine offene Teilmenge eines normierten Raumes  $X$ .

**Definition 6** Eine Abbildung  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  ist Fréchet-differenzierbar im Punkt  $a \in \Omega$ , falls ein Element  $f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$  existiert, so dass

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \quad (2.1)$$

für alle Elemente  $h \in X$  ist, wobei  $a + h \in \Omega$  ist.

Hierbei bedeutet

$$o(h) = \|h\|\varepsilon(h) \text{ mit } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \text{ in } Y,$$

bzw.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\|o(h)\|_Y}{\|h\|_X} = \lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_Y = 0,$$

d.h.  $o(h)$  strebt schneller der Norm nach zu 0 in  $Y$  als  $h$  zu 0 in  $X$ .

Die Relation (2.1) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - f'(a)h\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Das Element  $f'(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$  ist eindeutig bestimmt und wird als Fréchet-Ableitung von  $f$  im Punkt  $a$  bezeichnet.

Die Abbildung  $f$  ist differenzierbar in  $\Omega$ , falls  $f$  in allen Punkten  $a \in \Omega$  differenzierbar ist.

### Beispiel:

Wir betrachten den nichtlinearen Differentialoperator  $A : [W^{2,p}(\Omega)]^n \rightarrow [L^p(\Omega)]^n, p > n, n = 2, 3$ ,

$$A\vec{u} = -\operatorname{div}((I + D\vec{u})\Sigma) = \vec{f}. \quad (2.2)$$



Der Operator  $A$  beschreibt eine Gleichgewichtsbeziehung für elastische St.-Venant Materialien. Hierbei sind  $\Sigma$  und  $E$  folgende Spannungs- bzw. Verzerrungstensoren:

$$\Sigma = \lambda \operatorname{tr} E(\vec{u}) I + 2\mu E(\vec{u}), \quad (2.3)$$

$$E(\vec{u}) = \frac{1}{2}(D\vec{u} + D\vec{u}^\top + D\vec{u}^\top D\vec{u}). \quad (2.4)$$

Wir berechnen die Fréchet-Ableitung von  $A$  an der Stelle  $\vec{u}_0 = \vec{0}$ .

**Lemma 5** Die Fréchet-Ableitung  $A'(\vec{0})$  existiert und stimmt mit dem linearisierten Elastizitätsoperator (Lamé-Operator) überein.

### Beweis:

Wir berechnen zunächst die Spur der Matrix  $E(\vec{u})$ . Da für  $n = 3$

$$E_{ii} = \partial_i u_i + \frac{1}{2}[(\partial_i u_1)^2 + (\partial_i u_2)^2 + (\partial_i u_3)^2]$$

ist, folgt

$$\operatorname{tr} E = \sum_{i=1}^n E_{ii} = \operatorname{div} \vec{u} + \frac{1}{2}(D\vec{u} : D\vec{u}).$$

Falls  $A$  differenzierbar wäre, würde

$$\begin{aligned} A(\vec{u} + \vec{h}) &= -\operatorname{div} \left[ (I + D(\vec{u} + \vec{h}))(\lambda \operatorname{div}(\vec{u} + \vec{h})I + \frac{1}{2}\lambda D(\vec{u} + \vec{h}) : D(\vec{u} + \vec{h})I) \right. \\ &\quad \left. + \mu(D(\vec{u} + \vec{h}) + D^\top(\vec{u} + \vec{h}) + D^\top(\vec{u} + \vec{h})D(\vec{u} + \vec{h})) \right] \\ &= A\vec{u} + A'(\vec{u})\vec{h} + \dots \end{aligned}$$

sein.

An der Stelle  $\vec{u} = 0$  verschwindet  $A$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} A(\vec{h}) &= -\operatorname{div} \left[ (I + D\vec{h})(\lambda \operatorname{div} \vec{h}I + \frac{\lambda}{2}(D\vec{h} : D\vec{h})I) \right. \\ &\quad \left. + \mu((D\vec{h}) + D^\top \vec{h} + D^\top \vec{h}D\vec{h}) \right] \\ &= -\operatorname{div} \left[ \lambda \operatorname{div} \vec{h}I + \mu(D\vec{h} + D^\top \vec{h}) \right] + o(\vec{h}) \\ &= A'(\vec{0})\vec{h} + o(\vec{h}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} o(\vec{h}) &= -\operatorname{div} [D\vec{h}(\lambda \operatorname{div} \vec{h})I + \frac{\lambda}{2}(D\vec{h} : D\vec{h})I + D\vec{h}(D\vec{h} + D^\top \vec{h}) \\ &\quad + D^\top \vec{h}D\vec{h} + D\vec{h}\frac{\lambda}{2}(D\vec{h} : D\vec{h}) + D\vec{h}D^\top \vec{h}D\vec{h}] \end{aligned}$$

ist. Da  $p > n$ , sind alle Ausdrücke in  $o(\vec{h})$  wohl definiert und

$$\frac{\|o(\vec{h})\|_{L^p(\Omega)}}{\|\vec{h}\|_{W^{2,p}(\Omega)}} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|\vec{h}\|_{W^{2,p}(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Die Abschätzung (2.5) folgt aus folgendem Satz (siehe [7, S.26])

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das einer Kegelbedingung genügt:  $m, h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $p, q, r \geq 1$  seien reelle Zahlen, so dass

$$\frac{m+h+k}{n} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$

Weiterhin sei  $\frac{np}{n-hp} \geq r$ , falls  $hp < n$  und  $\frac{nq}{n-kq} \geq r$ , falls  $kq < n$ . Dann gilt für  $u \in W^{m+h,p}(\Omega)$  und  $v \in W^{m+k,q}(\Omega)$ , dass  $uv \in W^{m,r}(\Omega)$  ist, und es gibt eine von  $u$  und  $v$  unabhängige Konstante  $C$ , so dass

$$\|uv\|_{m,r} \leq C \|u\|_{m+h,p} \|v\|_{m+k,q}. \quad (2.6)$$

■

Wir können definieren, wann eine Abbildung

$$f : \Omega \subset X \rightarrow Y$$

stetig differenzierbar ist.

Dazu wenden wir einfach die Definition der Stetigkeit einer Abbildung auf

$$f' : x \in \Omega \subset X \rightarrow f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$$

an. Das heißt, für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , so dass

$$\|f'(x+h) - f'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon$$

für

$$\|h\|_X < \delta$$

ist. In diesem Fall sagen wir

$$f \in C^1(\Omega, Y), \text{ kurz } f \in C^1(\Omega),$$

wobei  $C^1(\Omega, Y)$  der Raum der stetigen (Fréchet-) differenzierbaren Abbildungen von  $\Omega \subset X$  in  $\mathcal{L}(X, Y)$  ist.

Wir führen jetzt bilineare Abbildungen in Banachräumen ein.

**Definition 7** Seien  $X_1, X_2$  und  $Y$  Banachräume. Wir nennen eine Abbildung  $B : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$  eine stetige Bilinearform (Produkt), falls gilt

(i)  $B(\cdot, \cdot)$  ist linear in beiden Komponenten

(ii) Es existiert eine Konstante  $c > 0$ , so dass

$$\|B(x_1, x_2)\|_Y \leq c \|x_1\|_{X_1} \|x_2\|_{X_2}$$

für alle  $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ .

Weiterhin gilt eine Ketten- bzw. Produktregel wie in der klassischen Analysis:

**Satz 22** [5, S.46] Seien  $X, Y, W, Z$  Banachräume,  $U \subseteq X, V \subseteq Y$  offene Mengen.

(i) Sei  $f \in C^1(U, Y)$  und  $g \in C^1(V, Z)$  mit  $f(U) \subseteq V$ . Dann ist  $g \circ f \in C^1(U, Z)$  und es gilt

$$\underbrace{(g \circ f)'(x)}_{\in \mathcal{L}(X,Z)} = \underbrace{g'(f(x))}_{\in \mathcal{L}(Y,Z)} \circ \underbrace{f'(x)}_{\in \mathcal{L}(X,Y)}. \quad (2.7)$$

(ii) Die Funktionen  $f : U \rightarrow Y$  und  $g : U \rightarrow Z$  seien in  $U$  Fréchet-differenzierbar und  $B : Y \times Z \rightarrow W$  sei eine bilineare Abbildung. Dann ist die Abbildung  $K : U \rightarrow W$ ,  $k(x) = B(f(x), g(x))$  Fréchet-differenzierbar und es gilt für alle  $h \in X$ :

$$k'(x)h = B(f'(x)h, g(x)) + B(f(x), g'(x)h). \quad (2.8)$$

**Beweis:**

Wir zeigen (i). Der Beweis von (ii) sei als Übung empfohlen. Nach Voraussetzung ist  $g$  in  $y := f(x)$  Fréchet-differenzierbar, d.h.

$$g(y+l) = g(y) + g'(y)l + o_g(l) \quad \text{für } y+l \in Y. \quad (2.9)$$

Wir wählen

$$l = l(h) = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o_f(h).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g(f(x)+l) &= g(f(x+h)) \stackrel{(2.9)}{=} g(f(x)) + g'(f(x))(f'(x)h + o_f(h)) + o_g(f'(x)h + o_f(h)) \\ &= g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + r(h), \end{aligned}$$

wobei

$$r(h) = g'(f(x))o_f(h) + o_g(f'(x)h + o_f(h)) = o(h).$$

Es folgt, dass  $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$  ist.

**Höhere Ableitungen**

Seien  $X, Y$  normierte Räume und  $f : \Omega \subset X \rightarrow Y$  differenzierbar in  $\Omega$ , das heißt

$$f' : x \in \Omega \rightarrow f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y).$$

**Definition 8**  $f'$  ist differenzierbar im Punkt  $a \in \Omega$ , falls die Fréchet-Ableitung

$$f''(a) = (f')'(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$$

existiert. Das heißt

$$f'(a+h) = f'(a) + \underbrace{f''(a)h}_{\in \mathcal{L}(X, Y)} + o(h).$$

$f''(a)$  heißt zweite Ableitung von  $f$  im Punkt  $a$ .

**Bemerkung:**

Die zweite Ableitung kann mit einer stetigen bilinearen Abbildung von  $X$  in  $Y$  identifiziert werden:

$$(f''(a)h)k =: f''(a)(h, k) \quad \forall h, k \in X.$$

Dies ist eine symmetrische bilineare Abbildung

$$f''(a)(h, k) = f''(a)(k, h) \quad \forall h, k \in X.$$

Höhere ( $m$ -te) Ableitungen sind entsprechend definiert:

$$f^{(m)}(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}_{m-1}(X, Y)) = \mathcal{L}_m(X, Y),$$

wobei  $\mathcal{L}_0(X, Y) = Y$  ist. Insbesondere ist

$$f^{(m)}(a)h^m = f^m(a)(h, h, \dots, h).$$

### Taylor-Formel

Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume,  $\Omega \subset X$  eine offene Teilmenge.

Weiterhin sei  $[a, a+h] \subset \Omega$  ein abgeschlossenes Segment,  $f: \Omega \subset X \rightarrow Y$  eine Abbildung und  $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ . Falls  $f$   $(m-1)$ -mal differenzierbar in  $\Omega$  ist und  $m$ -mal differenzierbar im Punkt  $a$ , dann gilt:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a)h^m + \|h\|_X^m \varepsilon(h) \quad (2.10)$$

mit  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ .

Ist  $f$   $m$ -mal differenzierbar in  $[a, a+h]$ , dann existiert ein  $\tau \in (0, 1)$ , so dass

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}f^{(m-1)}(a)h^{m-1} + \frac{1}{m!}f^{(m)}(a+\tau h)h^m. \quad (2.11)$$

### Mittelwertformel

Als Folgerung aus (2.11) erhalten wir:

Sei  $f: \Omega \subset X \rightarrow Y$  stetig auf  $[a, b] \in M$  und Fréchet-differenzierbar in  $(a, b)$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|_Y &\leq \sup_{x \in (a,b)} \|f'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|b - a\|_X \\ &= \sup_{\tau \in [0,1]} \|f'(a + \tau(b-a))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|b - a\|_X. \end{aligned} \quad (2.12)$$

### Beweis:

Setze in (2.11)  $h = b - a, m = 1$ . ■

## 2.2 Satz von Hildebrandt und Graves über implizite Funktionen

Wir beweisen jetzt den Satz über implizite Funktionen in Banachräumen [5, S.49].

**Satz 23 (Satz über implizite Funktionen in Banachräumen)** Seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume,  $U(X_0, Y_0) \subseteq X \times Y$  eine offene Umgebung von  $(x_0, y_0)$ . Die Abbildung  $F: X \times Y \rightarrow Z$  sei in  $U(x_0, y_0)$  definiert und es sei

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Die Fréchet-Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial y}$  existiere in  $U(x_0, y_0)$  und es sei  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$  ein Homöomorphismus (d.h. stetige lineare bijektive Abbildung von  $Y$  in  $Z$ , deren Inverse stetig ist). Außerdem seien  $F$  und  $\frac{\partial F}{\partial y}$  in  $(x_0, y_0)$  stetig. Dann existieren  $r_0, r > 0$ , so dass für alle  $x \in X$  mit  $\|x - x_0\| \leq r_0$  genau ein  $y(x) \in Y$  existiert mit

$$\|y(x) - y_0\| \leq r \text{ und } F(x, y(x)) = 0.$$

**Beweis:**

Wir setzen  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  und führen die Abbildung  $g$  ein

$$g(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)y - F(x, y). \quad (2.13)$$

$g$  ist im Nullpunkt  $(0, 0)$  nach Voraussetzung stetig und  $g(x, \cdot)$  ist für kleines festes  $x$  in einer Umgebung von  $y_0 = 0$  stetig, da  $\frac{\partial F}{\partial y}$  als Fréchet-Ableitung in  $U(0, 0)$  existiert.

Nun ist  $F(x, y(x)) = 0$  genau dann, wenn gilt

$$y(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right)^{-1} g(x, y(x)).$$

Dies führt auf die Fixpunktgleichung

$$y = T_x y = \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right]^{-1} g(x, y(x)). \quad (2.14)$$

Wir wollen untersuchen, auf welcher Menge  $M \subset Y$  die Abbildung  $T_x$  eine  $k$ -Kontraktion ist. Wir sehen uns dazu die Eigenschaften von  $g$  an.

