Universität Stuttgart

Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker II, SS 2007

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Berichte aus dem Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation

Vorlesungsskript 2007/013

Universität Stuttgart

Vorlesung Mathematik für Informatiker
und Softwaretechniker II, SS 2007

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Berichte aus dem Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation

Vorlesungsskript 2007/013

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)
Fakultät Mathematik und Physik
Fachbereich Mathematik
Pfaffenwaldring 57
D-70 569 Stuttgart

E-Mail: ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de
WWW: http://preprints.ians.uni-stuttgart.de

ISSN **1611-4176**

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In diesem Skript ist der Stoff des 2. Semesters der Vorlesung *Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker*, die ich im Sommersemester 2007 an der Universität Stuttgart gehalten habe, zu finden. Die Vorlesung wurde in 2 Blöcke von jeweils 8 und 5 Wochen unterteilt, deren Inhalte in den Kapiteln 4 und 5 dargelegt sind.

Kapitel 4 befasst sich mit der Differential- und Integralrechnung von reellen Funktionen einer und mehrerer reellen Variablen. Es beginnt mit der Einführung des Ableitungsbegriffes einer Funktion einer Variablen. Es schliessen sich die Herleitung der entsprechenden Differentations-regeln, Differentation von Funktionenfolgen und Funktionenreihen sowie die Behandlung lokaler Extrema an. Einen zentralen Platz nehmen Taylor-Entwicklungen ein. Dieser Abschnitt endet mit der Diskussion des Newton-Verfahrens. In dem folgenden Abschnitt wird die Integration einer Funktion einer reellen Variablen behandelt. Dabei steht das Cauchy-Integral im Vordergrund. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung wird bewiesen, Integrationsregeln hergeleitet und uneigentliche Integrale eingeführt. Einige Anwendungen der Integralrechnung in der Geometrie sowie in den Natur- und Ingenieurwissenschaften werden diskutiert.
Im zweiten Teil dieses Kapitels sind Differential-und Integralrechnung für Funktionen und Felder mehrerer Variablen zu finden. Es werden zunächst Ableitungsbegriffe (partielle, Richtungs- und totale Ableitungen) definiert und deren Zusammenhang untersucht. Nach Einführung höherer partieller Ableitungen werden Taylor-Entwicklungen diskutiert. Anwendungsbeispiele sind die Berechnung lokaler Extremwerte, auch unter Nebenbedingungen, sowie die Beschreibung von Koordinaten-Transformationen mit entsprechenden Funktionaldeterminanten. Bei der Integration von Funktionen mehrerer Variabler starten wir mit der Einführung parameterabhängiger Integrale und definieren Normalbereiche. Darauf aufbauend werden mehrfach iterierte Integrale behandelt.

Im **5. Kapitel** werden Differentialgleichungen für Funktionen und Felder einer reellen Variablen (gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme) untersucht. Zunächst werden einige elementar lösbare gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung diskutiert. Danach werden Existenz-und Eindeutigkeitssätze (Satz von Picard-Lindelöf, Satz von Peano) behandelt. Die Lösungstheorie für lineare Differentialgleichungssysteme sowie für lineare Gleichungen höherer Ordnung steht im letzten Abschnitt der Vorlesung im Vordergrund.

Herr PD Dr. Hannes Uecker war für die begleitenden zweistündigen Gruppenübungen verantwortlich. Er hat wesentlichen Anteil an der Zusammenstellung der Übungsaufgaben. Ich möchte mich bei ihm für die konstruktive Zusammenarbeit bedanken.

Anna-Margarete Sändig — Stuttgart, im August 2007

Kapitel 4

Analysis II (Differential- und Integralrechnung)

Der Begriff der Ableitung einer Funktion f ist ein zentraler Begriff in der Analysis. Er beschreibt die Änderung eines Funktionswertes $f(x)$ in Bezug auf die Änderung der Variablen x. Kennt man dieses Steigungsmaß bzw. den Anstieg der Funktion f in einem Punkt, dann kann man sie genauer darstellen. Dies ist durch Kurvendiskussion wohl bekannt, bei welcher Extremwerte, Steigungs- und Krümmungsverhalten eine Rolle spielen. Darüber hinaus beschreiben Ableitungen praktische relevante Größen wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Wachstumsraten, Verlustquoten. Die Integration ist die inverse Operation zur Differentiation. Dies wird durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beschrieben. Mit Hilfe bestimmter Integrale können z. B. Flächen, Volumina, Länge von Kurven, Schwerpunkte, Energien und Trägheitsmomente berechnet werden.
Die Differential- und Integralrechnung geht auf Isaac Newton (1643 - 1727) und Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646 - 1716) zurück.
Wir werden in diesem Kapitel mit der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Variablen beginnen und diese danach für Funktionen mehrerer Variablen behandeln. Neben den mathematischen Grundbegriffen und einigen wichtigen Sätzen werden Anwendungsbeispiele betrachtet.
Als Literatur wird empfohlen: [2, Kapitel 10], [4, Kapitel 15,16], [3, Kapitel 12-16], [5, Kapitel 3,4,6,7], [6, Kapitel 3,4,7,8].

4.1 Differentiation von Funktionen einer reellen Variablen

Wir betrachten zunächst reelle Funktionen f einer reellen Variablen,

$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Wenn nichts anderes vereinbart wird, sei der Definitionsbereich D eine offene Menge. Wir definieren, was wir unter einem Differenzenquotienten bzw. Differentialquotienten in einem

Punkt $x_0 \in D$ verstehen.

Definition 4.1.

(i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta x} &: D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}, \\ x &\to \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

heißt Differenzenquotient.

(ii) f ist differenzierbar in x_0, falls der Funktionenlimes

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{4.2}$$

existiert. $\frac{df}{dx}(x_0)$ heißt Differentialquotient im Punkt x_0.

Remark 4.2. Die Existenz des Funktionenlimes (4.2) ist gleichbedeutend damit, dass für jede Folge $x_n \to x_0$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ der gleiche Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \tag{4.3}$$

existiert.

Weiterhin definieren wir:

Definition 4.3.

(iii) f ist differenzierbar in D genau dann, wenn f in allen Punkten $x \in D$ differenzierbar ist.

(iv) f ist stetig differenzierbar in D genau dann, wenn f' stetig in allen Punkten von D ist, d. h. für ein beliebiges $x_0 \in D$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f'(x) = f'(x_0). \tag{4.4}$$

Theorem 4.4. *Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Es ist

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}(x - x_0)$$

und daher (siehe Abschnitt 3.2 und Satz 3.12, [7])

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Die Umkehrung dieses Satzes ist i. Allg. falsch, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = |x|$ im Nullpunkt.

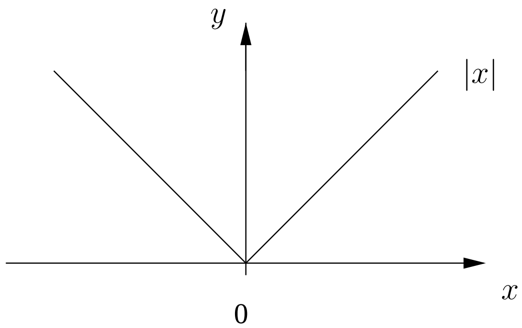


Abbildung 4.1: Graph der Funktion $f(x) = |x|$.

Es ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|-0}{x-0} = 1.$$

Die im Nullpunkt stetige Funktion $f(x) = |x|$ ist also dort nicht differenzierbar.

Um auch Knickstellen in Bezug auf die Differenzierbarkeit zu beschreiben und auch die Ableitungen in den Endpunkten eines abgeschlossenen Intervalls zu erfassen, wird der Begriff der links- und rechtsseitigen Ableitung eingeführt.

Definition 4.5. Unter der linksseitigen Ableitung verstehen wir den Grenzwert

$$f'(x_0-) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}; \tag{4.5}$$

unter der rechtsseitigen Ableitung den Grenzwert

$$f'(x_0+) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{4.6}$$

Remark 4.6. Ist f differenzierbar in x_0, dann stimmen links- und rechtsseitige Ableitungen überein. Im Beispiel $f(x) = |x|$ ist $f'(0-) = -1$ und $f'(0+) = 1$, also ist diese Funktion nicht im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin x$ mit $D = \mathbb{R}$. Der Differenzenquotient lautet für ein $x_0 \in D$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \frac{2}{x - x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \\
&= \frac{2}{x - x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \left(\frac{x - x_0}{2} - \left(\frac{x - x_0}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} \pm \dots\right) \\
&= \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \left(\underbrace{1 - \left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} \pm \dots}_{s(x)}\right).
\end{aligned}$$

Es ist $\lim_{x \to x_0} s(x) = 1$ und daher

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \cos x_0 = f'(x_0).$$

Also ist $(\sin x)' = \cos x$.

Wir sehen uns jetzt ein Beispiel aus der Physik an. Die Momentangeschwindigkeit bei einer geradlinigen Bewegung ist als

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

definiert, wobei $s(t)$ der zum Zeitpunkt t zurückgelegte Weg ist und t_0 die momentane Zeit beschreibt. $v(t_0)$ wird auf dem Tachometer eines Autos abgelesen.
Die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt t_0 ist durch

$$b(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

definiert.
Lassen wir einen Stein in einen Brunnen fallen, so wird $s(t)$ als

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2, \quad g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

angenommen. Die Momentangeschwindigkeit ist

$$v(t_0) = g t_0 \left[\frac{m}{s}\right]. \tag{4.7}$$

Wollen wir die Geschwindigkeit in 10 m Tiefe berechnen, so wird t_0 so gewählt, dass

$$s(t_0) = 10 = \frac{g}{2} t^2 \ [m]$$

ist, d. h. $t_0 = \sqrt{\frac{20}{g}}$ $[s]$. Die Formel (4.7) liefert uns die Geschwindigkeit mit der ein Stein in einem 10 m tiefen Brunnen auftrifft:

$$v\left(\sqrt{\frac{20}{g}}\right) = g\sqrt{\frac{20}{g}} = \sqrt{20g} \approx 14 \left[\frac{m}{s}\right].$$

Geometrische Interpretation der Ableitung

Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

beschreibt den Anstieg der Sekante s, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$ geht, während der Differentialquotient

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Steigung der Tangente t an die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ beschreibt.