Die Ableitung  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$  ist für  $\|x\| \leq r_0$  und  $\|y\| \leq r$  wohl definiert, da  $\frac{\partial F}{\partial y}$  in  $U(0, 0)$  existiert und es ist

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

Es folgt, dass

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$$

ist. Wir wenden jetzt die Mittelwertformel (2.12) für  $b = (x, y), a = (x, z)$  mit  $\|x\| \leq r_0, \|y\| \leq r, \|z\| \leq r$  an:

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - g(x, z)\|_Z &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x, z + \tau(y - z)) \right\|_{\mathcal{L}(Y, Z)} \|y - z\|_Y \\ &= o(1) \|y - z\|_Y \quad \text{für } r \rightarrow 0, r_0 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Daraus folgt

$$\|g(x, y)\|_Z \leq \|g(x, y) - g(x, 0)\|_Z + \|g(x, 0)\|_Z = o(1) \|y\| + o(1) \quad \text{für } r \rightarrow 0, r_0 \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Wir führen die Menge  $M_r = \{y \in Y : \|y\| < r\}$  ein.  $T_x$  bildet  $\overline{M_r}$  in  $\overline{M_r}$  ab. Es ist

$$\begin{aligned} \|T_x y\|_Y &\leq \left\| \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Z, Y)} \|g(x, y)\|_Z \\ &\stackrel{(2.16)}{\leq} k[o(1) \|y\| + o(1)] \leq r, \end{aligned}$$

falls  $r$  und  $r_0$  genügend klein gewählt wurden.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|T_x(y) - T_x(z)\|_Y &\leq \left\| \left[ \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(Z, Y)} \|g(x, y) - g(x, z)\|_Z \\ &\stackrel{(2.15)}{\leq} k o(1) \|y - z\|_Y. \end{aligned}$$

Wählen wir  $r, r_0$  genügend klein, können wir garantieren, dass  $T_x$   $k$ -kontrahierend in  $M_r$  ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt

$$F(x, y(x)) = 0$$

für  $\|x\| \leq r_0$  eine eindeutige Lösung  $y \in M_r$ . ■

### Folgerung:

Die Voraussetzungen von Satz 23 seien erfüllt.

- (i) Falls  $F$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  stetig ist, dann ist  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$  stetig.
- (ii) Ist  $F$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  Fréchet-differenzierbar, dann ist auch  $y$  in einer Umgebung von  $x_0$  Fréchet-differenzierbar und es gilt

$$y'(x) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y).$$

### Beweis:

- (i) Wir nehmen wieder an, dass  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ist. Da  $F$  in einer Umgebung von  $(0, 0)$  stetig ist, ist auch  $g$  dort stetig und ebenso die Abbildung  $(x, y) \rightarrow T_x y = y$ .
- (ii) Wir betrachten Punkte  $(x, y(x))$  und  $(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$  aus einer Umgebung von  $x_0 = 0$ , wo  $F(x, y(x)) = F(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 0$  sind.

Die Fréchet-Differenzierbarkeit von  $F$  sichert, dass

$$\begin{aligned} F(x, y(x)) &= F(\tilde{x}, y(\tilde{x})) + \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(x - \tilde{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(y(x) - y(\tilde{x})) \\ &\quad + \varepsilon(x - \tilde{x}, y(x) - y(\tilde{x}))(\|x - \tilde{x}\| + \|y(x) - y(\tilde{x})\|) \end{aligned}$$

ist, woraus

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(x - \tilde{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(y(x) - y(\tilde{x})) + \varepsilon$$

folgt.

Auflösen nach  $y(x) - y(\tilde{x})$  ergibt

$$y(x) - y(\tilde{x}) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(x - \tilde{x}) + \tilde{\varepsilon}(\|x - \tilde{x}\| + \|y(x) - y(\tilde{x})\|).$$

Für festes  $\tilde{x}$  erhalten wir

$$\|y(x) - y(\tilde{x})\|_Y \leq \tilde{k}\|x - \tilde{x}\|_X + o(\|x - \tilde{x}\|_X)$$

und damit

$$y(x) = y(\tilde{x}) - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))(x - \tilde{x}) + o(\|x - \tilde{x}\|).$$

Hieraus folgt

$$y'(\tilde{x}) = - \left( \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$$

■

## 2.3 Satz über die Existenz inverser Abbildungen mit Anwendungen auf St.-Venant Materialien

Als Folgerung aus dem Satz über implizite Abbildungen erhält man den Satz über die Existenz inverser Abbildungen.

Hierzu wird  $F(x, y) = x - f(y)$  betrachtet und ein Punkt  $x_0 := f(y_0)$  als Anfangspunkt genommen. Die Auflösung von  $F(x, y(x)) = 0$  nach  $y$  ist gleichbedeutend mit der Existenz von  $y = y(x) = f^{-1}(x)$ .

### Satz 24 (Satz über die Existenz einer inversen Abbildung)

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $f : U(y_0) \subset Y \rightarrow X, x_0 = f(y_0)$ .

Es gelte

- $f$  ist in  $U(y_0)$  Fréchet-differenzierbar.
- $f'(y_0)$  sei ein Homöomorphismus von  $Y \rightarrow X$ .
- $f'$  sei stetig in  $y_0$ .

Dann existiert  $f^{-1}(x) = y(x) = y$  in einer Umgebung von  $x_0$ , so dass für ein  $r > 0$

$$\|y(x) - y_0\| \leq r$$

ist.

## Anwendung auf Randwertprobleme für St.-Venant Materialien

St.-Venant Materialien wurden bereits durch (2.2), (2.3) und (2.4) eingeführt.

**Satz 25** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ , ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei  $A$  der Differentialoperator (2.2), d.h.  $A\vec{u} = -\operatorname{div}(I + D\vec{u})\Sigma$ . Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} A\vec{u} &= \vec{f} \text{ in } \bar{\Omega}, \\ \vec{u} &= \vec{0} \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{u} \in U(\vec{0}) \subset V^p(\Omega)$ , wobei

$$V^p(\Omega) = \{\vec{v} \in [W^{2,p}(\Omega)]^n, \vec{v} = \vec{0} \text{ auf } \partial\Omega\},$$

falls  $\vec{f} \in [L^p(\Omega)]^n$  genügend klein ist und  $p > n$  ist.

### Beweis:

$A$  ist eine Abbildung von  $[W^{2,p}(\Omega)]^n$  in  $[L^p(\Omega)]^n$  für  $p > n$ . Weiterhin ist  $A$  differenzierbar als Summe von stetigen, bilinearen und trilinearen Abbildungen. Weiterhin gilt  $A\vec{0} = \vec{0}$ . Wir überprüfen die Voraussetzungen des Satzes über die Existenz inverser Abbildungen für  $A : U(\vec{0}) \subset V^p(\Omega) \rightarrow [L^p(\Omega)]^n$ .

Wir müssen nur überlegen, dass  $A'(0)$  ein Homöomorphismus von  $V^p(\Omega) \rightarrow [L^p(\Omega)]^n$  ist. Wie vorn gezeigt, ist  $A'(\vec{0})$  der Lamé-Operator, d.h. das homogene Dirichletproblem für die lineare Elastizität wird durch  $A'(0) : V^p(\Omega) \rightarrow [L^p(\Omega)]^n$  beschrieben. Dieses lineare Problem besitzt zunächst eine schwache Lösung in  $[H^1(\Omega)]^n$ . Da der Rand glatt ist und  $\vec{f} \in [L^p(\Omega)]^n$  ist, folgt aus der Regularitätstheorie, dass das lineare Problem eine eindeutige Lösung in  $V^p(\Omega)$  besitzt. Nach dem Satz über den abgeschlossenen Graphen ist der inverse Operator  $[A'(0)]^{-1}$  ebenfalls linear und stetig. Daher liegt ein Homöomorphismus vor. ■

**Bemerkung:**

Falls das Gebiet  $\Omega$  nicht glatt berandet ist, bzw. die Randbedingungen wechseln, ist  $A'(\vec{0})$  in  $V^p(\Omega) \rightarrow [L^p(\Omega)]^n$  kein Homöomorphismus. In diesem Fall gilt die Aussage von Satz 25 nicht mehr.

**Bemerkung:**

Elastische Materialien, die durch modifizierte konstitutive Gesetze beschrieben werden, können ebenfalls in ähnlicher Weise behandelt werden ([2, S.302 ff.], [7]).



# Kapitel 3

## Theorie monotoner Operatoren

Wir sehen uns zunächst eine elementare Aussage für reelle Funktionen einer reellen Variablen an.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- $f$  ist monoton wachsend
- $f$  ist stetig
- $f$  ist koerzitiv, d.h.  $F(u) \rightarrow \pm\infty$ , falls  $u \rightarrow \pm\infty$ .

Dann besitzt die Gleichung

$$f(u) = b$$

für alle  $b \in \mathbb{R}$  eine Lösung  $u \in \mathbb{R}$ .

Falls  $f$  strikt monoton ist, dann ist die Lösung eindeutig.

### 3.1 Monotonie und Stetigkeit

Dieses Resultat wird auf Abbildungen in Banachräumen verallgemeinert. Hierbei geht man davon aus, dass für monoton wachsende Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Definition 9** Es sei  $V$  ein Banachraum,  $V'$  sein Dualraum und  $A : V \rightarrow V'$ .

- $A$  ist monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V$ .
- $A$  ist strikt monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v$ .
- $A$  ist gleichmäßig monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|)\|u - v\| \quad \forall u, v \in V$ , wobei  $b(0) = 0, b(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$  ist.
- $A$  ist stark monoton  $\Leftrightarrow \exists c > 0$ , so dass  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V$ .
- $A$  ist koerzitiv  $\Leftrightarrow \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty$  für  $\|u\| \rightarrow \infty$ .

**Satz 26**

$$d) \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow a) \\ \Rightarrow e)$$

**Beweis:**

$d) \Rightarrow c)$ : Man setze  $b(t) = ct$ .

$c) \Rightarrow e)$ : Es ist

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle Au - A0 + A0, u - 0 \rangle \\ &= \langle Au - A0, u - 0 \rangle + \langle A0, u - 0 \rangle \\ &\geq b(\|u\|)\|u\| - \|A0\|\|u\| \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \geq b(\|u\|) - \|A0\| \rightarrow \infty \text{ für } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Die Aussagen  $b) \Rightarrow a)$ ,  $c) \Rightarrow b)$  sind trivial. ■

**Beispiel:**

Die Abbildung  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , (siehe Abbildung 3.1)

$$A(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0 \end{cases}$$

ist

- strikt monoton, falls  $p > 1$  ist,
- stark monoton, falls  $p = 2$  ist,
- gleichmäßig monoton, falls  $p \geq 2$  ist.

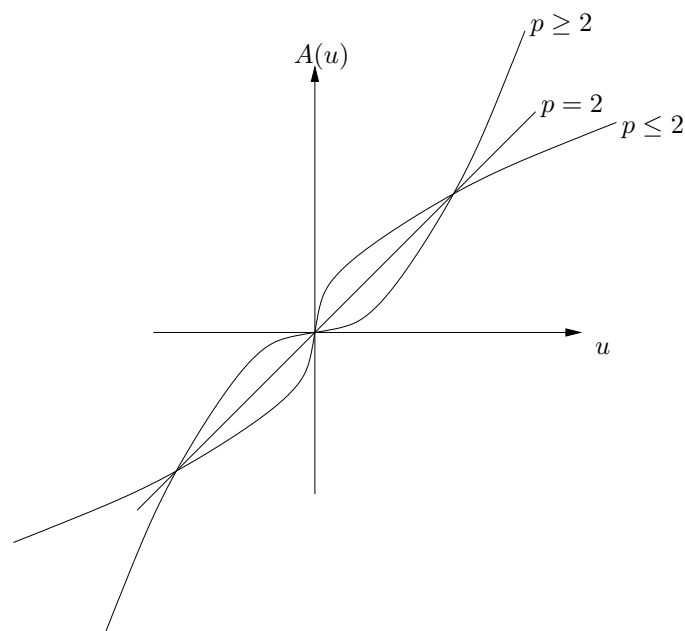


Abbildung 3.1: Die Funktion  $A(u)$

Es ist nämlich

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v).$$

Damit ist die Aussagen für  $p = 2$  offensichtlich.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

**1.Fall:**  $0 \leq v \leq u$

Dann ist für  $p \geq 2$

$$\begin{aligned} u^{p-1} - v^{p-1} &= \int_0^{u-v} (p-1)(t+v)^{p-2} dt = (t+v)^{p-1} \Big|_0^{u-v} \\ &\geq \int_0^{u-v} (p-1)t^{p-2} dt = (u-v)^{p-1} \end{aligned}$$

und

$$(u^{p-1} - v^{p-1}) \geq b(|u-v|)|u-v| \quad \text{für } b(t) = t^{p-1}.$$

Ist  $p > 1$ , dann gilt

$$(u^{p-1} - v^{p-1})(u-v) > 0 \quad \text{für } u \neq v.$$

**2.Fall:**  $v \leq 0 \leq u$

Für  $p \geq 2$  gilt  $u^{p-1} + |v|^{p-1} \geq c(u + |v|)^{p-1}$  und daher

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u-v) \geq c(u + |v|)^{p-1}(u-v) \\ &= c|u-v|^{p-1}|u-v|. \end{aligned}$$

Für  $p > 1$  erhalten wir

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u + |v|) > 0 \quad \text{für } u \neq v.$$

Als nächste Eigenschaft sehen wir uns die Stetigkeit an.

**Definition 10** Sei  $V$  ein reeller reflexiver Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ .

(i)  $A$  ist demistetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(ii)  $A$  ist hemistetig, falls für alle  $u, v, w \in V$  die Funktion

$$t \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle_V$$

im Intervall  $[0, 1]$  stetig ist.

(iii)  $A$  ist stetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(iv)  $A$  ist stark stetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \quad n \rightarrow \infty.$$

(v)  $A$  ist beschränkt, falls  $A$  beschränkte Mengen in  $V$  in beschränkte Mengen in  $V'$  abbildet.

(vi)  $A$  ist lokal beschränkt, falls jedes Element  $u \in V$  eine Umgebung besitzt, die in eine beschränkte Menge in  $V'$  abgebildet wird.

**Bemerkung:**

Es gilt:

$A$  ist stark stetig  $\Rightarrow A$  ist stetig  $\Rightarrow A$  ist demistetig  $\Rightarrow A$  ist hemistetig. (Übung)

Ist  $A$  ein linearer Operator, dann ist die Stetigkeit äquivalent zur Beschränktheit. Wir wollen nun untersuchen, wie Beschränktheit (bzw. Kompaktheit) und Stetigkeit im nichtlinearen Fall zusammenhängen.

**Lemma 6** Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ . Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Ist  $A$  stark stetig, dann ist  $A$  kompakt.
- (ii) Ist  $A$  demistetig, dann ist  $A$  lokal beschränkt.
- (iii) Ist  $A$  monoton, dann ist  $A$  lokal beschränkt.
- (iv) Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann ist  $A$  demistetig.

**Beweis:**

- (i): Sei  $M \subset V$  beschränkt,  $A(M)$  sei das Bild von  $M$ . Wir betrachten eine Folge  $(Au_n)_n$  aus  $A(M)$ . Die Folge der Urbilder  $(u_n)_n$  ist beschränkt. Da  $V$  reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{n_k})_k$ ,  $u_{n_k} \rightharpoonup u$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Voraussetzung gilt  $Au_{n_k} \rightarrow Au$ , d.h. eine beliebige Folge  $(Au_n)_n$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(Au_{n_k})$ .
- (ii): Wir nehmen an,  $A$  sei nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein  $u \in V$  und eine Folge  $u_n \in V$  mit  $u_n \xrightarrow{V} u$ , so dass

$$\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Nach Voraussetzung gilt  $Au_n \rightarrow Au$ , d.h. wegen der Reflexivität gilt

$$\langle Au_n, v \rangle \rightarrow \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Damit ist das System beschränkter linearer Operatoren  $B_n = Au_n \in V'$  punktweise beschränkt:

$$\sup_{n > n_0} |\langle B_n, v \rangle| < \infty.$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt

$$\sup_{n > n_0} \|B_n\|_{V'} = \|Au_n\|_{V'} < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.1).

- (iii) Auch in diesem Fall nehmen wir an, dass  $A$  nicht lokal beschränkt sei, d.h.  $u_n \xrightarrow{V} u$ , jedoch  $\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{(1 + \|Au_n\|_{V'})\|u - u_n\|_V}.$$

Aus der Monotonie von  $A$  folgt:

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n - Av, (u_n - u) + (u - v) \rangle$$

und damit

$$\langle Au_n, v - u \rangle \leq \langle Au_n, u_n - v \rangle = \langle Av, u_n - v \rangle.$$

Multiplikation mit  $a_n$  liefert

$$\begin{aligned} a_n \langle Au_n, v - u \rangle &\leq a_n \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V - a_n \langle Av, u_n - v \rangle \\ &\leq 1 + a_n \langle Av, v - u_n \rangle \\ &\leq 1 + \|Av\|_{V'} (\|v - u\|_V + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$a_n \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V \leq 1, a_n \leq 1$$

und

$$\|u_n - v\| \leq \|u - u_n\| + \|u - v\| \leq \frac{1}{2} + \|u - v\|$$

für genügend großes  $n$  ist. Ersetzen wir in dieser Abschätzung  $v$  durch  $2u - v$ , dann erhalten wir

$$-a_n \langle Au_n, v - u \rangle \leq 1 + \|A(2u - v)\|_{V'} (\|v - u\|_V + \frac{1}{2}). \quad (3.3)$$

Für  $w = v - u$  ergibt sich aus (3.2), (3.3)

$$|a_n \langle Au_n, w \rangle| \leq 1 + \max\{\|A(w + u)\|_{V'}, \|A(-w + u)\|_{V'}\} (\|w\|_V + \frac{1}{2}).$$

Daher sind die stetigen linearen Abbildungen

$$a_n Au_n : V \rightarrow \mathbb{R}$$

punktweise beschränkt.

Aus dem Prinzip über die gleichmäßige Beschränktheit folgt

$$\sup_n \|a_n Au_n\|_{V'} \leq \text{const}(u) = c(u).$$

Damit ist

$$\|Au_n\|_{V'} \leq \frac{c(u)}{a_n} = c(u)(1 + \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|),$$

also

$$\|Au_n\|_{V'} (1 - c(u) \|u_n - u\|) \leq c(u),$$

und somit

$$\|Au_n\|_{V'} \leq \frac{c(u)}{1 - c(u) \|u_n - u\|} \leq 2c(u) \quad \text{für } n > n_0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(iv) Den Beweis von (iv) holen wir später im Anschluss an Lemma 7 nach.

### 3.2 Der Satz von Browder und Minty

Unser Ziel ist, den folgenden Hauptsatz von Browder und Minty für monotone Operatoren zu beweisen:

**Satz 27 (Browder, Minty, 1963)** Sei  $V$  ein reflexiver Banachraum mit abzählbarer Basis,  $A : V \rightarrow V'$ . Es gelte

- $A$  ist monoton, d.h.  $\langle Au - Av, u - v \rangle_V \geq 0$
- $A$  ist hemistetig, d.h. die Abbildung  $t : \langle A(u + tv), w \rangle_X$  ist stetig im Intervall  $[0, 1]$  für alle  $u, v, w \in X$ .
- $A$  ist koerzitiv, d.h.  $\lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_V}{\|u\|} = \infty$ .

Dann existiert für alle  $f \in V'$  ein  $u \in V$ , so dass

$$Au = f,$$

d.h.  $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$  für alle  $v \in V$  ist.

**Beweisskizze:** Ohne auf technische Einzelheiten einzugehen, skizzieren wir zunächst den Beweis.

**1.Schritt:** Galerkin Approximation, Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes: Da  $V$  eine abzählbare Basis  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  besitzt, gilt

$$V = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n},$$

$V_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ . Der Fixpunktsatz von Brouwer sichert die Existenz von Galerkinlösungen  $u_n$  mit  $\langle Au_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \forall v_n \in V_n$ .

**2.Schritt:** A-priori Abschätzung

Es ist zu zeigen, dass die Folge der Galerkinlösungen beschränkt ist.

**3.Schritt:** Schwache Konvergenz

Da  $V$  reflexiv ist, besitzt die beschränkte Folge von Galerkinlösungen  $(u_n)_n$  eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{n_k})_k$

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Es ist zu zeigen, dass  $u$  eine Lösung von  $Au = f$  ist.

Beim Beweis des 3.Schrittes spielt ein Lemma von Minty eine entscheidende Rolle.

**Lemma 7 (Lemma von Minty (1962))** [5, S.57] Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $A : V \rightarrow V'$  ein hemistetiger und monotoner Operator. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i)  $A$  ist maximal monoton, d.h. seien  $u \in V, f \in V'$  und

$$\langle f - Av, u - v \rangle_V \geq 0 \quad \forall v \in V, \tag{3.4}$$

dann folgt  $Au = f$ .

(ii)  $A$  genügt der Bedingung (M), d.h. aus

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } V \tag{3.5}$$

$$Au_n \rightharpoonup f \quad \text{in } V' \tag{3.6}$$

$$\langle Au_n, u_n \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V \tag{3.7}$$

für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $Au = f$ .

(iii) Aus

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \quad (3.8)$$

$$Au_n \rightarrow f \text{ in } V' \quad (3.9)$$

bzw.

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \quad (3.10)$$

$$Au_n \rightarrow f \text{ in } V' \quad (3.11)$$

folgt  $Au = f$ .**Beweis:**(i) Sei  $w \in V$  beliebig. Wir setzen in (3.4)  $v = u - tw, t > 0$  ein. Wir erhalten

$$\langle f - A(u - tw), w \rangle \geq 0$$

und damit für  $t \rightarrow 0$ 

$$\langle f - Au, w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V.$$

Ersetzen wir  $w$  durch  $-w$ , so ergibt sich

$$\langle f - Au, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in V$$

und daher

$$\langle f - Au, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V.$$

(ii)  $A$  ist monoton, d.h.  $\forall v \in V, n \in \mathbb{N}$ , gilt

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle.$$

Aus (3.5) folgt  $\langle Av, u_n \rangle \rightarrow \langle Av, u \rangle$ , aus (3.7)  $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u_n \rangle$ , aus (3.6)  $\langle Au_n, v \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Daher gilt

$$0 \leq \langle f, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle f - Av, v \rangle = \langle f - Av, u - v \rangle.$$

Damit ist  $A$  maximal monoton und aus (i) folgt die Behauptung (ii).

(iii) Wir zeigen, dass

$$\langle Au_n, u_n \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V \quad (3.12)$$

gilt. Dann sind die Voraussetzungen von (ii) erfüllt und (iii) folgt. Wesentlich wird dabei die folgende Aussage sein:

Sei  $X$  ein Banachraum und  $x_n \rightarrow x$ . Dann gibt es eine Konstante  $c$ , so dass

$$\|x_n\|_X \leq c. \quad (3.13)$$

Wir nehmen jetzt an, (3.8) und (3.9) gelten.

Dann ist

$$\begin{aligned} |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| &\leq |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u_n \rangle| + |\langle f, u_n - u \rangle| \\ &= |\langle Au_n - f, u_n \rangle| + |\langle f, u_n - u \rangle| \\ &\leq \|Au_n - f\|_{V'} \|u_n\|_V + |\langle f, u_n - u \rangle|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null wegen (3.13), (3.8) und (3.9).  
Wir betrachten nun die Voraussetzungen (3.10) und (3.11) und schätzen folgendermaßen ab

$$\begin{aligned} |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| &\leq |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle| + |\langle Au_n, u \rangle - \langle f, u \rangle| \\ &= |\langle Au_n, u_n - u \rangle| + |\langle Au_n - f, u \rangle| \\ &\leq \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V + |\langle Au_n - f, u \rangle|. \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.13) folgt die Aussage. ■

Nun sind wir auch in der Lage, die Aussage (iv) von Lemma 6 zu beweisen: Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann ist  $A$  demistetig.

### Beweis von Aussage (iv) des Lemmas 6

Sei  $(u_n)_n$  eine konvergente Teilfolge in  $V$ ,  $u_n \rightarrow u$ . Da  $A$  monoton ist, ist die Folge  $(Au_n)_n$  beschränkt (Aussage (iii) des Lemmas 6). Daher gibt es eine schwach konvergente Teilfolge  $(Au_{n_k})$ ,  $Au_{n_k} \rightarrow f$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Voraussetzungen (3.10) und (3.11) sind damit für diese Teilfolge erfüllt und daher ist nach (iii) des Lemmas von Minty  $Au = f$ . Damit gilt  $Au_{n_k} \rightarrow Au$ . Wir überlegen nun, dass für die gesamte Folge  $u_n$  gilt, dass  $Au_n \rightarrow Au$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass alle schwach konvergenten Teilfolgen von  $(Au_n)$  zum gleichen Grenzwert konvergieren. Wir führen dies genauer aus.

Nehmen wir indirekt an, dass ein  $\hat{v} \in V$  existiert, so dass  $\langle Au_n - Au, \hat{v} \rangle \not\rightarrow 0$ . Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Teilfolge  $(u_{n_j})$  von  $(u_n)$ ,  $n_j = n_j(\varepsilon_0)$ , so dass

$$\langle Au_{n_j} - Au, \hat{v} \rangle > \varepsilon_0. \quad (3.14)$$

Da  $u_{n_j} \rightarrow u$  gibt es wiederum eine Teilfolge  $(u_{n_{j_i}})$  von  $(u_{n_j})$ , so dass  $Au_{n_{j_i}} \rightarrow Au$ . Für diese Teilfolge gilt ebenfalls (3.14) und damit haben wir einen Widerspruch erhalten. ■

### Hauptsatz von Browder und Minty

**Satz 28** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum mit einer abzählbaren Basis  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .  $A : V \rightarrow V'$  sei monoton, koerzitiv und hemistetig. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  von

$$Au = f. \quad (3.15)$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls  $A$  strikt monoton ist, dann ist die Lösung von (3.15) eindeutig bestimmt.

#### Beweis:

##### 1. Schritt: Galerkin Approximation

Sei  $V_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ .  $u_n = \sum_{k=1}^n c_k^n w_k$  ist Galerkin-Lösung, falls

$$\langle Au_n - f, w_k \rangle = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.16)$$

(3.16) kann geschrieben werden als

$$\langle A(\sum_{k=1}^n c_k^n w_k) - f, w_k \rangle = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$



und ist ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung eines Vektors  $\vec{c}^n = (c_1^n, \dots, c_n^n)^\top$ . Setzen wir

$$g_k(\vec{c}^n) = \langle A(\sum_{k=1}^n c_k^n w_k) - f, w_k \rangle,$$

dann lässt sich (3.17) schreiben als

$$\vec{g}(\vec{c}^n) = \vec{0}. \quad (3.18)$$

Da  $A$  monoton und hemistetig ist und damit nach Lemma 6 (iv) Demistetigkeit vorliegt, ist  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dies beruht auf der Tatsache, dass in endlich dimensionalen Räumen starke und schwache Konvergenz übereinstimmen.