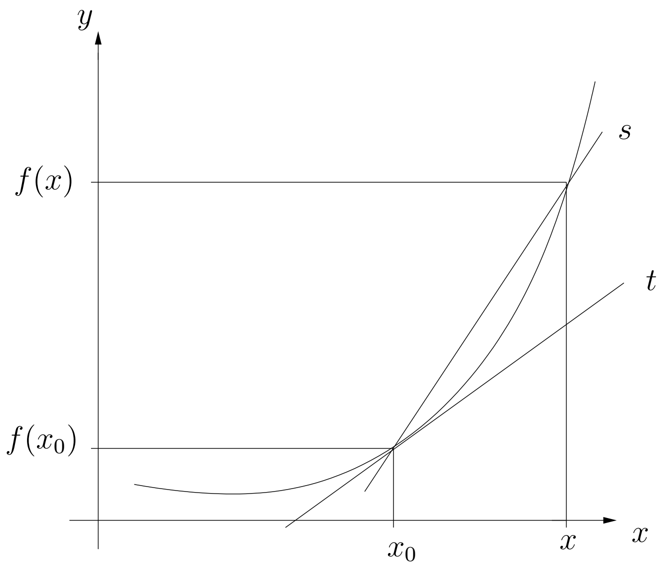


Abbildung 4.2: Tangente t und Sekante s

Differentiationsregeln

Die folgenden Differentiationsregeln gelten:

Theorem 4.7. *Seien f und g zwei im Gebiet $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbare reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten für $x_0 \in D$:*

(i) Linearität der Differentiation:

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0), \tag{4.8}$$

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \tag{4.9}$$

(ii) Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \tag{4.10}$$

(iii) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \; g(x_0) \neq 0, \tag{4.11}$$

(iv) Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x_0) = f(g(x_0))' = f'(g(x_0))g'(x_0), \tag{4.12}$$

(v) Sei $f : D \to \mathbb{R}$, streng monoton wachsend und $f^{-1} : f(D) \to D$ sei die Umkehrfunktion. Ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{4.13}$$

Beweis. Die Aussagen (4.8), (4.9) und (4.10) folgen aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten, siehe Satz 3.12 [7]. Wir zeigen (4.12) und (4.13). Der Beweis der Quotientenregel wird als Übung empfohlen.
Wir beginnen mit der Kettenregel. Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{\left(f(g(x)) - f(g(x_0))\right)\left(g(x) - g(x_0)\right)}{\left(g(x) - g(x_0)\right)(x - x_0)}.
\end{aligned}$$

Durch Grenzwertbildung $x \to x_0$ und durch Ausnutzen der Stetigkeit von g, $g(x) \to g(x_0)$, erhalten wir

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Wir sehen uns die Differentiation der Umkehrfunktion an. Wir haben

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \overset{y=f(x)}{=} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Da aus der strengen Monotonie von f folgt ([7, Satz 3.53]) , dass f^{-1} stetig ist und somit aus $y \to y_0$ die Konvergenz von $f^{-1}(y) = x \to f^{-1}(y_0) = x_0$ gesichert ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.
\end{aligned}$$

□

Beispiele

1° Es sei $f : D \to D$, $D = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, $f(x) = x^n = y$. Die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ ist wohl definiert. Wir bilden die Ableitung von f^{-1}:

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{(\frac{1}{n}-1)}.$$

2° Wir betrachten $f(x) = e^x = y$ und die Umkehrfunktion $f^{-1} = \ln y$. Die Ableitung der Logarithmusfunktion lautet:

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{de^x}{dx}} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

3° Es sei $f(x) = \sqrt{x^2+1} = h \circ g(x)$ mit $h(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = x^2 + 1 = y$. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Remark 4.8. Für komplexe Funktionen einer komplexen Variablen $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind der Differenzen- und Differentialquotient analog zu (4.1) und (4.2) definiert. Damit ist die Ableitung von f im Punkt z_0

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Hierbei ist der Grenzwert so zu verstehen, dass z auf beliebigem Weg in der komplexen Ebene zu z_0 konvergiert.

Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion f in D stetig differenzierbar, so kann man nach der Ableitung von f' fragen. Allgemein werden höhere Ableitungen wie folgt eingeführt.

Definition 4.9. Sei D eine offene Menge reeller Zahlen.

(i) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt im Punkt $x_0 \in D$ k-mal differenzierbar, falls f in einer Umgebung $U(x_0) \subset D$ $(k-1)$-mal stetig differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f im Punkt x_0 differenzierbar ist:

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) := \frac{d}{dx}\left(f^{(k-1)}\right)(x_0).$$

(ii) f ist auf D k-mal stetig differenzierbar, falls f k-mal differenzierbar auf D und $f^{(k)}$ stetig auf D ist.

Remark 4.10. Folgende Bezeichnungen sind gebräuchlich:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad f^{(3)} = f'''.$$

Die in Satz 4.7 eingeführten Rechenregeln gelten entsprechend für höhere Ableitungen. Insbesondere gilt die Leibnizregel

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Hierbei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der Binomialkoeffizient.

Differentiation von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wir hatten die Ableitung der Funktion $f(x) = \sin x$ berechnet. Es tritt die Frage auf, ob wir $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ gliedweise differenzieren können und somit $(\sin x)' = \cos x$ sofort erhalten. Diese Frage kann man beantworten, indem man untersucht, wann man Funktionenfolgen bzw. -reihen gliedweise differenzieren, bzw. Differentiation und Grenzwertbildung vertauschen kann.

Theorem 4.11. *Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Elemente auf $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind, konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f. Die Funktionen f_n seien auf $[a,b]$ stetig differenzierbar und die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen die Grenzfunktion g. Dann ist die Grenzfunktion f differenzierbar und es gilt $f' = g$.*
Kurz: Limesbildung und Ableitung sind unter diesen Voraussetzungen vertauschbar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{4.14}$$

Conclusion 4.12. Sind $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergent, dann ist $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n. \tag{4.15}$$

Im Beweis des Satzes 4.11 wird der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung verwendet. Wir holen ihn später nach (siehe Bemerkung 4.59). Wenn die Folge der Ableitungen nicht gleichmäßig konvergiert, findet man Gegenbeispiele zu (4.14).

Beispiel:

Wir betrachten die Funktionenfolge $\left(f_n = \frac{x^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Intervall $[0,1]$. Da $\left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0.$$

Die Folge der Ableitungen

$$(f_n')_{n\in\mathbb{N}} = (x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert gegen die Funktion g punktweise

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1), \\ 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

aber nicht gleichmäßig. Es ist $f'(x) \equiv 0 \neq g(x)$.

Ableitung von Potenzreihen

Potenzreihen sind spezielle Funktionenreihen, auf die Satz 4.11 bzw. Folgerung 4.12 anwendbar sind.

Theorem 4.13. *Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ und $0 < \rho < R$. Dann kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ in $|x-x_0| \leq \rho$ gliedweise differenziert werden. Kurz formuliert: Potenzreihen können im Innern des Konvergenzkreises beliebig oft gliedweise differenziert werden.*

Beweis. In Satz 3.48, 3. Punkt [7] wurde gezeigt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ gleichmäßig für $|x-x_0| \leq \rho$ konvergiert. Da die gliedweise abgeleitete Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

auch den Konvergenzradius

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n n}{a_{n+1}(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

besitzt, konvergiert diese ebenfalls gleichmäßig in $|x-x_0| \leq \rho$. Aus Satz 4.11 folgt die Behauptung. □

Beispiel:

Man berechne die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ für $|x| < 1$. Da

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

ist, erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2.$$

Lokale Extrema und Mittelwertsätze

Wir definieren zunächst, was wir unter lokalen Extremwerten (Maxima und Minima) verstehen.

Definition 4.14. Sei D eine offene Menge. Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein lokales Minimum genau dann, wenn

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in K_\varepsilon(x_0)\ :\ f(x) \geq f(x_0).$$

Die Funktion f besitzt in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum genau dann wenn

$$\exists\, \varepsilon > 0\ \forall x \in K_\varepsilon(x_0)\ :\ f(x) \leq f(x_0).$$

Das lokale Extremum (Maximum oder Minimum) heißt strikt oder isoliert, falls
$f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ gilt.
Falls für alle $x \in D$

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{oder} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

gilt, dann liegt ein globaler Extremwert vor.

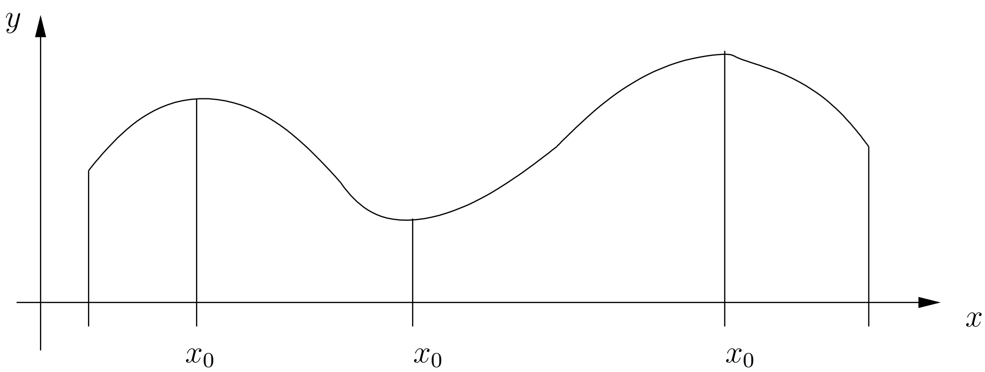


Abbildung 4.3: Lokale Extremwerte x_0

Theorem 4.15. *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und D sei offen. f sei differenzierbar in $x_0 \in D$ und habe dort ein lokales Extremum. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Für $0 < h < \varepsilon$ gilt für ein

$$\text{Maximum:} \quad 0 \leq \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0;$$

$$\text{Minimum:} \quad 0 \geq \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, folgt für ein Maximum

$$0 \leq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Daher ist $f'(x_0) = 0$.
Analog gehen wir beim Minimum vor. $\square$

Theorem 4.16 (Satz von Rolle (1652 - 1719))**.** *Sei f stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b) und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Beweis.