Um die Lösbarkeit von (3.18) zu untersuchen, wenden wir den Satz von Brouwer für nichtlineare Gleichungssystem (Satz 12) an. Dazu müssen wir zeigen, dass es eine Konstante  $r = r(n)$  gibt, so dass gilt

$$\vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{c}^n \text{ mit } |\vec{c}^n| = r(n). \quad (3.19)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n &= \sum_{k=1}^n \langle Au_n - f, c_k^n w_k \rangle = \langle Au_n - f, u_n \rangle \\ &= \langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Da  $A$  koerzitiv ist, d.h.  $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \rightarrow \infty$  für  $\|u\|_V \rightarrow \infty$ , gibt es ein  $R > 0$  so dass

$$\langle Au, u \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u\|_V > 0 \quad \text{für } \|u\|_V \geq R.$$

Sei jetzt  $\vec{c}^n$  so gewählt, dass  $\|u_n\|_V = \|\sum_{k=1}^n c_k^n w_k\| \geq R$ . Es folgt

$$R \leq \|u_n\|_V \leq \sum_{k=1}^n |c_k^n| \|w_k\| \leq k(n) |\vec{c}^n|,$$

d.h.  $|\vec{c}^n| \geq \frac{R}{k(n)}$ , wobei  $k(n) > 0$  eine von  $n$  abhängige Konstante ist. Dann ist

$$\langle Au_n, u_n \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u_n\|$$

und

$$\vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u_n\| - \|f\|_{V'} \|u_n\| = \|u_n\| > 0$$

für  $\|u_n\|_V \geq R$ . Nun ist

$$R \leq \|u_n\|_V \leq \sum_{k=1}^n |c_k^n| \|w_k\| \leq k(n) |\vec{c}^n|,$$

wobei  $k(n) > 0$  eine von  $n$  unabhängige Konstante ist. Wir haben

$$|\vec{c}^n| \geq \frac{R}{k(n)}.$$

Mit  $r(n) = \frac{R}{k(n)}$  folgt (3.19).

Satz 12 liefert daher die Existenz einer Lösung von (3.18) mit

$$|\vec{c}^n| \leq r(n) = \frac{R}{k(n)}$$

und

$$\|u_n\|_V \leq k(n)|\bar{c}^n| \leq R. \quad (3.20)$$

**2.Schritt:** Beschränktheit von  $A(u_n)$

Lemma 6 (iii) sichert uns zunächst die lokale Beschränktheit, d.h. es gibt ein  $R_0 > 0$  und ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|v\|_V \leq R_0 \Rightarrow \|Av\|_{V'} \leq \delta. \quad (3.21)$$

Da  $\langle Au_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle$  ist, erhalten wir

$$|\langle Au_n, u_n \rangle| \leq \|f\|_{V'} \|u_n\| \stackrel{(3.20)}{\leq} \|f\|_{V'} R. \quad (3.22)$$

Nun ist  $\langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0$ , also

$$\langle Au_n, v \rangle \leq \langle Au_n, u \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|Au_n\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = R_0}} \frac{1}{R_0} \langle Au_n, v \rangle &\leq & \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = R_0}} \frac{1}{R_0} (\langle Av, v \rangle + \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle) \\ & &\stackrel{(3.21), (3.22)}{\leq} & \frac{1}{R_0} (\|Av\|_{V'} \|v\|_V + \|f\|_{V'} R + \|Av\| R) \\ & &\leq & \delta + \|f\|_{V'} \frac{R}{R_0} + \delta \frac{R}{R_0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

**3.Schritt:** Konvergenz der Galerkin-Lösung

Wir wollen zeigen, dass eine Teilfolge  $u_{n_k}$  existiert, so dass

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } V, \quad (3.24)$$

$$Au_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } V', \quad (3.25)$$

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V. \quad (3.26)$$

Aus dem Lemma von Minty (ii) folgt  $Au = f$ . Wir betrachten die Folge der Galerkin-Lösungen  $(u_n)$ . Für  $w \in \cup_{n=1}^{\infty} V_n$  gibt es ein  $n_0$ , so dass  $w \in V_{n_0}$ . Für  $n \geq n_0$  ist nach (3.16)

$$\langle Au_n, w \rangle = \langle f, w \rangle$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in \cup_{n=1}^{\infty} V_n. \quad (3.27)$$

Nun sind die Folgen  $(u_n)$  in  $V$  und  $(Au_n)$  in  $V'$  beschränkt. Wir bemerken, dass  $V'$  ebenfalls reflexiv ist. Daher finden wir eine Teilfolge  $(u_{n_k})$  von  $(u_n)$ , so dass

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

$$Au_{n_k} \rightharpoonup g \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Wir überlegen, dass  $g = f$  ist.

Die Relationen (3.27) und (3.28) liefern für  $w \in \cup_{n=1}^{\infty} V_n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, w \rangle = \langle f, w \rangle.$$

Die Relation (3.29) besagt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, w \rangle = \langle g, w \rangle.$$

Also ist  $\langle f - g, w \rangle = 0$  auf  $\cup_{n=1}^{\infty} V_n$ . Nach dem Satz von Hahn/Banach gilt auch  $\langle f - g, w \rangle = 0$  auf  $V = \overline{\cup_{n=1}^{\infty} V_n}$ . Schließlich gilt für die Galerkin-Lösungen

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle f, u_{n_k} \rangle$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, u_{n_k} \rangle \stackrel{(3.28)}{=} \langle f, u \rangle.$$

#### 4.Schritt: Eigenschaften der Lösungsmenge

Sei  $f \in V'$  und  $M = \{u \in V : Au = f\}$ .  $M$  besitzt folgende Eigenschaften

(i)  $M \neq \emptyset$ .

(ii)  $M$  ist beschränkt.

Dies folgt aus der Koerzitivität von  $A$ . Falls  $A$  nicht beschränkt wäre, dann gäbe es für alle  $R > 0$  ein  $u \in M$  mit  $\|u\| \geq R > 0$ .

Wir haben jedoch (siehe 1.Schritt des Beweises)

$$0 = \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'})\|u\| - \|f\|_{V'}\|u\| = \|u\| > 0.$$

(iii)  $M$  ist konvex.

Seien  $u_1$  und  $u_2 \in M$ . Wir zeigen, dass auch die Konvexkombination

$w = tu_1 + (1-t)u_2, 0 \leq t \leq 1$  aus  $M$  ist.

Sei  $v \in V$ . Aus der Monotonie von  $A$  folgt:

$$\begin{aligned} \langle f - Av, w - v \rangle &= \langle f - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t+1-t)v \rangle \\ &= \langle f - Av, t(u_1 - v) \rangle + \langle f - Av, (1-t)(u_2 - v) \rangle \\ &= t\langle Au_1 - Av, (u_1 - v) \rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Minty (i) folgt, dass  $Aw = f$  ist.

(iv)  $M$  ist abgeschlossen.

Sei  $(u_n)$  eine konvergente Folge in  $M$ , d.h.  $u_n \rightarrow u, Au_n = f$ . Wir müssen zeigen, dass  $Au = f$  ist.

Es ist für ein beliebiges  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle f - Av, -v \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f - Av, u_n - v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir wenden wieder das Lemma von Minty (i) an und erhalten  $f = Au$ .

(v) Eindeutigkeit

$A$  sei strikt monoton. Dann besteht  $M$  aus genau einem Element (Übung!).

■

### 3.3 Der Nemyckii-Operator

Wir wollen den Hauptsatz über monotone Operatoren auf quasilineare Differentialgleichungen (linear in den höchsten Ableitungen) anwenden. Quasilineare Differentialgleichungen 2.Ordnung sind z.B.

$$Au(x) = -\operatorname{div} \vec{a}(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.30)$$

Zu diesen gehört auch die  $p$ -Laplace Gleichung ( $c = 0$ )

$$Au(x) = -\operatorname{div} (|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) + cu(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (3.31)$$

Fügen wir noch eine Dirichlet-Randbedingung hinzu

$$u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so können wir schwache Formulierungen einführen:

Gesucht ist ein  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) = V$ , so dass

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (\vec{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v) \, dx = \langle f, v \rangle \quad (3.32)$$

bzw.

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + cuv) \, dx = \langle f, v \rangle \quad (3.33)$$

für alle  $v \in V$  ist.

Zunächst müssen wir garantieren, dass die Integrale in (3.32) und (3.33) wohl definiert sind.

Dazu muss  $\vec{a}$  gewissen Wachstumsbedingungen genügen (siehe auch (1.50))

Um dies zu beschreiben führt man den **Nemyckii-Operator** für eine gegebene Funktion  $f$  ein:

$$(F\vec{u})(x) := f(x, \vec{u}(x)) \quad (3.34)$$

$$\vec{u} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

Wir nehmen an, dass  $f$  der Carathéodory-Bedingung und einer Wachstumsbedingung genügt:

**Carathéodory-Bedingung (C):**

$f(\cdot, \vec{\eta}) : x \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ .

$f(x, \cdot) : \vec{\eta} \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

**Wachstumsbedingung (W):**

$$|f(x, \vec{\eta})| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{\frac{p_i}{q}}, \quad b > 0, a \in L^q(\Omega), 1 \leq p_i, q < \infty, i = 1, \dots, n.$$

**Lemma 8**  $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  genüge den Bedingungen (C) und (W). Dann ist der Nemyckii-Operator (3.34)

$$F : \prod_{i=1}^n L^{p_i}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$$

wohl definiert, stetig und beschränkt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$\|F\vec{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq c(\|u\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{p_i}{q}}).$$

**Beweis:**

Wir beschränken uns auf den Fall  $n = 1, u = u_1, p = p_1$ .

**1. Messbarkeit von  $Fu$** 

Da  $u \in L^p(\Omega)$  ist, ist die Funktion  $x \rightarrow u(x)$  Lebesgue-messbar auf  $\Omega$ . Daher gibt es eine Folge  $(u_n)_n$  von Treppenfunktionen mit

$$u_n \rightarrow u \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Es folgt

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) \stackrel{(C)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n(x)).$$

Die Abbildungen  $x \rightarrow f(x, u_n(x))$  sind messbar und der Grenzwert messbarer Funktionen ist messbar.

**2. Beschränktheit von  $F$** 

Sei  $u \in L^p(\Omega)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |f(x, u(x))|^q dx \\ &\stackrel{(W)}{\leq} \int_{\Omega} (|a(x)| + b|u(x)|^{\frac{p}{q}})^q dx \\ &\leq c \int_{\Omega} (|a(x)|^q + b^q |u(x)|^p) dx \\ &\leq \hat{c} (\|a\|_{L^q(\Omega)}^q + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p). \end{aligned}$$

Damit bildet  $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  ab.

**3. Stetigkeit von  $F$** 

Wir betrachten eine konvergente Folge in  $L^p(\Omega)$ ,  $u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$ . Wir müssen zeigen, dass

$$F(u_n) \xrightarrow{L^q(\Omega)} F(u).$$

Es existiert ein Teilfolge  $(u_{n_k})$ , die f.ü. in  $\Omega$  punktweise konvergiert.

Aus (C) folgt, dass

$$Fu_{n_k}(x) \rightarrow Fu(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Können wir zeigen, dass  $|g_{n_k}(x)| = |Fu_{n_k}(x) - Fu(x)|^q \leq h_{n_k}(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$  und

$$\int_{\Omega} h_{n_k}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x) dx \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

dann gilt nach dem Lebesgueschen Satz über die majorisierte Konvergenz, dass  $g_{n_k} \xrightarrow{L^1(\Omega)} 0$ ,

d.h.  $Fu_{n_k} \xrightarrow{L^q(\Omega)} Fu$  konvergiert.

Es ist

$$\begin{aligned} |g_{n_k}(x)| &= |Fu_{n_k}(x) - Fu(x)|^q = |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \\ &\leq c(|a(x)|^q + b^q |u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q) =: h_{n_k}(x). \end{aligned}$$

■

**Bemerkung:**

Betrachten wir partielle Differentialgleichungen, z.B. (3.31), dann ist der Nemyckii-Operator vektorwertig und  $\vec{u}$  durch  $\nabla u$  zu ersetzen

$$\vec{F}(\nabla u(x)) = \vec{a}(x, \nabla u(x)) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

Die Wachstumsbedingung für  $\vec{a}$  lautet dann

$$|\vec{a}(x, \eta)| \leq |\vec{a}(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{\frac{p_i}{q}}.$$

Setzen wir  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $p_1 = p_2 = p$ , dann erhalten wir eine Wachstumsbedingung, die wir bereits bei der direkten Methode der Variationsrechnung kennen gelernt haben (siehe [6]).

**Die  $p$ -Laplace Gleichung**

Wir wenden den Satz von Brouwer und Minty an, um die Lösbarkeit des folgenden Randwertproblems zu untersuchen,  $1 < p < \infty$ ,  $s \geq 0$ :

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + su = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.36)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.37)$$

Der Operator  $A(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  wird  $p$ -Laplace-Operator genannt. Für  $p = 2$  erhalten wir den Laplace-Operator.  $\Omega$  sei ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  sei Lipschitz-stetig. Wir wählen als kanonischen Raum  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ . Die schwache Formulierung von (3.36) und (3.37) lautet:

Für  $f \in V'$  finde ein  $u \in V$ , so dass

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + suv) \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.38)$$

Wir überzeugen uns, dass  $A : V \rightarrow V'$  wohl definiert ist.

**Lemma 9** Sei  $p > \frac{2n}{n+2}$  für  $s > 0$  und  $p > 1$  für  $s = 0$ . Dann ist  $A : V \rightarrow V'$ ,  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ .

**Beweis:**

Wir betrachten zunächst den Fall  $s = 0$ .

Es ist für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{q = \frac{p}{p-1}}{=} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq c(u) \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für  $s > 0$  müssen wir nur den Term

$$\int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$$

betrachten. Nach (2.6) gilt für  $p > \frac{2n}{n+2}$

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

■

Wir zeigen jetzt, dass  $A : V \rightarrow V'$  den Voraussetzungen des Satzes von Browder und Minty genügt.

**Lemma 10** Die Voraussetzungen von Lemma 9 seien erfüllt. Der durch (3.36) definierte Operator  $A : V \rightarrow V'$ ,  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ , ist strikt monoton, koerzitiv und stetig.

**Beweis:**

**1.Schritt:**  $A$  ist strikt monoton.

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\vec{g}(\vec{p}(x)) - \vec{g}(\vec{q}(x))) \cdot [\vec{p}(x) - \vec{q}(x)] \, dx \end{aligned} \quad (3.39)$$

für  $\nabla u(x) = \vec{p}(x)$ ,  $\nabla v(x) = \vec{q}(x)$ ,  $\vec{g}(\vec{\eta}) = |\vec{\eta}|^{p-2} \vec{\eta}$ .

Wir sehen uns den Integranden von (3.39) an.

Es ist

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{p}) - \vec{g}(\vec{q}) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\vec{g}(\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q}))] \, d\tau \\ &= \int_0^1 D\vec{g}(\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q})) (\vec{p} - \vec{q}) \, d\tau \end{aligned}$$

mit

$$D\vec{g} = (|\vec{\eta}|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2)|\vec{\eta}|^{p-4} \eta_i \eta_j)_{i,j}.$$

Damit wird

$$[\vec{g}(\vec{p}) - \vec{g}(\vec{q})] \cdot [\vec{p} - \vec{q}] = \int_0^1 D\vec{g}(\underbrace{\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q})}_{\vec{\eta}}) \underbrace{(\vec{p} - \vec{q})}_{\vec{y}} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \, d\tau.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} D\vec{g}(\vec{\eta}) \vec{y} \cdot \vec{y} &= |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 + (p-2) |\vec{\eta}|^{p-4} (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2 \\ &= |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 (1 + (p-2) \frac{(\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2 |\vec{\eta}|^2}) \\ &\geq |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 \min(1, p-1). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [\bar{g}(\bar{p}) - \bar{g}(\bar{q})] \cdot (\bar{p} - \bar{q}) &\geq c|\bar{p} - \bar{q}|^2 \int_0^1 |\bar{q} + \tau(\bar{p} - \bar{q})|^{p-2} d\tau \\ &> 0 \quad \text{für } \bar{p} \neq \bar{q} \end{aligned}$$

und  $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0$  für  $u \neq v$ .

## 2. $A$ ist koerzitiv

Es ist

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + s|u|^2 dx \geq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \geq c\|u\|_V^p$$

und damit

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \geq c\|u\|_V^{p-1} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\|_V \rightarrow \infty \text{ und } p > 1.$$

## 3. $A$ ist stetig

Sei  $(u_k)$  eine konvergente Folge in  $V$ ,  $u_k \xrightarrow{V} u$ . Wir zeigen, dass  $Au_k \rightarrow Au$  in  $V'$  konvergiert. Dazu wenden wir Lemma 8 auf den Nemyckii-Operator

$$\vec{F}(\nabla u(x)) = \vec{F}(\vec{p})(x) = |\vec{p}(x)|^{p-2} \vec{p}(x)$$

an. Da  $\vec{F}(\vec{p}) = |\vec{p}|^{p-2} \vec{p}$  stetig ist (für  $\vec{p} = \vec{0}$  stetig durch  $\vec{0}$  ergänzt) gilt die Bedingung (C) und es ist die Bedingung (W) zu prüfen:

$$|\vec{F}(\vec{p})| = |\vec{f}(\vec{p})| = |\vec{p}|^{p-1} = |\vec{p}|^{\frac{p}{q}} \quad \text{für } q = \frac{p}{p-1}.$$

Die Voraussetzungen von Lemma 8 sind erfüllt und

$$\vec{F} : [L^p(\Omega)]^n \rightarrow [L^q(\Omega)]^n,$$

ist wohl definiert, stetig und beschränkt, d.h.

$$\vec{F}(\nabla u_k) \rightarrow \vec{F}(\nabla u) \quad \text{in } [L^q(\Omega)]^n \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Weiterhin gilt

$$v \in [W^{\circ,1,p}(\Omega)] = V \subset L^2(\Omega) \quad \text{für } p > \frac{2n}{n+2}.$$

Wir erhalten für ein  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au_k - Au, v \rangle &= \int_{\Omega} [\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)] \cdot \nabla v dx + s \int_{\Omega} (u_k - u)v dx \\ &\leq c\|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} \|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^n} + s\|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} \|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^n} + s\|u_k - u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|Au_k - Au\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |\langle Au_k - Au, v \rangle| \\ &\leq c(\|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} + \|u_k - u\|_V) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■



Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 29** Sei  $p > \frac{2n}{n+2}$  für  $s > 0$  und  $p > 1$  für  $s = 0$ . Dann besitzt das schwach formulierte Dirichletproblem für den  $p$ -Laplace-Operator (3.36) eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  für jedes  $f \in V'$ .

### 3.4 Pseudomonotone Operatoren und der Satz von Brézis

Bei quasilinearen Differentialgleichungen können auch Terme niedriger Ordnung auftreten, die nicht monoton sind. Sehen wir uns z.B. das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

an, wobei  $s < 0$  ist.

Um auch solche Probleme behandeln zu können, wurde der Begriff des pseudomonotonen Operators eingeführt. Typische Beispiele sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei  $A_1 : V \rightarrow V'$  ein monotoner, hemistetiger und  $A_2 : V \rightarrow V'$  ein stark stetiger (und damit kompakter) Operator ist. Man spricht auch von kompakter Störung von  $A_1$  durch  $A_2$ .

Die Pseudomonotonie eines Operators ist eine Abschwächung der Monotonie in Verbindung mit der Hemistetigkeit. Ziel ist, auch hier einen Hauptsatz, den Satz von Brézis (1986), zu beweisen:

**Satz 30 (Satz von Brézis)** Sei  $A : V \rightarrow V'$  ein pseudomonotoner, beschränkter, koerzitiver Operator, der einen separablen, reflexiven reellen Banachraum  $V$  in  $V'$  abbildet. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  der Gleichung

$$Au = f.$$

Um den Begriff der Pseudomonotonie verständlich zu machen, erinnern wir an einige wichtige Eigenschaften von monotonen, hemistetigen Operatoren, siehe Lemma 6, Lemma von Minty.

- $A$  monoton und hemistetig  $\Rightarrow A$  demistetig  $\Rightarrow A$  ist lokal beschränkt.
- $A$  monoton und hemistetig

$$\left. \begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } V \\ Au_n &\rightharpoonup f && \text{in } V' \\ \langle Au_n, u_n \rangle_V &\rightarrow \langle f, u \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow Au = f \quad (3.40)$$

Kurz: Falls  $A$  monoton und hemistetig ist, dann gilt die Bedingung (M). Die Aussage (3.40) wird jetzt modifiziert.

**Definition 11 (Bedingung  $\hat{M}$ )** Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $A : V \rightarrow V'$ .  $A$  genügt der Bedingung ( $\hat{M}$ ), falls aus

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } V, \quad (3.41)$$

$$Au_n \rightharpoonup f \quad \text{in } V', \quad (3.42)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle f, u \rangle \quad (3.43)$$

folgt, dass  $Au = f$  ist.

Wir zeigen, dass die Bedingung  $\hat{M}$  invariant unter kompakten Störungen ist.

**Lemma 11** Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : V \rightarrow V'$ . Dann gilt

- (i) Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann genügt  $A$  der Bedingung  $(\hat{M})$ .
- (ii) Wenn  $A$  der Bedingung  $(\hat{M})$  genügt und  $B$  ein stark stetiger Operator ist, dann genügt auch  $A + B$  der Bedingung  $(\hat{M})$ .

**Beweis:**

- (i) Die Aussage (i) ist eine Variante der Aussage (ii) des Lemmas 7 von Minty. Der Beweis verläuft ähnlich. Sei  $(u_n)$  eine Folge aus  $V$ , für die (3.41), (3.42) und (3.43) gelten. Da  $A$  monoton ist, haben wir

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle.$$

Wir bilden den  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup$  und erhalten wegen (3.41), (3.42) und (3.43)

$$0 \leq \langle f, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle f - Av, v \rangle = \langle f - Av, u - v \rangle.$$

Damit ist  $A$  maximal monoton und aus dem Lemma 7 von Minty (i) folgt  $Au = f$ .

- (ii) Für  $u_n \rightarrow u$  gilt  $Bu_n \rightarrow Bu$  in  $V'$ . Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle Bu_n, u_n \rangle - \langle Bu, u \rangle| &= |\langle Bu_n - Bu, u_n \rangle + \langle Bu, u_n \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &\leq \|Bu_n - Bu\| \|u_n\| + |\langle Bu, u_n - u \rangle| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Somit gilt  $Au_n + Bu_n \rightarrow f + Bu = g$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n + Bu_n, u_n \rangle \stackrel{(3.44)}{\leq} \langle f + Bu, u \rangle = \langle g, u \rangle.$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle g - Bu, u \rangle$$

und

$$\begin{aligned} Au &= g - Bu \\ Au + Bu &= g. \end{aligned}$$

Damit gilt die Eigenschaft  $(\hat{M})$  auch für  $A + B$ . ■

**Definition 12** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ .  $A$  ist pseudomonoton, falls aus

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V, \quad (3.45)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n - u \rangle_V \leq 0, \quad (3.46)$$

folgt

$$\langle Au, u - v \rangle_V \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \langle Au_n, u_n - v \rangle_V \quad \forall v \in V. \quad (3.47)$$

Wir betrachten Beispiele und Eigenschaften von pseudomonotonen Operatoren.

**Lemma 12** Sei  $V$  ein reeller reflexiver Banachraum,  $A, B : V \rightarrow V'$ . Es gilt

- (a) Wenn  $A$  monoton und hemistetig ist, dann ist  $A$  pseudomonoton.
- (b) Wenn  $A$  stark stetig ist, dann ist  $A$  pseudomonoton.
- (c) Wenn  $A$  und  $B$  pseudomonoton sind, dann ist  $(A + B)$  pseudomonoton.
- (d) Wenn  $A$  pseudomonoton ist, dann genügt  $A$  der Bedingung  $(\hat{M})$ .
- (e) Wenn  $A$  pseudomonoton und lokal beschränkt ist, dann ist  $A$  demistetig.

**Beweis:**

- (a) Sei  $(u_n)$  eine Folge, so dass (3.45) und (3.46) gelten. Da  $A$  monoton ist, erhalten wir

$$\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \geq 0$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au, u_n - u \rangle \stackrel{(3.45)}{=} 0.$$

Zusammen mit (3.46) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0. \quad (3.48)$$

Sei  $v \in V$  beliebig. Wir setzen  $w = u + t(v - u)$ ,  $t > 0$ . Aus der Monotonie von  $A$  folgt

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Aw, u_n - (u + t(v - u)) \rangle &\geq 0 \\ t \langle Au_n, u - v \rangle &\geq -\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Aw, u_n - u \rangle + t \langle Aw, u - v \rangle. \end{aligned}$$

(3.45) und (3.48) liefern uns

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} t \langle Au_n, u_n - v \rangle &\geq t \langle Aw, u - v \rangle \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle &\geq \langle A(u + t(v - u)), u - v \rangle. \end{aligned}$$

Da  $A$  hemistetig ist, gilt für  $t \rightarrow 0^+$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle.$$

(3.47) ist erfüllt und  $A$  ist pseudomonoton.

- (b)  $A$  sei stark stetig, d.h.  $u_n \rightarrow u$  und  $Au_n \rightarrow Au$  in  $V'$ . Analog zu (3.44) erhalten wir  $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$ . Damit haben wir für ein beliebiges  $v \in V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle,$$

d.h. (3.47) gilt.

- (c) Wir müssen zeigen: Falls  $u_n \rightarrow u$  in  $V$  und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - u \rangle_V \leq 0, \quad (3.49)$$

dann gilt

$$\langle (A + B)u, u - v \rangle_V \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - v \rangle_V. \quad (3.50)$$

Wir überlegen uns zunächst, dass aus (3.49)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0, \quad (3.51)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0 \quad (3.52)$$

folgt. Wir nehmen an, dass (3.51) nicht gilt, d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = a > 0.$$

Dann folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq -a.$$

Die Pseudomonotonie von  $B$  liefert

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle. \quad (3.53)$$

Für  $v = u$  erhalten wir aus (3.53)

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq -a,$$

was zu einem Widerspruch führt.

Da  $A$  und  $B$  pseudomonoton sind, folgt aus (3.51) und (3.52) für einen beliebigen  $v \in V$

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \quad (3.54)$$

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle. \quad (3.55)$$

Addition von (3.54) und (3.55) führt zur Ungleichung (3.50).

- (d) Sei  $(u_n)$  eine Folge, für die (3.41), (3.42) und (3.43) gelten. Wir müssen zeigen, dass  $Au = f$  ist.

Aus (3.42) und (3.43) folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq \langle f, u \rangle - \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u \rangle = 0.$$

Die Pseudomonotonie von  $A$  besagt, dass für  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au, u - v \rangle &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \stackrel{(3.43)}{\leq} \langle f, u \rangle - \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, v \rangle \\ &\stackrel{(3.42)}{=} \langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle = \langle f, u - v \rangle. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ersetzen wir  $v$  durch  $2u - v$ , dann ist

$$\langle Au, v - u \rangle = -\langle Au, u - v \rangle \leq -\langle f, u - v \rangle,$$

also

$$\langle Au, u - v \rangle \geq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.57)$$

Aus (3.56) folgt

$$\langle Au, u - v \rangle = \langle f, u - v \rangle$$

und damit

$$Au = f.$$

(e) Wir zeigen die Demistetigkeit von  $A$ , d.h.

$$u_n \xrightarrow{V} u \Rightarrow Au_n \xrightarrow{V'} Au. \quad (3.58)$$

Aus der lokalen Beschränktheit folgt, dass  $(Au_n)$  beschränkt ist. Daher gibt es eine Teilfolge  $(Au_{n_k})$  mit  $Au_{n_k} \rightharpoonup f$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle = 0. \quad (3.59)$$

Die Pseudomonotonie von  $A$  besagt, dass aus (3.58) und (3.59) folgt

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - v \rangle = \langle f, u - v \rangle.$$

Wie oben können wir schließen, dass  $Au = f$  ist, d.h.  $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dies gilt für beliebige konvergente Teilfolgen  $(Au_{n_k})$  und daher erhalten wir  $Au_n \xrightarrow{V'} Au$ . ■

### Beweis des Satzes von Brézis

Wir beweisen jetzt den Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren.