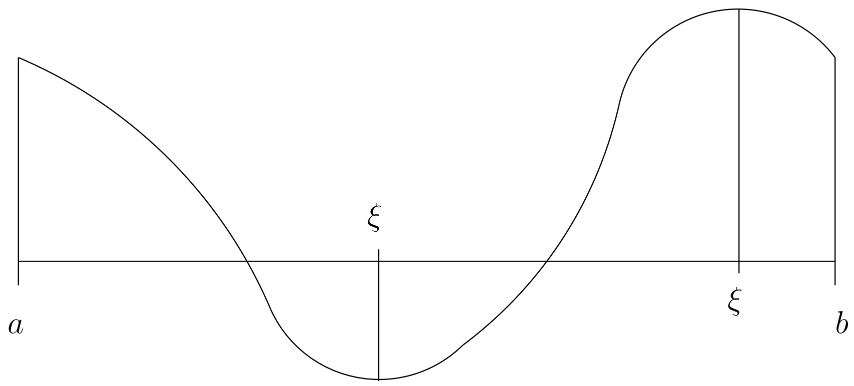


Abbildung 4.4: Lage von Zwischenstellen

Stetige Funktionen auf $[a, b]$ nehmen dort ihr Maximum und Minimum an, d. h. es existieren $\eta, \xi \in [a, b]$ mit

$$f(\eta) = \min_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(\xi) = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $f(\eta) = f(\xi)$. Dann ist $f(x) = \text{const}$ und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

2. $f(\eta) < f(\xi)$ und $f(a) = f(b) < f(\xi)$. Dann ist $\xi \in (a, b)$ und $f'(\xi) = 0$ nach Satz 4.15.

3. $f(\eta) < f(\xi)$ und $f(a) = f(b) > f(\eta)$. Dann ist $\eta \in (a, b)$ und $f'(\eta) = 0$ nach Satz 4.15.

$\square$

Mit Hilfe des Satzes von Rolle kann man folgende Mittelwertsätze der Differentialrechnung beweisen.

Theorem 4.17 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Sei f stetig in $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b). Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi). \tag{4.16}$$

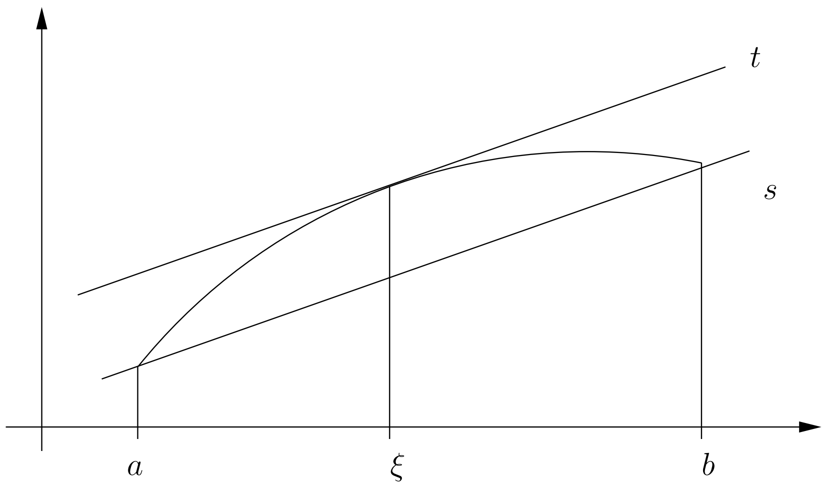


Abbildung 4.5: Tangente t in $(\xi, f(\xi))$ ist parallel zur Sekante s

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

die den Voraussetzungen des Satzes von Rolle genügt. Daher existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

und (4.16) folgt. □

Theorem 4.18 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.**
Seien f und g stetig in $[a,b]$, differenzierbar in (a,b) und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis. Man wende den Satz von Rolle auf die Funktion

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

an. □

Die Mittelwertformeln lassen Schlussfolgerungen über Monotonie und über Extremwerte von Funktionen zu, die u. a. bei Kurvendiskussionen eine Rolle spielen. Wir betrachten hier die l'Hospitalschen Regeln als weitere Anwendung.

Regeln von de l'Hospital (1661 - 1704)

Theorem 4.19. *Seien f und g in $(a,b]$ differenzierbar und*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = 0.$$

Weiterhin sei $g'(x) \neq 0$ auf $(a,b]$. Es gilt:

$$\textit{Existiert } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c, \textit{ dann ist } \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis. $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich durch $f(a) := 0$, $g(a) := 0$ zu stetigen Funktionen auf $[a,b]$ fortsetzen und genügen dann den Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes. Da $f(a) = g(a) = 0$ ist, gilt für ein $x \in (a,b]$, dass ein $\xi = \xi(x) \in (a,x)$ existiert, so dass gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Wir erhalten für den rechtsseitigen Grenzwert $x \to a+0$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{\xi\to a\\ \xi>a}} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Existiert $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, dann haben wir dem Ausdruck $\frac{0}{0} = \frac{f(a)}{g(a)}$ einen Sinn gegeben. In dieser Weise können auch Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. $0 \cdot \infty$ behandelt werden, indem man zu den Kehrwerten übergeht.

Conclusion 4.20. Ist $g'(a) = 0$ und existiert der Grenzwert $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nicht, dann können die obigen Überlegungen für f und g auf f' und g' übertragen werden. Allgemein kann formuliert werden:
Regeln von de l'Hospital:
Seien f und g in (a,b) m-mal stetig differenzierbare Funktionen und $x_0 \in (a,b)$. Falls

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f'(x_0) = \cdots = f^{(m-1)}(x_0) = 0, \\ g(x_0) &= g'(x_0) = \cdots = g^{(m-1)}(x_0) = 0, \\ g^m(x_0) &\neq 0, \end{aligned}$$

dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{g^{(m)}(x_0)}. \tag{4.17}$$

Satz von Taylor

Wir sehen uns noch einmal die Formel (4.16) an und setzen $b = x$, $a = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(\xi).$$

Wir bemerken, dass wir den Funktionswert $f(x)$ durch einen benachbarten Funktionswert $f(x_0)$, korrigiert durch $(x - x_0)f'(\xi)$, darstellen können. Setzen wir näherungsweise $\xi = x_0$ erhalten wir eine Approximation von $f(x)$ durch ein Polynom ersten Grades

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Dieses Polynom wird als Taylorpolynom ersten Grades bezeichnet. Folgende Fragen treten auf: Wie groß ist der Fehler? Wie dicht müssen x und x_0 liegen, um mit dieser Approximation von $f(x)$ zufrieden zu sein? Diese Fragen werden durch den Satz von Taylor beantwortet.

Wir führen das n-te Taylorpolynom T_n für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f ein. Das Taylorpolynom T_n approximiert die Funktion f in einer Umgebung eines Punktes x_0 und es hat die Eigenschaft, dass gilt

$$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0) \quad \text{für } 0 \le k \le n.$$

Lemma 4.21. *Sei f n-mal stetig differenzierbar im Intervall (a, b) und $x_0 \in (a, b)$. Es gibt genau ein Polynom T_n n-ten Grades, so dass gilt*

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \textit{für } 0 \le k \le n. \tag{4.18}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \qquad (4.19)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Beweis. Wir überlegen, dass Polynome mit der Eigenschaft (4.18) eindeutig bestimmt sind. Dazu nehmen wir an, dass P und Q Polynome n-ten Grades mit $P^{(k)}(x_0) = Q^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $0 \le k \le n$, sind. Für die Differenz gilt

$$\begin{aligned} D(x) = P(x) - Q(x) &= \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \\ &= b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \\ D^{(k)}(x_0) &= 0 \quad \text{für } 0 \le k \le n. \end{aligned}$$

Damit ist $D^{(n)}(x_0) = n! b_n = 0$, also $b_n = 0$. Ebenso ist $D^{(n-1)}(x_0) = (n-1)! b_{n-1} = 0$, woraus $b_{n-1} = 0$ folgt. Durch Fortsetzen dieser Folgerung erhalten wir schließlich

$$D(x_0) = b_0 = 0.$$

Folglich ist $D(x) \equiv 0$ in (a, b).
Das Polynom (4.19) hat die Eigenschaft (4.18) und ist eindeutig bestimmt. □

Theorem 4.22 (Satz von Taylor)**.** (B. Taylor; 1685 - 1731, Schüler von Newton).
Sei f eine $(n+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion auf (a,b), $x, x_0 \in (a,b)$. Dann existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ bzw. $\xi \in (x, x_0)$, so dass gilt

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{4.20}$$

Der Ausdruck $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = R_n(x)$ heißt Lagrangesches Restglied.