**Satz 31** Sei  $A : V \rightarrow V'$  ein pseudomonotoner, beschränkter, koerziver Operator, der einen separablen, reflexiven, reellen Banachraum  $V$  in  $V'$  abbildet. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  der Gleichung

$$Au = f.$$

#### Beweis:

Wir folgen den Beweisschritten des Satzes von Browder und Minty.

##### 1.Schritt: Galerkin Approximation

Da nach Lemma 12 beschränkte, pseudomonotone Operatoren demistetig sind, erhalten wir die Existenz einer Folge  $(u_n)$  von Galerkinlösungen, die gleichmäßig beschränkt sind.

##### 2.Schritt:

Die Beschränktheit von  $(Au_n)_n$  folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

##### 3.Schritt: Konvergenz des Galerkinverfahren

Aus der Reflexivität von  $V$  bzw.  $V'$  folgt, dass die beschränkten Folgen  $(u_n)_n$  und  $(Au_n)_n$  schwach konvergente Teilfolgen enthalten. Es kann aus diesen eine Teilfolge  $(u_{n_k})_k$  gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u \quad \text{in } V \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \\ Au_{n_k} &\rightharpoonup g \quad \text{in } V' \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen wie im 3.Schritt des Beweises des Satzes von Browder liefern  $g = f$  und schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Die Bedingung  $(\hat{M})$ , die nach Lemma 12 d) gilt, führt auf

$$Au = f. \quad \blacksquare$$

**Beispiele:**

Wir betrachten das Dirichletproblem

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (3.60)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.61)$$

Hierbei sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . Wir führen den Raum  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  ein und geben eine schwache Formulierung von (3.60) und (3.61) an: Sei

$$\langle A_1 u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (3.62)$$

$$\langle A_2 u, v \rangle = \int_{\Omega} g(u)v \, dx. \quad (3.63)$$

Für ein  $f \in V'$  ist ein  $u \in V$  gesucht, so dass

$$\langle A_1 u, v \rangle + \langle A_2 u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.64)$$

Damit das Integral (3.63) wohl definiert ist, d.h.  $g : \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ , müssen wir gewisse Wachstumsbedingungen an  $g$  stellen.

Lemma 8 garantiert:

Fall  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und die Abschätzung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (3.65)$$

gilt, dann bildet  $g : L^p(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  ab und

$$\|g(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}) \leq c(1 + \|u\|_V^{p-1})$$

Eigentlich brauchen wir aber nur, dass  $A_2 : V \rightarrow V'$ . Wir wollen überlegen, ob das durch allgemeinere Wachstumsbedingungen der Form (3.65) gesichert ist.

**Lemma 13** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine stetige Funktion, die der Wachstumsbedingung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}), \quad 1 < r < \infty, \quad (3.66)$$

genügt.

Ist  $1 < p < n$ , dann fordern wir zusätzlich  $r < \frac{np}{n-p}$ . Für  $p \geq n$  kann  $r \in (1, \infty)$  gewählt werden. Dann bildet  $A_2 : V$  in  $V'$  ab und ist beschränkt. Außerdem ist  $A_2$  stark stetig.

**Beweis:**

Wir erinnern zunächst an Einbettungssätze für Sobolevräume ([1, S.144]):

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p < n, 1 \leq \alpha < \frac{np}{n-p}, \quad (3.67)$$

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p = n, 1 \leq \alpha < \infty, \quad (3.68)$$

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} C(\overline{\Omega}) \subset L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p > n, 1 \leq \alpha < \infty. \quad (3.69)$$

Wir zeigen jetzt, dass  $A_2 : V \rightarrow V'$  beschränkt ist.

**1.Fall:**  $p < n, r < \frac{np}{n-p}$

Es ist

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v \rangle| &\leq c \int_{\Omega} |1 + |u|^{r-1}| |v| \, dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} c \left[ \int_{\Omega} |v| \, dx + \left( \int_{\Omega} |u|^{(r-1)r'} \, dx \right)^{\frac{1}{r'}} \left( \int_{\Omega} |v|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\ &\leq c [\|v\|_V + \|u\|_{L^r(\Omega)}^{r-1} \|v\|_{L^r(\Omega)}] \\ &\stackrel{(3.67), \alpha=r}{\leq} c [1 + \|u\|_V^{r-1}] \|v\|_V. \end{aligned}$$

**2.Fall:**  $p \geq n$ .

Wir gehen analog vor und benutzen die Einbettungen (3.68) und (3.69). ■

Wir überlegen nun, warum  $A_2$  stark stetig ist.

Sei  $(u_n)_n$  eine schwach konvergente Folge in  $V$ ,  $u_n \rightharpoonup u$ . Wir müssen zeigen, dass die Bildfolge  $(A_2 u_n)_n$  stark in  $V'$  konvergiert. Aufgrund der kompakten Einbettungen (3.67), (3.68) und (3.69) existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})$ , die in  $L^r(\Omega)$  stark konvergiert

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } V \\ u_{n_k} &\rightarrow u \quad \text{in } L^r(\Omega). \end{aligned}$$

Nach Lemma 8 ist der zu  $g$  gehörige Nemyckii-Operator  $F : L^r(\Omega) \rightarrow L^{r'}(\Omega)$  wohl definiert, stetig und beschränkt (man setze dort  $p_i = r, q = r', \frac{p_i}{q} = r - 1$ ). Daher gilt

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}(\Omega)} = \|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{L^{r'}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \|A_2(u_{n_k}) - A_2(u)\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} |\langle A_2(u_{n_k}) - A_2(u), v \rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \int_{\Omega} |g(u_{n_k}) - g(u)| |v| \, dx \\ &\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{L^{r'}(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert  $A_2(u_{n_k}) \rightarrow A_2(u)$  in  $V'$ .

Diese Argumentation gilt für alle Teilfolgen  $(u_{n_k})$  mit  $u_{n_k} \rightarrow u$ . Es folgt

$$A_2(u_n) \rightarrow A_2(u). \quad \text{■}$$

Somit haben wir gezeigt, dass  $A_1 + A_2$  pseudomonoton ist. Wir wollen jetzt den Satz von Brézis anwenden, um die Existenz einer schwachen Lösung des Randwertproblems von (3.60), (3.61) nachzuweisen.

**Lemma 14** *Seien die Voraussetzungen von Lemma 13 erfüllt und gelte zusätzlich die Koerzitivitätsbedingung für  $g$*

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s) s > -\infty, \quad (3.70)$$

*dann existiert eine schwache Lösung  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  des Randwertproblems (3.64).*

**Beweis:**

Wir müssen nur noch zeigen, dass aus der Voraussetzung (3.70) die Koerzitivität von  $(A_1 + A_2) : V \rightarrow V'$  folgt. Es ist

$$\frac{\langle (A_1 + A_2)u, u \rangle}{\|u\|_V} \geq \frac{\langle A_1 u, u \rangle}{\|u\|_V} - \frac{c_0}{\|u\|_V} \stackrel{\text{Friedrichs}}{\geq} c_1 \|u\|_V^{p-1} - \frac{c_0}{\|u\|_V} \rightarrow \infty$$

für  $\|u\|_V \rightarrow \infty$ . ■

**Bemerkung:**

Die Bedingung (3.70) kann abgeschwächt werden (Übung).

**2.Beispiel:**

Wir betrachten noch einmal das Dirichletproblem für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\nu \Delta \vec{u} + \nabla \vec{u} \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (3.71)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.72)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.73)$$

Hierbei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . Die Gleichungen (3.71) und (3.72) beschreiben eine stationäre Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Die Randbedingung (3.73) besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}$  am Rand verschwindet (eventuell Subtraktion einer gegebenen Geschwindigkeit).  $\nabla \vec{u} \vec{u}$  wird auch als Wirbelterm bezeichnet.

Wir setzen

$$V = \{ \vec{u} \in \mathring{W}^{1,2}(\Omega)^n : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \}, \quad (3.74)$$

versehen mit der Norm

$$\|\vec{u}\|_V := \|\nabla \vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}} \quad (3.75)$$

Um die Eindeutigkeit des Druckfeldes zu gewährleisten, betrachten wir  $p \in L^2(\Omega)$  mit  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$ .

Da für  $\vec{v} \in V$  gilt

$$\langle \nabla p, \vec{v} \rangle := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx = 0,$$

lautet die schwache Formulierung von (3.71), (3.72), (3.73):

Finde ein  $\vec{u} \in V$ , so dass

$$\int_{\Omega} v \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{v}) \, dx = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall v \in V, \quad (3.76)$$

bzw. abgekürzt

$$\langle A_1 \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall v \in V.$$

Wir überlegen uns, dass der Raum  $V$ , definiert durch (3.74) und (3.75) ein reflexiver Banachraum ist. Dazu ist nur das folgende Lemma zu zeigen.



**Lemma 15** Der Raum  $V$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $[\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n$ .

**Beweis:**

Sei  $(\vec{u}_n)_n \in V$  und  $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$  in  $[\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n$ . Insbesondere konvergiert

$$\nabla \vec{u}_n \rightarrow \nabla \vec{u} \quad \text{in } [L^2(\Omega)]^{n \times n}.$$

Daher gibt es eine Teilfolge  $\vec{u}_{n_k}$  mit

$$\nabla \vec{u}_{n_k} \rightarrow \nabla \vec{u} \quad \text{f.ü für } k \rightarrow \infty.$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(\nabla \vec{u}_{n_k}(x)) = \text{tr}(\nabla \vec{u}(x)) = \text{div } \vec{u}(x) \quad \text{f.ü.}$$

Daher ist  $\vec{u} \in V$ . ■

Wir haben uns schon früher (Lemmata 9, 13) überzeugt, dass

$$A_1 + A_2 : V \rightarrow V'$$

wohl definiert ist. Weiterhin gilt, dass  $A_1 : V \rightarrow V'$  linear, stetig, koerzitiv und strikt monoton ist ( $\nu > 0$ , Lax-Milgram).

Wir sehen uns jetzt an, ob  $A_2 : V \rightarrow V'$  pseudomonoton und beschränkt ist.

**Lemma 16** Der Operator  $A_2 : V \rightarrow V'$  ist stark stetig und beschränkt.

**Beweis:**

a) Beschränktheit:

Wir hatten bereits überlegt (1.18), dass

$$\begin{aligned} \langle A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle &\leq \int_{\Omega} |\vec{u}|_{\mathbb{R}^n} |\nabla \vec{u}|_{\mathbb{R}^n \times n} |\vec{v}|_{\mathbb{R}^n} \, dx \leq \left( \int_{\Omega} |\vec{u}|^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} |\vec{v}| \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\vec{v}\|_V = c \|\vec{u}\|_V^2 \|\vec{v}\|_V, \end{aligned}$$

da  $V \subset [L^4(\Omega)]^3$  ist. Damit ist  $A_2$  beschränkt.

b) Starke Stetigkeit

Nach (3.67) und (3.68) ist  $V \overset{c}{\subset} [L^4(\Omega)]^n$ ,  $n = 2, 3$ . Sei  $(\vec{u}_k)_k$  eine schwach konvergente Folge in  $V$

$$\vec{u}_k \overset{V}{\rightharpoonup} \vec{u}.$$

Die kompakte Einbettung von  $V$  in  $[L^4(\Omega)]^n$  sichert, dass eine in  $[L^4(\Omega)]^n$  konvergente Teilfolge existiert:

$$\vec{u}_{k_l} \overset{[L^4(\Omega)]^n}{\rightarrow} \vec{u}. \quad (3.77)$$

Da die weitere Argumentation für alle in  $[L^4(\Omega)]^n$  konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir die obige Teilfolge wiederum mit  $(\vec{u}_k)$ .

Wir müssen zeigen

$$A_2 \vec{u}_k \overset{V'}{\rightarrow} A_2 \vec{u},$$

d.h.

$$\|A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}\|_{V'} = \sup_{\substack{\vec{v} \in V \\ \|\vec{v}\|=1}} |\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (3.78)$$

Wir beweisen (3.78) indirekt, indem wir annehmen (3.78) gelte nicht. Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Element  $\vec{v}_k \in V$  mit  $\|\vec{v}_k\| = 1$ , so dass

$$|\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v}_k \rangle| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.79)$$

Da die Folge  $(\vec{v}_k)$  in  $V$  beschränkt ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge, die in  $[L^4(\Omega)]^n$  gegen  $\vec{v}$  konvergiert. Die bezeichnen wir wiederum mit  $(\vec{v}_k)$ . Für diese Teilfolge gilt

$$\begin{aligned} |\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v}_k \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}_k \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k - \nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{v}_k) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}_k (\vec{u}_k - \vec{u}) \cdot \vec{v}_k + \nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}) + \nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v}) dx \right| \\ &\leq c \underbrace{\|\vec{u}_k - \vec{u}\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\rightarrow 0 (3.77)} \underbrace{\|\nabla \vec{u}_k\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\|\vec{v}_k\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\text{beschränkt}} \\ &\quad + \|\vec{u}\|_{[L^4(\Omega)]^n} \underbrace{\|\nabla \vec{u}_k - \nabla \vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\|\vec{v}_k - \vec{v}\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \underbrace{\nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v}}_{\rightarrow 0 \text{ schw. Konvergenz}} dx \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.79). ■

**Satz 32** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$

$$V = \{\vec{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^n : \text{div } \vec{u} = 0\}.$$

Dann gibt es zu jedem  $f \in V'$  eine schwache Lösung  $u \in V$  des Dirichletproblems (3.76).

**Beweis:**

Der Operator  $(A_1 + A_2) : V \rightarrow V'$  ist beschränkt und pseudomonoton, wie wir bereits gezeigt haben. Wir müssen daher nur noch überlegen, dass  $(A_1 + A_2)$  koerziv ist. Es ist

$$\begin{aligned} \langle A_2 \vec{u}, \vec{u} \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{u} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot (\nabla \vec{u})^\top \vec{u} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \vec{u} \cdot \vec{u} \\ \partial_{x_2} \vec{u} \cdot \vec{u} \\ \partial_{x_3} \vec{u} \cdot \vec{u} \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \\ \partial_{x_2} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \\ \partial_{x_3} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \end{pmatrix} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{grad} \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx = - \int_{\Omega} \text{div } \vec{u} \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx = 0. \end{aligned}$$

Aus der Koerzitivität von  $A_1$  folgt damit die Koerzitivität von  $(A_1 + A_2)$ . ■

**Bemerkung:**

Satz 32 sichert die Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{u} \in V$ .