Beweis. Wir betrachten ein festes x und ein variables t und setzen

$$\begin{aligned} F(t) :=& f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}}{n!}(x-t)^n, \\ G(t) :=& \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Es ist

$$F(x_0) = f(x) - T_n(x), \quad F(x) = G(x) = 0. \tag{4.21}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h)-F(t)}{h} \overset{(h=\hat{t}-t)}{=} \lim_{\hat{t}\to t} \frac{F(\hat{t})-F(t)}{\hat{t}-t} \\ &= -f'(t) - f''(t)(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ &\quad + f'(t) + f''(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!} n(x-t)^{n-1} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \\ G'(t) &= -\frac{(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz 4.18 auf die Funktionen F und G im Intervall $[x_0, x]$ an: Dieser Mittelwertsatz besagt, dass ein $\xi \in (x_0, x)$ existiert, so dass gilt

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} \overset{(4.21)}{=} \frac{F(x_0)}{G(x_0)} \overset{(4.21)}{=} \frac{f(x)-T_n(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Da $\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{(x-\xi)^n} = f^{(n+1)}(\xi)$ ist, erhalten wir

$$f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = f(x) - T_n(x),$$

woraus (4.20) folgt. □

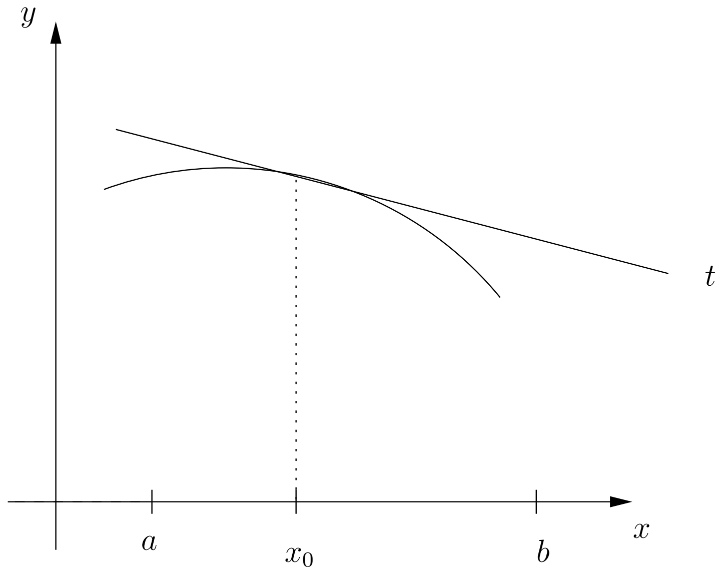


Abbildung 4.6: t ist der Graph von T_1

Remark 4.23. Für $n = 0$ geht (4.20) in den Mittelwertsatz 4.16 über. Der Graph des Taylorpolynoms $T_1(x)$ ist die Tangente an den Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$.

Die Größe des Restgliedes bestimmt die Güte der Approximation der Funktion durch das entsprechende Taylorpolynom.

Beispiele

1° Es sei $f(x) = e^x, x_0 = 0$. Dann ist in $[0, 1]$ für ein $\xi \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} e^x = f(x) &= T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

und

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \quad \text{für } x \in [0, 1].$$

Soll z. B. $e^1 = e$ mit einem zulässigen Fehler von 10^{-5} berechnet werden, so fordern wir, dass n so zu wählen ist, dass

$$|e^1 - T_n(1)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

ist. Es folgt $n \geq 8$, d. h. $T_8(1)$ unterscheidet sich von e^1 um höchstens 10^{-5}.

2° Es sei $f(x) = \sin x, x_0 = 0$. Dann ist in $[0, x]$

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= 0 + x - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots + \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{für ein } \xi \in (0, x).\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$|\sin x - T_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Um zu charakterisieren, wie sich das Restglied verhält, kann man auch folgende Darstellung verwenden:

$$f(x) = T_n(x) + r(x)(x - x_0)^n. \tag{4.22}$$

Lemma 4.24. *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gibt es eine stetige Funktion $r : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $r(x_0) = 0$, so dass (4.22) gilt.*

Beweis. Es ist

$$r(x) = \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)}{(n+1)!}.$$

Daher ist

$$\lim_{x \to x_0} r(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) \cdot 0}{(n+1)!} = 0.$$

□

Wie stark $r(x)$ zu 0 konvergiert, kann mit Hilfe der Landauschen Ordnungssymbole beschrieben werden.

Definition 4.25 (Landausche Ordnungssymbole). Seien f und g zwei Funktionen, die in einer „punktweisen“ Umgebung von x_0 definiert sind.

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0, \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{4.23}$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to x_0, \quad \text{genau dann, wenn} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \tag{4.24}$$

Sprich: f ist „Groß O“ von g in x_0, bzw. f ist „Klein o“ von g in x_0.

Remarks 4.26.

- Ist $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, dann gilt $f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0$.
- Ist $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, dann bedeutet (4.23), dass $f(x)$ für $x \to x_0$ schneller gegen 0 konvergieren muss als $g(x)$, wohingegen (4.24) besagt, dass f und g von gleicher Größenordnung gegen 0 konvergieren, falls $c \neq 0$ ist.

- Die Formel (4.22) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n). \tag{4.25}$$

Beispiele

1° Wir betrachten $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x^2$. Es ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

d. h. $f(x)$ und $g(x)$ verschwinden von gleicher Größenordnung im Nullpunkt

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \to 0.$$

2° Sei $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \sin x$. Dann ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

d. h. $f(x) = o(g(x))$ für $x \to 0$.

Die Landauschen Ordnungssymbole werden in der Informatik benutzt, um Algorithmen im Hinblick auf den Speicherbedarf oder das Laufzeitverhalten zu vergleichen. Das Wachstumsverhalten zweier Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ wird dabei folgendermaßen verglichen:

$$(a_n) = O(b_n) \iff \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante } c, \text{ so dass } \frac{|a_n|}{|b_n|} \le c \text{ für alle } n,$$

$$(a_n) = o(b_n) \iff \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0.$$

Beispiel

Polynomiale Ausdrücke verhalten sich für $n \to \infty$ wie die höchste Potenz:

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k = O(n^k).$$

Remark 4.27.
Typisches Wachstumsverhalten [2, S.277] werden durch Groß O-Vergleiche beschrieben:
$O(1)$ - konstante Geschwindigkeit,
$O(\ln n)$ - logarithmisches Wachsen,
$O(n)$ - lineares Wachsen,
$O(n \ln n)$ - Wachstum wie $n \ln n$,
$O(n^2)$ - quadratisches Wachsen,
$O(n^k)$ - polynomiales Wachsen,
$O(a^n)$ - exponentielles Wachsen.

Taylorreihe

Bisher haben wir die lokale Approximation einer differenzierbaren Funktion in einem Punkt x_0 durch ein Taylorpolynom untersucht. Wir sehen uns jetzt an, was für $n \to \infty$ passiert und ob die Funktion in diesem Fall durch eine Taylorreihe dargestellt wird.

Definition 4.28. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei unendlich oft differenzierbar. Dann heißt

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \tag{4.26}$$

für $x, x_0 \in (a, b)$ Taylorreihe zu f um x_0.

Beispiel

1° Die Taylorreihe von e^x um $x_0 = 0$ lautet

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Es ist offensichtlich $e^x = T(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2° Sei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar. Wir sehen uns die Taylorreihe im Nullpunkt 0 an. Es ist

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

da

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^{-2}}{e^{\frac{1}{x}}} \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2x^{-1}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2x^{-2}}{x^{-2} e^{\frac{1}{x}}} = 0. \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n ist. Daher ist

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} \equiv 0$$

und $T(x) \neq f(x)$ für $x > 0$.

Wir haben also das überraschende Ergebnis erhalten, dass nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion durch ihre Taylorreihe lokal darstellbar ist. Wir charakterisieren jetzt die Funktionen, die lokal, d.h. in einer Umgebung eines Punktes x_0, durch ihre Taylorreihe dargestellt werden.

Theorem 4.29. *Sei f im Punkt x_0 beliebig oft differenzierbar. f ist in x_0 im Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ in eine Taylorreihe genau dann entwickelbar, wenn*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_n(x)) = 0 \ \text{\textit{für alle}}\ x \in (x_0 - r, x_0 + r) \tag{4.27}$$

gilt.

Beweis. Es ist $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ genau dann, wenn (4.27) gilt. □

Wir sehen uns das 2. Beispiel an. Da

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - T_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x) \neq 0 \quad \text{für } x > 0,$$

gibt es keine Umgebung des Nullpunktes in der (4.27) gilt.

Eine Anwendung: Das Newton-Verfahren zur Nullstellenberechnung von Funktionen

Lokale Approximationen von Funktionen durch Polynome werden z. B. bei der Nullstellenbestimmung nichtlinearer Funktionen genutzt.
Gegeben sei im Intervall $[a, b]$ eine stetige, differenzierbare Funktion f. Gesucht sind die Nullstellen dieser Funktion im Intervall $[a, b]$. Wir nehmen an, dass eine Nullstelle x_0 näherungsweise bekannt ist. Dieser Startwert wird mit x_0 bezeichnet. Beim Newton-Verfahren ersetzen wir die Funktion f durch die in $(x_0, f(x_0))$ tangierende Gerade T_1 und bringen diese mit der x-Achse zum Schnitt.

Der Schnittpunkt x_1 dient als neue Näherung, siehe Abbildung 4.7.
Es ist

$$\tan\alpha = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},$$

woraus

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

folgt. Nehmen wir x_1 als neue Ausgangslösung und wiederholen das Vorgehen, dann erhalten wir schließlich ein Iterationsverfahren

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Definition 4.30. Ein Verfahren konvergiert gegen x von der Ordnung m, falls ein $c > 0$ existiert, so dass

$$|x_{n+1} - x| \leq c|x_n - x|^m.$$

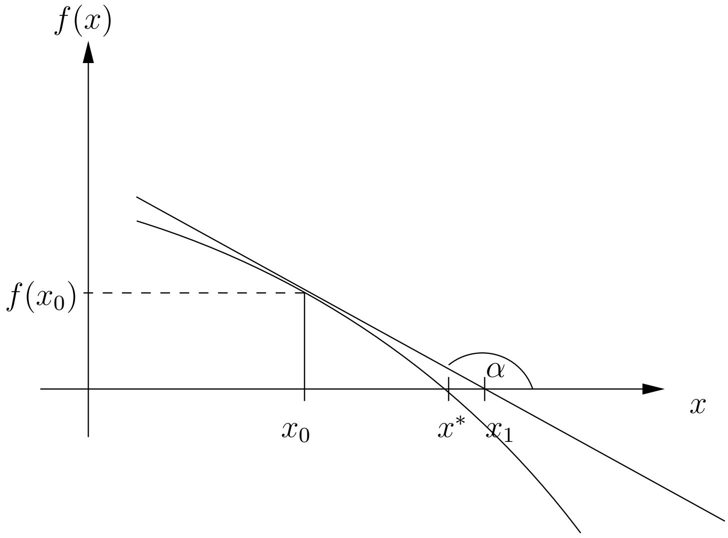


Abbildung 4.7: Newton-Verfahren

Theorem 4.31. *Sei f in $[a,b]$ dreimal stetig differenzierbar, $x^* \in (a,b)$ eine Nullstelle von f, d.h. $f(x^*) = 0$. Weiterhin sei $f'(x) \neq 0$ in einem Intervall um x^*. Dann gibt es eine Umgebung $U_\delta(x^*)$ in der das Newton-Verfahren*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

quadratisch konvergiert.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Es gilt $F(x^*) = x^*$ genau dann, wenn $f(x^*) = 0$ ist. Es ist

$$F'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

und damit

$$F'(x^*) = f(x^*)\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0. \tag{4.28}$$