Nun gehen wir zum größeren Raum  $\tilde{V} = [W^{1,2}(\Omega)]^n$  über. Wir erhalten für  $\tilde{v} \in \tilde{V}$  die folgende Relation für gegebenes  $\vec{u}$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \tilde{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u u \cdot \tilde{v} \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{v} \, dx = \langle \vec{f}, \tilde{v} \rangle$$

und

$$- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{v} \, dx =: \langle F, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}. \quad (3.80)$$

Aus (3.80) folgt, dass

$$\nabla p = F$$

im Distributionensinn ist und  $p$  bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Wie vorn erwähnt, wird durch die Zusatzbedingung  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$  die Eindeutigkeit von  $p$  gesichert.



# Kapitel 4

## Zeitabhängige Probleme

Wir wollen uns in diesem Kapitel ansehen, wie die Existenz von Lösungen von nichtlinearen Evolutionsgleichungen gesichert werden kann. Dazu wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz und die Theorie der monotonen Operatoren an. Zunächst führen wir geeignete Funktionenräume für Funktionen

$$u = u(t, x), t \in [0, T], x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

ein. Hierzu werden die Zeit  $t$  und der Ort  $x$  als unterschiedliche Variable aufgefasst und

$$[u(t)](x) := u(x, t)$$

als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum über  $\Omega$  beschrieben, z.B.

$$u : [0, T] \rightarrow \dot{H}^{1,2}(\Omega) = V.$$

**Definition 13** *Es sei*

$$L^p([0, T], V) = \left\{ u : [0, T] \rightarrow V, \left( \int_0^T \|u\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Die schwache Ableitung  $\partial_t u \in L^1([0, T] \times \Omega)$  ist definiert durch

$$\int_0^T \int_{\Omega} \partial_t u \varphi dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} u \partial_t \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega).$$

Die Distributionenableitung  $\partial_t u \in L^q([0, T], V')$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , von  $u \in L^p([0, T], V)$  ist durch

$$\int_0^T \langle \partial_t u(t), v \rangle_{V'} \varphi(t) dt = - \int_0^T \left( \int_{\Omega} u(t, x) v(x) dx \right) \varphi'(t) dt$$

für alle  $v \in V, \varphi \in C_0^\infty([0, T], \mathbb{R})$  definiert. Dabei wird vorausgesetzt, dass  $V \subset L^2(\Omega) \subset V'$  ist.

## 4.1 Ein Reaktion-Diffusion Problem

Wir betrachten folgendes Rand-Anfangswertproblem für ein Reaktion-Diffusion System ([3, S.499 ff.])

$$\partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} = \vec{f}(\vec{u}) \quad \text{in } (0, T] \times \Omega, \quad (4.1)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (4.2)$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \quad \text{auf } \{t = 0\} \times \Omega. \quad (4.3)$$

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_m)^\top$ ,  $\vec{u}_0 = (u_{01}, \dots, u_{0m})^\top$ ,  $\vec{u}_0 \in \dot{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{f}$  ist Lipschitz-stetig, d.h. es gilt

$$|\vec{f}(\vec{z})| \leq c(1 + |\vec{z}|). \quad (4.4)$$

Wir wählen jetzt  $V = \dot{H}^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  und betrachten

$$X_2^1 = \{u \in L^2([0, T], V) : \partial_t u \in L^2((0, T), V')\}.$$

**Definition 14**  $u \in X_2^1$  ist schwache Lösung von (4.1), (4.2), (4.3), falls

$$\langle \partial_t \vec{u}, \vec{v} \rangle + \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f}(\vec{u}) \vec{v} \, dx \quad \forall \vec{v} \in \dot{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad (4.5)$$

für fast alle  $t \in [0, T]$  und  $\vec{u}(\vec{0}) = \vec{u}_0$ .

Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes können wir zeigen:

**Satz 33** Es gibt eine eindeutig bestimmte schwache Lösung von (4.5).

**Beweis:**

**1. Linearisierung:** Wir führen den Raum

$$X = C([0, T]; L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)) \quad (4.6)$$

mit

$$\|\vec{v}\|_X = \max_{0 \leq t \leq T} \|\vec{v}(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}$$

ein. Wir linearisieren das Problem (4.1), (4.2), (4.3), indem wir für eine gegebene Funktion  $\vec{u}(t) \in X_2^1$

$$\vec{h}(t) := \vec{f}(\vec{u}(t))$$

setzen. Wir überlegen, dass  $\vec{h} \in L^2([0, T], L^2(\Omega, \mathbb{R}^m))$  ist, d.h.

$$\int_0^T \|\vec{h}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^m} \, dt < \infty.$$

Wegen der Wachstumsbedingung (4.4) und für ein  $\vec{u} \in X_2^1$  erhalten wir

$$\int_0^T \|\vec{h}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^m} \, dt \leq \tilde{c} \int_0^T \|1\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^m}^2 \, dt < \infty. \quad (4.7)$$

Beachte, dass (4.7) bereits für

$$\vec{u} \in L^2((0, T), L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)) \quad (4.8)$$

gilt. Aus der linearen Theorie ist bekannt, dass eine eindeutige Lösung  $\vec{w} \in X_{\frac{1}{2}}$  des Problems

$$\left\langle \frac{d\vec{w}}{dt}, \vec{v} \right\rangle + \int_{\Omega} \nabla \vec{w} : \nabla \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{h}(x, t) \vec{v} \, dx \quad \forall \vec{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad (4.9)$$

$$\vec{w}(\vec{0}) = \vec{u}_0 \quad (4.10)$$

existiert. Ist  $\Omega$  glatt, dann gehört  $\vec{w}$  zum Raum  $X$ , der in (4.6) eingeführt wurde. Aufgrund der Bemerkung (4.8) können wir den Operator  $A : X \rightarrow X$  einführen, indem wir

$$A[\vec{u}] = \vec{w}$$

setzen.

2. Wir zeigen: Falls  $T$  klein genug ist, dann ist  $A$  eine  $k$ -Kontraktion.

Wir betrachten zwei Elemente  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  aus  $X$  und setzen

$$\vec{w}_i = A[\vec{u}_i], \quad i = 1, 2.$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt} \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^2 \, dx = 2 \left\langle \vec{w}_1 - \vec{w}_2, \frac{d}{dt} (\vec{w}_1 - \vec{w}_2) \right\rangle.$$

Führen wir in  $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  die (Halb-)Norm

$$\|\vec{u}\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)}^{\circ} = \|\nabla \vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^{m \times m}}$$

ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 + 2 \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)}^{\circ} &= 2(\vec{h}_1 - \vec{h}_2, \vec{w}_1 - \vec{w}_2) \\ &\leq \varepsilon \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\vec{f}(\vec{u}_1) - \vec{f}(\vec{u}_2)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \\ &\leq c\varepsilon \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\vec{f}(\vec{u}_1) - \vec{f}(\vec{u}_2)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2. \end{aligned}$$

Ist  $\varepsilon$  hinreichend klein, dann gilt

$$\frac{d}{dt} \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \leq \tilde{c} \|\vec{f}(\vec{u}_1) - \vec{f}(\vec{u}_2)\|^2 \leq c \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2, \quad (4.11)$$

da  $\vec{f}$  Lipschitz-stetig ist. Wir integrieren (4.11) nach  $t$  und erhalten

$$\int_0^s \frac{d}{dt} \|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \leq c \int_0^s \|\vec{u}_1(t) - \vec{u}_2(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \, dt. \quad (4.12)$$

Wegen der Anfangsbedingung  $\vec{w}_1(0) = \vec{w}_2(0) = \vec{u}_0$  gilt

$$\|\vec{w}_1(s) - \vec{w}_2(s)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \leq cT \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_X^2 \quad \text{für } 0 \leq s \leq T.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\|\vec{w}_1 - \vec{w}_2\|_X^2 &\leq cT \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_X^2, \\ \|A[\vec{u}_1] - A[\vec{u}_2]\|_X &\leq (cT)^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|_X.\end{aligned}$$

Für genügend kleines  $T = T_1$  gilt die  $k$ -Kontraktivität von  $A$ .

Wir haben damit die Existenz einer Lösung im Zeitintervall  $[0, T_1]$  gezeigt. Da  $\vec{u}(t) \in \mathring{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  für fast alle  $t \in [0, T_1]$ , können wir das Anfangswertproblem (4.1), (4.2), (4.3) betrachten, indem wir  $\vec{u}_0$  durch  $\vec{u}(T_1)$  ersetzen. Wir gelangen durch Wiederholung der Prozedur zu einem Zeitpunkt  $T_2$ , so dass in  $[T_1, T_2]$  die  $k$ -Kontraktivität von  $A$  gesichert ist. Mit endlich vielen Schritten erreichen wir schließlich  $T$ .

3. Wir sehen uns jetzt die Eindeutigkeit an. Wir wählen zwei schwache Lösungen  $\vec{u}$  und  $\vec{u}$  aus  $X$ . Für diese ist  $\vec{w}_1 = \vec{u}$  und  $\vec{w}_2 = \vec{u}$  und daher nach (4.12)

$$\|\vec{u}(s) - \vec{u}(s)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)} \leq c \int_0^s \|\vec{u}(t) - \vec{u}(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 dt.$$

Wir erinnern an die Gronwallsche Ungleichung ([3, S.625]).

Falls  $\xi(s) \leq c_1 \int_0^s \xi(t) dt$  für  $0 \leq s \leq T$ , dann gilt  $\xi(s) = 0$ .

Daher gilt  $\vec{u} = \vec{u}$  in  $X$ . Da  $X_2^1 \cap X \subset X$  folgt, dass  $u \in X_2^1 \cap X$  eindeutig bestimmt ist. ■

### Bemerkung:

In den Anwendungen sind  $u_1, \dots, u_m$  verschiedene chemische Stoffe, die diffundieren und wechselwirken. Der Diffusionsterm ist  $\Delta \vec{u}$  (bzw.  $a_1 \Delta u_1, \dots, a_m \Delta u_m$  mit  $a_i > 0, i = 1, \dots, m$ ).  $\vec{f}(\vec{u})$  ist der Reaktionsterm. Die Annahme der Lipschitzstetigkeit für  $\vec{f}$  bzw. die Wachstumsbedingung (4.4) ist nicht sehr realistisch.  $\vec{f}$  weist polynomiales Wachstum auf und es kann ein sogenanntes blow up auftreten.

## 4.2 Ein quasilineares parabolisches Problem

Wir wenden jetzt die Theorie der monotonen Operatoren an, um folgendes quasilineare Rand-Anfangswertproblem zu lösen [5, S.119 ff.].

$$\partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + g(u) = f \quad \text{in } [0, T] \times \Omega, \quad (4.13)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } [0, T] \times \partial\Omega, \quad (4.14)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (4.15)$$

Dabei nehmen wir an, dass wie im stationären Fall  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und der Wachstumsbedingung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}), \quad (4.16)$$

$1 \leq r < \infty$  genügt, und dass

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty \quad (4.17)$$



ist. Sei  $V = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$  und  $X = L^p(0, T; V)$ . Wir betrachten die Operatoren  $A_1 : X \rightarrow X'$ ,  $A_2 : X \rightarrow X'$ , die durch

$$\begin{aligned}\langle A_1 u, v \rangle &:= \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ \langle A_2 u, v \rangle &:= \int_0^T \int_{\Omega} g(u) v \, dx \, dt\end{aligned}$$

definiert sind. Hierbei ist  $X' = L^p(0, T; V)' = L^q(0, T; V')$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Wir wollen diskutieren, ob  $A_1$  und  $A_2$  ähnliche Eigenschaften wie im stationären Fall besitzen.

**Lemma 17** Sei  $1 < p < \infty$ .  $A_1$  bildet  $X$  in  $X'$  ab.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}\langle A_1 u, v \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \, dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u\|_{L^p([0,T] \times \Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p([0,T] \times \Omega)} \\ &\leq c \left[ \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \, dt \right]^{\frac{1}{p}} = c \left( \int_0^T \|v\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= c \|v\|_X.\end{aligned}$$

■

**Lemma 18** Sei  $1 < p < \infty$ . Der Operator  $A_1 : X \rightarrow X'$  ist strikt monoton, stetig, koerzitiv und beschränkt.

Der Beweis läuft analog zum Beweis von Lemma 9.

Wir sehen uns jetzt den Operator  $A_2$  an. Im stationären Fall haben wir in Lemma 13 gezeigt, dass  $A_2$  (unter der Voraussetzung, falls  $1 < p < n$ , dann ist  $r < \frac{np}{n-p}$ ),  $A_2$  wohl definiert, beschränkt und stark stetig ist. Dabei haben wir die kompakten Einbettungen von

$$\mathring{W}^{1,p}(\Omega) \stackrel{c}{\subset} L^\alpha(\Omega) \tag{4.18}$$

benutzt. Um in ähnlicher Weise vorgehen zu können, müssen wir prüfen, ob auch im instationären Fall die kompakte Einbettung gilt:

$$X = L^p(0, T; \mathring{W}^{1,p}(\Omega)) \stackrel{?}{\subset} L^p(0, T; L^\alpha(\Omega)). \tag{4.19}$$

**Bemerkung:**

Die Einbettung (4.19) ist i.a. nicht kompakt, d.h. es gibt beschränkte Folgen in  $X$ , die keine in  $L^p(0, T, L^\alpha(\Omega))$  stark konvergente Teilfolge besitzen.

Dazu betrachten wir eine Folge

$$u_n(t, x) = f_n(t)v(x), \quad (4.20)$$

wobei  $v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $f_n \in L^p(0, T)$  und  $f_n \rightharpoonup f \in L^p(0, T)$ .