Wir stellen F um x^* als Taylorpolynom 1. Ordnung mit Restglied dar:

$$\begin{aligned} |F(x_n) - F(x^*)| = |x_{n+1} - x^*| &= \left| F'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{F''(\xi)(x_n - x^*)^2}{2} \right| \\ &\overset{(4.28)}{=} \left| \frac{F''(\xi)(x_n - x^*)^2}{2!} \right| \leq c|x_n - x^*|^2, \end{aligned} \tag{4.29}$$

wobei $c = \frac{1}{2!} \max_{\xi \in U_\delta(x^*)} |F''(\xi)|$ ist.
An dieser Stelle haben wir benutzt, dass F zweimal stetig differenzierbar ist, da f dreimal stetig differenzierbar ist. Aus (4.29) folgt

$$|x_{n+1} - x^*| \le c|x_n - x^*|^2 \le cc^2|x_{n-1} - x^*|^4 \le \cdots \le c^{2n-1}|x_0 - x^*|^{2n}.$$

Es hängt also von der Größe von c bzw. der Lage von x_0 ab, ob und wie schnell das Newtonverfahren konvergiert. □

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.1
Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, welche dieser Funktionen an der Stelle 0 stetig sind und welche dort differenzierbar sind. Skizzieren Sie f_0, f_1 und f_2.

Aufgabe 16.2
Berechnen Sie folgende Reihen:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$,
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(e^{-k})^2$

Hinweis: Gliedweise Differentiation von Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises.

Aufgabe 16.3
Bestimmen Sie jeweils alle $x \in D$, in denen die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

1. $D = \mathbb{R}\,, \quad f(x) = |x^2 - 4|^3$
2. $D = (0, \infty)\,, \quad f(x) = x^{(x^x)}$
3. $D = [0, 1)\,, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x)\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

In Teil **c)** sei $g : (0, 1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

Aufgabe 16.4
Berechnen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Grenzwerte

$$\lim_{x \to \infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to a} \frac{x^\delta - a^\delta}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0\,,\ \beta \neq 0)\,.$$

Aufgabe 16.5
Bestimmen Sie, an welchen Stellen die auf $[0, \infty)$ definierten Funktionen

$$f_n(x) = x^n e^{-x}, \quad n \in \mathbb{N},$$

lokale Extrema haben. Geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt, und ermitteln Sie die Funktionswerte an den entsprechenden Stellen. Liegen auch globale Extrema vor? Skizzieren Sie f_1 und f_2.

Aufgabe 16.6
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) := 1 - \frac{8}{e^{2x} + 4}\,.$$

1. Beweisen Sie, dass f injektiv ist und zeigen Sie $f'(x) = 1 - (f(x))^2$.
2. Berechnen Sie mit Hilfe von **a)** die Ableitung der Umkehrfunktion von f.
3. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von f^{-1} und berechnen Sie damit erneut die Ableitung von f^{-1}.

Aufgabe 16.7
Untersuchen Sie jeweils, ob eine der Regeln von de l'Hospital anwendbar ist, und berechnen Sie den Grenzwert, falls er existiert. Beim Votieren: 3 von 5 reichen.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$ d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) := x + \sin x \cos x$ und $g(x) := f(x) e^{\sin x}$

Aufgabe 16.8

1. Berechnen Sie die Ableitung von Arcosh : $[1, \infty) \to [0, \infty)$ und zeigen Sie

$$\text{Arcosh} x = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr) \quad \text{für alle} \quad x \geq 1.$$

   Hinweis: $f'(x) = g'(x)$ für alle x impliziert $f(x) = g(x) + c$ mit einem $c \in \mathbb{R}$.

2. Mittels Leibniz Regel berechne man $f^{(10)}$ für $f(x) = x \sin(x)$.

Aufgabe 16.9
Für $f(x) = \sin(2x)$ bestimme man $T_1, \ldots T_5$ an $x_0 = 0$ und skizziere f und $T_1, \ldots, T_3$ auf $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Aufgabe 16.10
Für $f(x) = (\sin x)^2$ bestimme man das Taylor Polynom T_3 dritter Ordnung an $x = 0$ und zeige für R_3 die Abschätzung $|R_3(x)| \leq 1/48$ für $x \in [0, 1/2]$.

Aufgabe 16.11
Man bestimme die Taylorreihen der Funktionen $f(x) = \ln x$ um $x_0 = 1$ und $g(x) = \ln(1 + x)$ um $x_0 = 0$.
Zusatzfrage (ohne Wertung): Für welche x konvergieren die jeweiligen Reihen?

Aufgabe 16.12 Zu den unten gegebenen Funktionen f und Stellen x_0 bestimme man jeweils $n \in \mathbb{N}$ sodass $f(x) = O((x - x_0)^n)$ für $x \to x_0$ aber nicht $f(x) = o((x - x_0)^n)$ für $x \to x_0$:
a) $f(x) = x^k$ mit festem $k \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$, b) $f(x) = \frac{\sin(x)-x}{x}$, $x_0 = 0$,
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, $x_0 = 1$.

Aufgabe 16.13
Die Funktion
$$f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$$
hat in $[-1, 0]$ genau eine einfache Nullstelle x^*. a) Zeigen Sie dies. b) Finden Sie mit dem Newtonverfahren zum Startwert $x_0 = -1$ die ersten 3 Approximationen x_1, x_2, x_3 von x^* und geben Sie die ersten 5 Stellen von $f(x_3)$ an.
Hinweise. Zu a): Zwischenwertsatz und Monotonie. Zu b): Natürlich bietet sich das Schreiben eines kleinen Programms an. Zumindest x_1 kann aber auch noch angenehm per Hand berechnet werden.

4.2 Integration von Funktionen einer reellen Variablen

Allgemein kann man sagen [9]: „Integration wird überall dort benötigt, wo ändernde Ursachen sich zu einer Gesamtwirkung summieren“.
So können Flächeninhalte von Bereichen, die durch krummlinige Kurven umschlossen werden, durch Integrale berechnet werden. Dieses Konzept war bereits Archimedes bekannt, der z. B. damit die Fläche einer Kreisscheibe berechnet hat. Eine Fläche lässt sich einfach berechnen, wenn sie aus Rechtecken besteht. Der Rand einer solchen Fläche lässt sich durch „Treppenfunktionen“ darstellen. Die Hauptidee bei der Einführung bestimmter Integrale besteht darin, Flächeninhalte durch Addition von Rechteckflächen zu approximieren und diese durch Grenzwerte unendlicher Reihen zu definieren. Die Art der Grenzwertbildung führt zu verschiedenen Integralbegriffen, die sich dadurch unterscheiden, dass die Menge der jeweils integrierbaren Funktionen umfassender wird. Man unterscheidet zwischen folgenden Begriffen:

1. Das Cauchy-Integral (1823), ein Integral, das für „Regelfunktionen“ definiert ist.
2. Das Riemann-Integral (1826 - 1866), ein Integral, das für eine größere Klasse von Funktionen als der der Regelfunktionen definiert ist.
3. Das Lebesgue-Integral (1902), das für eine sehr große Klasse von Funktionen definiert ist.

Es gilt

$$\begin{aligned}\{\text{Cauchy-integrierbare Funktionen}\} &\subset \{\text{Riemann-integrierbare Funktionen}\}\\ &\subset \{\text{Lebesgue-integrierbare Funktionen}\}.\end{aligned}$$

Wir werden uns hier mit dem Cauchy-Integral ausführlicher beschäftigen.

Das Cauchy-Integral

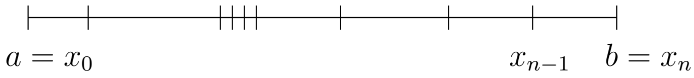
Es sei $D = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Um Treppenfunktionen bequem definieren zu können, führen wir den Begriff einer „Zerlegung“ von $[a, b]$ ein.

Definition 4.32. Die endliche Punktemenge aus $n + 1$ reellen Zahlen

$$Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

heißt eine Zerlegung von $[a, b]$, falls gilt

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$



Durch eine Zerlegung wird eine Unterteilung von $[a, b]$ in n Teilintervalle definiert

$$[a, b] = \bigcup_{j=1}^{n} [x_{j-1}, x_j].$$

Diese Teilintervalle charakterisieren die Breite der Stufen einer Treppenfunktion.

Definition 4.33. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls eine Zerlegung Z existiert, so dass gilt

$$f(x) = f_j \quad \text{für } x \in (x_{j-1}, x_j),\ j = 1, \ldots, n. \tag{4.30}$$

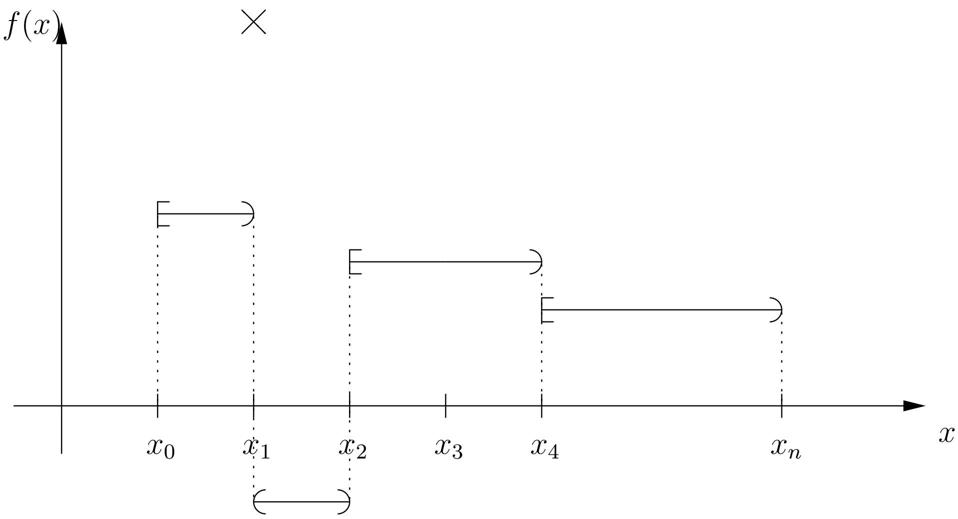


Abbildung 4.8: Beispiel einer Treppenfunktion

Ausreißpunkte an den Sprungstellen (z. B. in x_1) sind zugelassen (siehe Abbildung 4.8).

Lemma 4.34. *Die Menge der Treppenfunktionen über einem Intervall* $[a, b]$ *bildet einen (abstrakten)* $\mathbb{R}$*-Vektorraum (siehe Definition 2.1 [7]).*

Der Beweis wird zur eigenen Übung empfohlen.

Die Fläche, die von dem Graphen einer Treppenfunktion und der x-Achse eingeschlossen wird, ist die Summe der entsprechenden Rechteckflächen. Daher definiert man:

Definition 4.35. Das Integral über eine Treppenfunktion f ist die reelle Zahl

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{j=1}^n f_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f_j \Delta x_j. \tag{4.31}$$

Diese Definition ist von der Wahl der Zerlegung unabhängig, da

$$f_j(x_j - x_{j-1}) = f_j(t - x_{j-1}) + f_j(x_j - t)$$

für einen zusätzlichen Zerlegungspunkt $t \in (x_{j-1}, x_j)$ ist.
Es gelten folgende Eigenschaften für die Integrale von Treppenfunktionen.

Theorem 4.36. *Seien f und g Treppenfunktionen über dem Intervall $[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. Es gilt*

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a), \tag{4.32}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{4.33}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{4.34}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{für } a \le c \le b, \tag{4.35}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \textit{Schwarzsche Ungleichung.} \tag{4.36}$$

Aus $f(x) \le g(x)$ für $x \in [a,b]$ folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad \textit{Monotonie,} \tag{4.37}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,(b-a) \qquad \textit{Beschränktheit.} \tag{4.38}$$

Beweis. Wir zeigen nur die Schwarzsche Ungleichung (4.36). Alle anderen Aussagen sind offensichtlich.
f und g sind Treppenfunktionen mit den Zerlegungen Z_f und Z_g. Dann ist fg ebenfalls eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung $Z_{fg} = Z_f \cup Z_g$. Wir erhalten

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n_{fg}} f_j g_j \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n_{fg}} f_j \sqrt{\Delta x_j} g_j \sqrt{\Delta x_j}$$

$$\overset{\text{Satz 2.67[7]}}{\le} \left(\sum_{j=1}^{n_{fg}} f_j^2 \Delta x_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n_{fg}} g_j^2 \Delta x_j\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Wir führen nun Regelfunktionen als Grenzwerte von **gleichmäßig konvergenten** Folgen von Treppenfunktionen ein (zum Vergleich Definition 3.44, [7]):

Definition 4.37 (Regelfunktion)**.** Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen auf $[a, b]$ gibt, so dass gilt

$$f(x) \overset{\text{gl.}}{=} \lim_{n\to\infty} t_n(x) \quad \text{für } x \in [a, b]. \tag{4.39}$$

Remark 4.38. Die gleichmäßige Konvergenz kann auch folgenderweise charakterisiert werden

$$t_n \overset{\text{gl.}}{\to} f \iff \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - t_n(x)| =: \|f - t_n\|_\infty \to 0 \quad \text{für } n \to \infty. \tag{4.40}$$

Die Regelfunktionen sind damit Grenzwerte von Cauchyfolgen von Treppenfunktionen, wobei die Normkonvergenz durch (4.40) beschrieben wird.
Welche Funktionen sind Regelfunktionen? Der folgende Satz beantwortet diese Frage:

Theorem 4.39 (Hauptsatz über Regelfunktionen)**.** *f ist Regelfunktion auf $[a, b]$ genau dann, wenn f in jedem Punkt $x \in [a, b]$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt.*

Remark 4.40. In den Endpunkten des Intervalls existieren jeweils der rechts- oder linksseitige Grenzwert.

Conclusion 4.41. Stückweise stetige und beschränkte monotone Funktionen sind Regelfunktionen.

Beweis.

(i) f sei Regelfunktion, $x_0 \in (a, b]$. Wir wählen eine beliebige Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von links gegen x_0 konvergiert, d. h.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ x_n<x_0}} |x_n - x_0| = 0.$$

Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert. Wir werden das Cauchykriterium (Satz 3.20 [7]) an. Dazu wählen wir ein $\varepsilon > 0$. Zu f gibt es eine approximierende Folge von Treppenfunktionen $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so dass gilt

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - t_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für ein } N = N(\frac{\varepsilon}{2}).$$

Es ist

$$\begin{aligned} |f(x_l) - f(x_k)| &\le |f(x_l) - t_N(x_l)| + |t_N(x_l) - t_N(x_k)| + |t_N(x_k) - f(x_k)| \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + |t_N(x_l) - t_N(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Für die Treppenfunktion t_N gilt, dass für l und $k \geq n_0$ stets $t_N(x_l) - t_N(x_k) = 0$ ist. Es folgt

$$|f(x_l) - f(x_k)| < \varepsilon \quad \text{für } l, k \geq n_0.$$

Damit existiert der linksseitige Grenzwert. Analog lässt sich die Existenz eines rechtsseitigen Grenzwertes zeigen.

(ii) Sei f eine Funktion, deren rechts- und linksseitige Grenzwerte existieren. Wir zeigen f ist eine Regelfunktion. Da rechts- und linksseitige Grenzwerte existieren, gilt dass für jedes $\xi \in [a, b]$ und $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ein $\delta = \delta(\xi)$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon = \frac{1}{n} \quad \text{für } x, y \in (\xi, \xi + \delta) \text{ bzw. für } x, y \in (\xi - \delta, \xi). \tag{4.41}$$

Wir können nun endlich viele $\xi_i \in [a, b]$ so wählen, dass $\xi_1 < \xi_2 < \ldots \xi_N$ und

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} (\xi_j - \delta_j, \xi_j + \delta_j).$$

Wir können annehmen, dass $\xi_j + \delta_j < \xi_{j+1}$ ist. In den Überlappungsintervallen $(\xi_j, \xi_j + \delta_j) \cap (\xi_{j+1} - \delta_{j+1}, \xi_{j+1})$ wählen wir den Punkt

$$\eta_j = \frac{(\xi_j + \delta_j) + (\xi_{j+1} - \delta_{j+1})}{2}. \tag{4.42}$$

Wir betrachten die Stufenfunktion

$$t_n(x) := \begin{cases} f(a) & \text{für } a \leq x < \xi_1, \\ f(\xi_j) & \text{für } x = \xi_j, \\ f(\eta_j) & \text{für } \xi_j < x < \xi_{j+1}, \\ f(b) & \text{für } \xi_N < x \leq b. \end{cases}$$

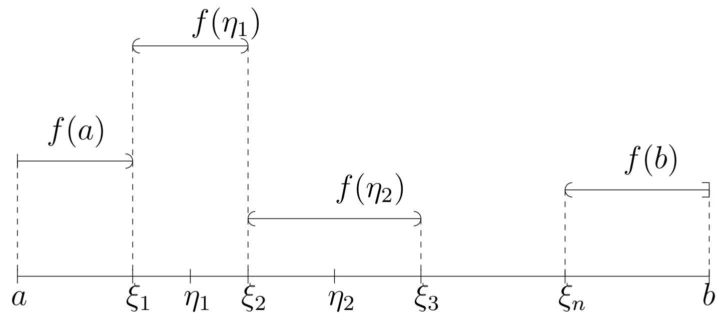


Abbildung 4.9: Stufenfunktion t_n

Es ist

$$|f(x) - t_n(x)| = \begin{cases} |f(x) - f(a)| & \text{für } a \le x < \xi_1, \\ 0 & \text{für } x = \xi_j, \\ |f(x) - f(\eta_j)| & \text{für } \xi_j < x < \xi_{j+1}, \\ |f(x) - f(b)| & \text{für } \xi_N < x \le b. \end{cases}$$

Aus (4.41) und (4.42) folgt, dass

$$|f(x) - t_n(x)| < \frac{1}{n}$$

ist.
Damit haben wir eine Folge von Stufenfunktionen konstruiert, die gleichmäßig gegen f auf $[a, b]$ konvergiert.

□

Remark 4.42. Die Menge der Regelfunktionen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Produkt und Betrag von Regelfunktionen sind ebenfalls Regelfunktionen.

Da wir durch (4.31) das Integral von Treppenfunktionen definiert haben, können wir den Integralbegriff durch Grenzwertbildung auf die Regelfunktionen übertragen.

Definition 4.43. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, d. h. f ist Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Treppenfunktionen

$$f(x) \overset{\text{gl.}}{=} \lim_{n\to\infty} t_n(x). \tag{4.43}$$

Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx. \tag{4.44}$$

Diese Definition ist sinnvoll, wie folgendes Lemma zeigt:

Lemma 4.44. *Der Grenzwert (4.43) existiert und ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folgen* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis.