Wir nehmen an, dass es keine Teilfolge von  $f_n$  gibt, die stark in  $L^p(0, T)$  konvergiert. Da  $(\|f_n\|_{L^p(0, T)})_n$  beschränkt ist, gilt auch

$$\|u_n\|_X = \left( \int_0^T \|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|f_n\|_{L^p(0, T)} < c$$

und  $u_n \xrightarrow{X} u$ .

Nun ist

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{L^p(0, T, L^\alpha(\Omega))}^p &= \int_0^T \|u_n - u\|_{L^\alpha(\Omega)}^p dt \\ &= \int_0^T \left( \int_\Omega |u_n - u|^\alpha dx \right)^{\frac{p}{\alpha}} dt \\ &= \left( \int_\Omega |v(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{p}{\alpha}} \int_0^T |f_n - f|^\alpha dt \\ &= \|v(x)\|_{L^\alpha(\Omega)}^p \|f_n - f\|_{L^p(0, T)}^p. \end{aligned}$$

Damit ist die strikte Konvergenz für eine Teilfolge von  $u_n$  äquivalent damit, dass die entsprechende Teilfolge von  $(f_n)$  stark konvergiert.

Wenn wir  $A_2$  nur auf dem Teilraum

$$W = \{u \in L^p(0, T; \mathring{W}^{1,p}(\Omega)) : \partial_t u \in L^q(0, T; (\mathring{W}^{1,p}(\Omega))')\} \quad (4.21)$$

betrachten,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann erhalten wir unter gewissen Voraussetzungen eine kompakte Einbettung von  $W$  in  $L^p(0, T; L^\alpha(\Omega))$ . Genauer gesagt, gilt folgendes Lemma:

**Lemma 19 (Aubin 1963, Lions 1969)** [5, S.121 ff.]

Seien  $B, B_0, B_1$  Banachräume, wobei  $B_0$  und  $B_1$  reflexiv sind und folgende Einbettungen gelten:

$$B_0 \stackrel{c}{\subset} B \subset B_1.$$

Sei

$$W_0 := \{u \in L^{p_0}(0, T; B_0) : \partial_t u \in L^{p_1}(0, T; B_1)\}$$

mit  $p_i \in (0, \infty)$ ,  $i = 0, 1$ , versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W_0} := \|u\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \|\partial_t u\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Dann ist die Einbettung

$$W_0 \subset L^{p_0}(0, T; B)$$

kompakt.

**Folgerung:**

Wählen wir  $B_0 = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ ,  $B = L^\alpha(\Omega)$ ,  $B_1 = W^{-1,q}(\Omega) = (\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega))'$ , dann ist

$$B_0 \overset{c}{\subset} B \quad \begin{cases} \text{für } p < n & 1 \leq \alpha < \frac{np}{n-p} \\ \text{für } p \geq n & 1 \leq \alpha < \infty \end{cases} \quad (4.22)$$

und  $B \subset B_1 = (B_0)'$ , falls  $B' \supset B_0$ , d.h.  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\Omega)$ . Man beachte, für  $p < n$  ist  $1 < \frac{\alpha}{\alpha-1} < \frac{np}{n-p}$ ,  $\alpha > 1$ . Damit ist unter der Voraussetzung (4.22)

$$W \overset{c}{\subset} L^p(0, T, L^\alpha(\Omega)).$$

Diese Diskussion zeigt, dass der Raum  $X = L^p(0, T; V)$  nicht der geeignete Raum ist, um die Existenz von schwachen Lösungen des Rand-Anfangswertproblems (4.13), (4.14) und (4.15) zu sichern.

Wir müssen zum Raum  $W$  (4.21) übergehen.

Da  $A_1 : X \rightarrow X'$  und  $W \subset X$  ist, gilt

$$A_1 : W \rightarrow W'.$$

Weiterhin ist  $A_1 : W \rightarrow W'$  ebenfalls stetig, strikt monoton, koerzitiv und beschränkt.

**Der Operator  $A_2$** 

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen an  $r$  der Operator  $A_2 : W \rightarrow W'$  wohl definiert ist. Es ist für  $r > 1$ ,  $r' = \frac{r}{r-1}$

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v \rangle| &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} g(u) v \, dx \, dt \right| \\ &\leq c \int_0^T \int_{\Omega} (1 + |u|^{r-1}) |v| \, dx \, dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} c \left( \int_0^T \int_{\Omega} |v| \, dx \, dt + \left( \int_0^T \int_{\Omega} |u|^{(r-1)r'} \, dx \, dt \right)^{\frac{r-1}{r}} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |v|^r \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{r}} \right) \\ &\leq c(1 + \|u\|_{L^r((0,T) \times \Omega)}^{r-1}) \|v\|_{L^r((0,T) \times \Omega)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Kann man zeigen, dass

$$W \subset L^r((0, T) \times \Omega)$$

ist, dann folgt aus der Abschätzung (4.23), dass  $A_2 : W \rightarrow W'$ . Es gilt folgendes Lemma:

**Lemma 20** [5, S.124 f.]

$$\text{Für } r \leq \frac{p(n+2)}{n} \text{ ist } W \overset{\text{stetig}}{\hookrightarrow} L^r((0, T) \times \Omega). \quad (4.24)$$

$$\text{Für } r < \frac{p(n+2)}{n} \text{ ist } W \overset{\text{kompakt}}{\hookrightarrow} L^r((0, T) \times \Omega). \quad (4.25)$$

Mit Hilfe des Lemmas 20 kann man nun zeigen

**Lemma 21** Sei  $1 < p < \infty$  und für die stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gelte die Abschätzung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}). \quad (4.26)$$

Für  $r \leq \frac{p(n+2)}{n}$  ist  $A_2 : W \rightarrow W'$  wohl definiert,

für  $r < \frac{p(n+2)}{n}$  ist  $A_2$  stark stetig.

**Beweis:**

Die Wohldefiniertheit folgt sofort aus (4.23) und (4.24). Der Beweis der starken Stetigkeit verläuft analog zum stationären Fall.

**Satz 34** [5, S.127] Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes, Lipschitz-stetiges Gebiet und  $I = [0, T]$  ein endliches Zeitintervall. Die stetige Funktion  $g$  in (4.13) genüge der Wachstumsbedingung (4.24) mit  $1 < r < \frac{p(n+2)}{n}$ . Dann gibt es für alle  $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  eine schwache Lösung  $u \in \mathcal{D} = \{u \in W, u(0) = 0\}$  des Problems

$$\begin{aligned} & \int_I \langle \partial_t u, \varphi(t) \rangle_{\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)} dt + \int_I \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^{p-2} \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx dt \\ & + \int_I \int_{\Omega} g(u(x, t)) \varphi(x, t) dx dt = \int_I \int_{\Omega} f(x, t) \varphi(x, t) dx dt \quad \forall \varphi(x, t) \in C_0^\infty(I \times \Omega). \end{aligned}$$

**Bemerkung zum Beweis:**

Wir haben die Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  betrachtet und die zeitliche Ableitung  $\partial_t u$  nicht analysiert. Man kann zeigen ([5, S.104]):

Der schwache Ableitungsoperator

$$\partial_t : \mathcal{D} \rightarrow L^{p'}(I; (\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega))')$$

ist ein linearer maximal monotoner Operator auf  $\mathcal{D}$ . Dies führt zusammen mit den Eigenschaften von  $A_1$  und  $A_2$  zur Behauptung.

# Index

- $k$ -kontrahierend, 10
- $p$ -Laplace Gleichung, 62
- Ableitung
  - Distributionen-, 77
  - schwache, 77
- Banachscher Fixpunktsatz, 10, 11, 14
- Bedingung  $\hat{M}$ , 65
- Bedingung  $M$ , 54
- Bilinearform
  - stetige, 42
- Carathéodory-Bedingung (C), 60
- Cofaktor-Matrix, 22
- Dirichletproblem für nichtlineare Poisson-gleichung, 10
- Eigenschaften der Lösungsmenge, 59
- Einbettungssätze für Sobolevräume, 70
- Euler-Lagrange Gleichungen, 20
- Evolutionsgleichungen
  - nichtlineare, 77
- expandierend
  - nicht, 10
- Fehlerabschätzung
  - a-posteriori, 11
  - a-priori, 11
- Fixpunkt, 9, 24, 30
- Fixpunktgleichung, 9
- Fixpunktsatz
  - Schäferscher, 34
- Fixpunktsatz von Brouwer, 20
- Fixpunktsatz von Schauder, 20
- Fréchet-Ableitung, 21, 40, 41
- Galerkin Approximation, 56
- Gronwallsche Ungleichung, 80
- Höhere Ableitungen, 43
- Hauptsatz
  - von Browder und Minty, 56
- homöomorphe Menge, 25
- Homöomorphismus, 44
- Jacobi-Matrix, 21
- Kegelbedingung, 42
- Koerzitivitätsbedingung, 71
- kompakt, 12
  - relativ, 12
- kontrahierend, 10
- Konvergenzgeschwindigkeit, 11
- Lagrange Funktionen, 20
- Lamé-Operator, 41
- Lemma
  - von Minty, 54
- Lemma von Mazur, 31
- Lipschitz-stetig, 10
- Mittelwertformel, 44
- Navier-Stokes Gleichungen
  - stationäre, 17
- Newton-Verfahren, 39
- Null-Lagrange-Funktion, 22, 23
- Operator
  - strikt monotoner, 49
  - beschränkter, 51
  - demistetiger, 51
  - Differential-, 47
  - Einbettungs-, 29
  - gleichmäßig monotoner, 49
  - hemistetiger, 51
  - Integral-, 29
  - koerzitiver, 49
  - kompakter, 28
  - linearisierter Elastizitäts-, 41
  - lokal beschränkter, 51
  - maximal monotoner, 54
  - monotoner, 49
  - Nemyckii-, 60
  - nichtlinearer Differential-, 40
  - pseudomonotoner, 65, 66
  - Schauder-, 29
  - stark stetiger, 51
  - stetiger, 51
  - vollstetiger, 28
- Operatornorm, 40

- Piola-Identität, 23
- Quasilineares parabolisches Problem, 80
- Raum  $\mathcal{L}(X, Y)$ , 40
- Raum  $\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ , 18
- Raum  $L^p([0, T], V)$ , 77
- Reaktion-Diffusion Problem, 78
- Relaxation
  - lineare, 9
  - nichtlineare, 9
- Satz
  - von Brézis, 65
  - von Browder und Minty, 54
- Satz von Peano, 33
- Schäferscher Fixpunktsatz, 34
- Schauderscher Fixpunktsatz, 27, 30
- Schwache Formulierung, 17
- Schwache Lösung, 78
- Spannungstensor, 41
- Spektralradius, 14
- St.-Venant Materialien, 41, 47
- stetig differenzierbar, 42
- System der Euler-Lagrange Gleichungen,  
21
- Taylor-Formel, 44
- Verzerrungstensor, 41
- Wachstumsbedingung, 60, 62, 70

# Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. Academic Press. INC, Boston, 1978.
- [2] Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three Dimensional Elasticity*. North Holland, S. 993.
- [3] Evans, L.C. *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, **Volume 19**, 1998.
- [4] Gilbarg, D., Trudinger, N. *Elliptic Differential Equations of Second Order* Springer Verlag 1983.
- [5] Ružička, M. *Nichtlineare Funktionalanalysis* Springer-Verlag 2004.
- [6] Sändig, A.M. *Partielle Differentialgleichungen, Vorlesung im Wintersemester 2005/2006* Preprint 2006/004 des IANS, Universität Stuttgart 2006.
- [7] Valent, T. *Boundary Value Problems of Finite Elasticity* Springer Verlag 1988.
- [8] Wendland, W.L., Steinbach, O. *Analysis* Teubner Verlag 2005.
- [9] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part I, IIA/B und IV/V* Springer-Verlag 1994.

## Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei Herrn stud. math./phys. Markus Daub für das kompetente Schreiben des Textes, sowie für das Erstellen des Layouts und der Graphiken bedanken.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Pfaffenwaldring 57

70569 Stuttgart

Germany

**E-Mail:** [saendig@ians.uni-stuttgart.de](mailto:saendig@ians.uni-stuttgart.de)

**WWW:** <http://ians.uni-stuttgart.de/~saendig/>





## Erschienene Preprints ab Nummer 2006/001

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

- 2006/001 *Klimke, A.*: Sparse Grid Interpolation Toolbox - User's Guide
- 2006/002 *Klimke, A., Wohlmuth, B.*: Constructing Dimension-Adaptive Sparse Grid Interpolants using Parallel Function Evaluations
- 2006/003 *Hartmann, S., Brunssen, S., Ramm, E., Wohlmuth, B.*: Application of a primal-dual active set strategy for unilateral non-linear dynamic contact problems of thin-walled structures
- 2006/004 *Sändig, A.-M.*: Partielle Differentialgleichungen Vorlesung im Wintersemester 2005/2006
- 2006/005 *Nicaise, S., Witowski, K., Wohlmuth, B.*: An a posteriori error estimator for the Lamé equation based on  $H(\text{div})$ -conforming stress approximations
- 2006/006 *Geis, W. (ed.), Sändig, A.-M. (ed.)*: Second International Workshop - Direct and Inverse Problems in Piezoelectricity, Hirschegg (Kleinwalsertal), Austria, July 16-19, 2006
- 2006/007 *Klimke, A.*: Efficient Construction of Hierarchical Polynomial Sparse Grid Interpolants using the Fast Discrete Cosine Transform
- 2006/008 *Buchukuri, T., Chkadia, O., Natroshvili, D.*: Mathematical modelling and analysis of interaction problems for metallic-piezoelectric composite structures with regard to thermal stresses
- 2006/009 *Merkle, C., Rohde, C.*: The Sharp-Interface Approach for Fluids with Phase Change: Riemann Problems and Ghost Fluid Techniques
- 2006/010 *Sändig, A.-M.*: Regularity results for linear elliptic boundary value problems in polygons. Lectures at the Charles University Prague, Oct.05
- 2006/011 *Flemisch, B., Kurz, S., Wohlmuth, B.*: A Framework for Maxwell's Equations in Non-Inertial Frames Based on Differential Forms
- 2006/012 *Sändig, A.-M.*: Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen. Vorlesung im Sommersemester 2006