(i) Existenz des Grenzwertes. Wir zeigen, dass $\int_a^b t_n(x)\,dx = I_n$ eine Cauchy-Folge bildet. Nach Satz 3.20 [7] konvergiert dann die Zahlenfolge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu einem Grenzwert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} |I_n - I_m| &= \left| \int_a^b t_n(x)\,dx - \int_a^b t_m(x)\,dx \right| \overset{(4.34)}{=} \left| \int_a^b (t_n(x) - t_m(x))\,dx \right| \\ &\overset{(4.38)}{\le} \sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - t_m(x)||b - a| \overset{(4.43)}{\le} \varepsilon|b - a| = \varepsilon' \quad \text{für } n, m > n_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

d. h. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge. Hierbei haben wir genutzt, dass die nach (4.43) gleichmäßig konvergente Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist, d. h.

$$\sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - t_m(x)| < \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0(\varepsilon).$$

(ii) Unabhängigkeit des Grenzwertes von der approximierenden Folge. Sei

$$f(x) \overset{\text{gl.}}{=} \lim_{n\to\infty} t_n(x) \overset{\text{gl.}}{=} \lim_{n\to\infty} h_n(x),$$
$$I_n = \int_a^b t_n(x)\,dx, \quad J_n = \int_a^b h_n(x)\,dx.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |I_n - J_n| &\le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - h_n(x)| \\ &\le (b-a)\left[\sup_{x\in[a,b]} |t_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h_n(x) - f(x)|\right], \end{aligned}$$

woraus

$$\lim_{n\to\infty} (I_n - J_n) = I - J = 0$$

folgt.

□

Remark 4.45. Die Rechenregeln (4.32) bis (4.38) gelten auch für Regelfunktionen.

Mittelwertsätze der Integralrechnung

Die für Regelfunktionen f gültige Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

kann für stetige Funktionen zu einer Gleichung verschärft werden.
Es gilt: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$, so dass gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(\xi). \tag{4.45}$$

Theorem 4.46 (Mittelwertsatz). *Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit $p(x) \ge 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b p(x)\,dx.$$

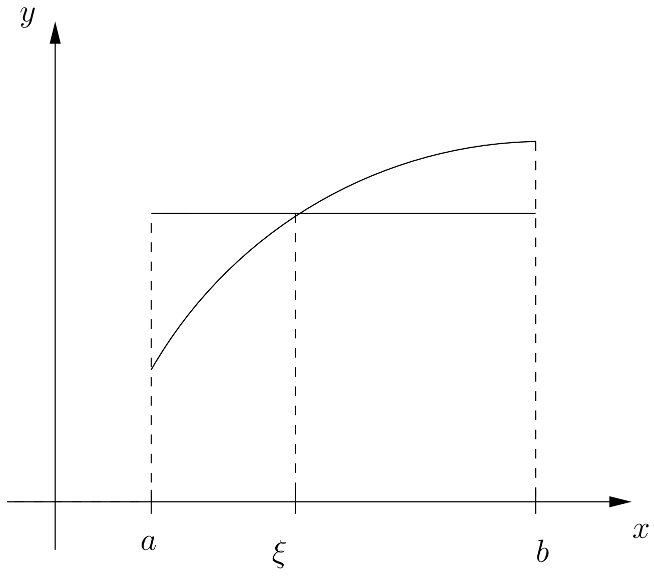


Abbildung 4.10: Existenz des Punktes ξ in Satz 4.46.

Beweis. Wegen der Monotonie (4.37) gilt

$$\left(\min_{x\in[a,b]} f(x)\right) \int_a^b p(x)\,dx \le \int_a^b f(x)p(x)\,dx \le \left(\max_{x\in[a,b]} f(x)\right) \int_a^b p(x)\,dx.$$

Es gibt also eine Zahl μ zwischen $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, so dass gilt

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = \mu \int_a^b p(x)\,dx.$$

Da f stetig ist, nimmt f jeden Wert zwischen m und M an. Folglich existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $\mu = f(\xi)$. □

Remark 4.47. Für $p(x) \equiv 1$ erhalten wir (4.45).

Um zu zeigen, wie Differential- und Integralrechnung zusammenhängen, führen wir den Begriff der Stammfunktion ein.

Definition 4.48 (Stammfunktion)**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls F differenzierbar in $[a, b]$ ist und

$$F'(x) = f(x).$$

Remark 4.49. Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Ist nämlich F eine Stammfunktion, dann ist auch $F + \text{const}$ eine Stammfunktion.

Wir formulieren jetzt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Theorem 4.50 (Hauptsatz für stetige Funktionen)**.** *Sei f stetig in $[a,b]$ und*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad \text{für } x \in [a,b].$$

Dann ist F stetig differenzierbar in $[a,b]$ und es gilt

$$F'(x) = f(x),$$

d. h. F ist Stammfunktion von f.

Beweis. Sei $x_0 \in [a,b]$. Es ist für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$

$$\begin{aligned}\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} &= \frac{\int_a^{x_n} f(\xi)\,d\xi - \int_a^{x_0} f(\xi)\,d\xi}{x_n - x_0} \\ &= \frac{\int_{x_0}^{x_n} f(\xi)\,d\xi}{x_n - x_0} \overset{(4.45)}{=} \frac{1}{x_n - x_0} f(\xi_n)(x_n - x_0),\end{aligned}$$

wobei $\xi_n \in (x_0, x_n) \cup (x_n, x_0)$ ist.
Für $x_n \to x_0$ gilt auch $\xi_n \to x_0$ und da f stetig ist, existiert der Grenzwert

$$f(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} f(\xi_n) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = F'(x_0).$$

□

Theorem 4.51 (Hauptsatz für Regelfunktionen)**.** *Sei f eine Regelfunktion auf $[a,b]$ und*

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi \quad \text{für } x \in [a,b].$$

Dann existieren in jedem Punkt die links- und rechtsseitigen Ableitungen von F, so dass

$$F'(x_0-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{und} \quad F'(x_0+) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Der Beweis erfolgt analog zu vorn.

Conclusion 4.52. Es sei F in $[a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt für $x \in [a,b]$

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(\xi)\,d\xi. \tag{4.46}$$

Beweis. Wir zeigen die Folgerung. Für $f(x) = F'(x)$ gilt nach dem Hauptsatz

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(\xi)\,d\xi\right)' = f(x).$$

Wir betrachten die Funktion

$$H(x) := F(x) - \int_a^x f(\xi)\, d\xi.$$

Dann ist $H'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ und $H(a) = F(a)$. Nach dem Mittelwertsatz 4.17 der Differentialrechnung ist mit einem Zwischenwert $\eta \in (a, x)$

$$H(x) - H(a) = F(x) - \int_a^x f(\xi)\, d\xi - F(a) = H'(\eta)(x - a) = 0.$$

Folglich ist

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(\xi)\, d\xi.$$

□

Durch den Hauptsatz lassen sich aus den Differentiationsregeln entsprechende Integrationsregeln herleiten.

Integrationsregeln

Wir beginnen mit der **partiellen Integration**, die auf der Produktregel der Differentation beruht (4.10)

$$(fg)' = f'g + g'f. \tag{4.47}$$

Theorem 4.53 (Partielle Integration)**.** *Seien f, g differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen Regelfunktionen sind. Es gilt*

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\, dx &= f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\, dx.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Beweis. Da

$$\int_a^b (fg)'(x)\, dx \overset{(4.47)}{=} \int_a^b f'(x)g(x)\, dx + \int_a^b f(x)g'(x)\, dx \overset{(4.46)}{=} f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

ist, folgt Formel (4.48). □

Beispiel:

Wir berechnen den Flächeninhalt des Halbkreises mit dem Radius 1, $\int_{-1}^{+1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_{-1}^{+1} 1 \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx$. Die Formel (4.48) liefert uns:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\sqrt{1 - x^2}}_{g}\, dx &= x\sqrt{1 - x^2}|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{+1} \frac{+x(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \\ &= -\int_{-1}^{+1} \frac{1 - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.\end{aligned}$$

Wir berechnen die Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Sie ist $\arcsin x$, da $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist. Hierbei haben wir $f(y) = \sin y = x, y = \arcsin x = f^{-1}(x)$ gesetzt und Formel (4.13) benutzt. Damit erhalten wir:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{(4.46)}{=} \arcsin x|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{1}{2} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

Somit haben wir den Flächeninhalt des Halbkreises mit dem Radius 1 berechnet (siehe Abbildung 4.11).

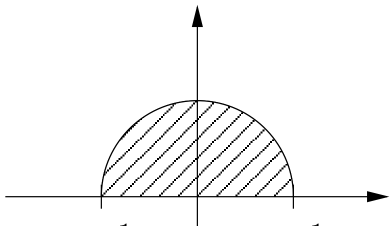


Abbildung 4.11: Halbkreis mit dem Radius 1

Eine wichtige Rolle spielt die Substitution der Variablen.

Theorem 4.54 (Integration durch Substitution der Variablen)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f : x \to f(x)$, $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $g : t \to g(t)$, und der Wertebereich $W(g) \subseteq [a, b]$, d. h. $g(t) = x$ ist aus $[a, b]$. Die Funktion f besitze eine Stammfunktion und g sei differenzierbar. Dann besitzt auch die Komposition $(f \circ g)g' : t \to f(g(t))g'(t)$ eine Stammfunktion und es gilt für $\alpha_0, \beta_0 \in [\alpha, \beta]$:*

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(\alpha_0)}^{g(\beta_0)} f(x)\, dx. \tag{4.49}$$

Umgekehrt, ist zusätzlich $g'(t) \neq 0$ für $t \in [\alpha, \beta]$, dann existiert die zu $x = g(t)$ inverse Funktion $g^{-1}(x) = t$ und es gilt für $a_0, b_0 \in [a, b]$:

$$\int_{g^{-1}(a_0)}^{g^{-1}(b_0)} f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{a_0}^{b_0} f(x)\, dx. \tag{4.50}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst (4.49). Wir betrachten die Stammfunktion von f für ein $a_0 \in [a, b]$

$$F(x) = \int_{a_0}^{x} f(\xi)\, d\xi \tag{4.51}$$

und setzen $x = g(t)$. Nach der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = \frac{dF(g(t))}{dg} g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

Damit ist nach (4.46)

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \frac{d}{dt} F(g(t))\, dt = F(g(\beta_0)) - F(g(\alpha_0)) &\overset{(4.51)}{=} \int_{g(\alpha_0)}^{g(\beta_0)} f(x)\, dx \\ &= \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(g(t))g'(t)\, dt.\end{aligned}$$

Wir sehen uns jetzt (4.50) an. Die Voraussetzung $g'(t) \neq 0$ in $[\alpha, \beta]$ sichert, dass $g^{-1}(x) = t$ existiert. Damit sind $g^{-1}(a_0) =: \alpha_0$ und $g^{-1}(b_0) =: \beta_0$ definiert. Setzen wir diese Grenzen in (4.49) ein und beachten, dass $g(\beta_0) = b_0, g(\alpha_0) = a_0$ ist, erhalten wir (4.50). □

Beispiele

1° Es sei g eine differenzierbare Funktion im Intervall $[0, 1]$ und $g(t) > 0$ für $t \in [0, 1]$. Dann ist

$$\int_0^1 \frac{g'(t)}{g(t)}\, dt = \int_0^1 f(g(t))g'(t)\, dt \overset{(4.49)}{=} \int_{g(0)}^{g(1)} \frac{1}{x}\, dx = \ln(g(1)) - \ln(g(0)).$$

Hier wurde $f(x) = \frac{1}{x}$ gesetzt.

2° Wir berechnen das Integral $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx$ mit Hilfe der Formel (4.50), indem wir $x = \ln t = g(t)$ setzen. Es ist $g'(t) = \frac{1}{t} \neq 0$ für endliche t, $g^{-1}(t) = e^x$ und damit:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\, dx \overset{(4.50)}{=} \int_{e^0}^{e^1} \frac{1}{(1+e^{\ln t})t}\, dt &= \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= \ln t|_1^e - \ln(1+t)|_1^e = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).\end{aligned}$$

Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen sind Brüche von Polynomen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Die Berechnung der Integrale $\int f(x)\,dx$ erfolgt durch Partialbruchzerlegung. Wir beschreiben in mehreren Schritten das Vorgehen.

1. Schritt:

Man dividiere, bis der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist als der des Nennerpolynoms:

$$f(x) = h(x) + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}.$$

2. Schritt:

Man bestimme die Nullstellen des Nennerpolynoms und fasse konjugiert komplexe Nullstellen zu quadratischen Ausdrücken zusammen. Damit wird

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + 2b_j x + c_j)^{m_j},$$

wobei $k_1 + \cdots + k_r + 2m_1 + \ldots 2m_s = n$ ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist diese Zerlegung stets möglich.

3. Schritt:

Sind die x_i, b_j und c_j bekannt, mache man den Ansatz

$$\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{t=1}^{k_i} \frac{A_{it}}{(x - x_i)^t} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_j} \frac{B_{jl} x + C_{jl}}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^l} \quad . \tag{4.52}$$

Die Gleichung (4.52) wird mit $q(x)$ multipliziert. Danach bestimme man die Koeffizienten A_{it}, B_{jl} und C_{jl} durch Koeffizientenvergleich oder durch schrittweises Einsetzen der Nullstellen von $q(x)$. (Nach dem Satz über Partialbruchzerlegung ist dies stets möglich.)

4. Schritt:

Die Summanden in (4.52) werden integriert.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^4+1}{x^4-x^3-x+1}$ soll integriert werden.

1. Schritt: Division:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - x + 1 + x^3 + x}{x^4 - x^3 - x + 1} = 1 + \frac{x^3 + x}{x^4 - x^3 - x + 1} \quad .$$

2. Schritt: Bestimmung der Nullstellen des Nennerpolynoms:

$q(x) = x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1) = (x-1)^2(x^2+x+1).$

3. Schritt: Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^3+x}{x^4-x^3-x+1} = \frac{x^3+x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_{11}}{(x-1)} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+x+1}\ . \tag{4.53}$$

Bestimmen von A_{11}, A_{12}, B_{11} und C_{11}. Dazu wird (4.53) mit $x^4 - x^3 - x + 1$ multipliziert. Man erhält

$$x^3 + x = A_{11}(x-1)(x^2+x+1) + A_{12}(x^2+x+1) + (B_{11}x + C_{11})(x-1)^2. \tag{4.54}$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite und Koeffizientenvergleich führt auf

$$A_{11} = \frac{2}{3}, \quad A_{12} = \frac{2}{3}, \quad B_{11} = \frac{1}{3}, \quad C_{11} = 0.$$

Damit ist

$$f(x) = 1 + \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{3}x}{x^2+x+1}\ .$$

4. Schritt: Gliedweises Integrieren der Partialbrüche:

$$\int f(x)\,dx = x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+x+1}\ .$$

Das verbleibende Integral kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.\end{aligned}$$

Nun ist

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = -\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}\,dx.$$

Wir setzen $t = g^{-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$, also $g(t) = x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2}$, und wenden Formel (4.50) an. Es wird

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1}\,dx &= -\frac{2}{3}\int \frac{1}{(t^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan t,\end{aligned}$$

da $\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{t^2+1}$ ist.
Somit erhalten wir

$$\int f(x)\,dx = x + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Remark 4.55. Integrale der Gestalt

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

mit einem rationalen Ausdruck als Integranden kann man auf Integrale der Gestalt

$$\int \frac{p(t)}{q(t)}\,dt$$

zurückführen. Dies wird durch die Substitution $x = g(t) = 2\arctan t$, $t = \tan\frac{x}{2}$, mit $g'(t) = \frac{2}{1+t^2} \neq 0$ möglich. Es wird

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

und

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Beispiel

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,dx = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\,dt = \frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)\,dt$$

$$= \frac{t^2}{4} + t + \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{\tan^2\frac{x}{2}}{4} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir Regelfunktionen über einem abgeschlossenen Intervall integriert. Wir untersuchen nun, welche unbeschränkte Funktionen auf $[a, b]$ integrierbar sind und wann wir unbeschränkte Intervalle zulassen können. Ist dies möglich, dann werden wir von uneigentlichen Integralen sprechen.

Definition 4.56. Die Funktion f sei auf $[a, x_0)$, $a < x_0 \leq \infty$ definiert und Regelfunktion auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a, \eta] \subset [a, x_0)$. f ist uneigentlich integrierbar auf $[a, x_0)$, falls der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{\eta \to x_0 -} \int_a^\eta f(\xi)\, d\xi =: \int_a^{x_0} f(\xi)\, d\xi$$

existiert. Entsprechend wird auf $(x_0, b]$ $-\infty \leq x_0 < b$, definiert: Existiert

$$\lim_{\eta \to x_0 +} \int_\eta^b f(\xi)\, d\xi =: \int_{x_0}^b f(\xi)\, d\xi,$$

dann ist dieser Grenzwert das uneigentliche Integral.

Beispiele

1°

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \left[-e^{-R} + e^0 \right] = 1.$$

2°

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{R \to \infty} 2 \int_0^R \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ &= \lim_{R \to \infty} 2\, (\arctan R - \arctan 0) = 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

3°

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_1^R \frac{1}{x}\, dx = \lim_{R \to \infty} \ln R = \infty,$$

d.h. das Integral ist divergent.

4° Sei $a \neq 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^a}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^a}\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(-a+1)} \left[x^{-a+1} \right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{(1-a)} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[1 - \varepsilon^{1-a} \right] = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{für } a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Integration von Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wir untersuchen zunächst, wann wir die Grenzwertbildung mit dem Integral für eine Folge von Regelfunktionen vertauschen können.

Theorem 4.57. *Es seien f_n Regelfunktionen auf $[a,b]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere dort gleichmäßig zu f. Dann ist f Regelfunktion und für $x \in [a,b]$ gilt*

$$\int_a^x f(\xi)\,d\xi = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)\,d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(\xi)\,d\xi.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass f Regelfunktion ist, d. h. zu $\varepsilon = \frac{1}{n}$ finden wir eine Treppenfunktion t_n, so dass gilt

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - t_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Die Treppenfunktion kann folgendermaßen gefunden werden. Zu $\frac{1}{2n}$ gibt es ein f_n aus der Folge der f approximierenden Regelfunktionen, so dass gilt

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2n}.$$

Da f_n Regelfunktion ist, gibt es eine Treppenfunktion t_n^N mit

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f_n(x) - t_n^N(x)\right| < \frac{1}{2n}.$$

Daher ist $t_n = t_n^N$ die gesuchte Treppenfunktion, da

$$\sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - t_n^N(x)\right| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{x\in[a,b]} \left|f_N(x) - t_n^N(x)\right| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen nun die Vertauschbarkeit der Grenzwertprozesse. Wir setzen

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi, \quad F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi)\,d\xi.$$

Es ist für ein $\varepsilon > 0$

$$|F(x) - F_n(x)| \le \sup_{\xi\in[a,b]} |f(\xi) - f_n(\xi)|(x-a) < \varepsilon \quad \text{für } n \ge n_0(\varepsilon).$$

Folglich ist

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(\xi)\ d\xi = F(x) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)\,d\xi.$$

□

Conclusion 4.58. Es seien g_n Regelfunktionen auf $[a,b]$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

konvergiere dort gleichmäßig. Dann gilt für $x \in [a,b]$

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\xi)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x g_n(\xi)\, d\xi.$$

Somit können Potenzreihen im Inneren des Konvergenzintervalls gliedweise integriert werden.

Remark 4.59. Wir haben noch den Beweis des Satzes 4.11 nachzuholen. Wir zeigen: falls $f_n \overset{\text{gl.}}{\to} f$ in $[a,b]$ und $f_n' \overset{\text{gl.}}{\to} g$ in $[a,b]$, dann existiert die Ableitung f' und es gilt $f' = g$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Nachfolgend ist der Beweis von Satz 4.11 ausgeführt.

Beweis. g ist als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig und damit eine Regelfunktion. Nach Satz 4.57 gilt

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x g(\xi)\, d\xi = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(\xi)\, d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(\xi)\, d\xi \\ &\overset{(4.46)}{=} \lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a). \end{aligned}$$

G ist differenzierbar und daher auch f. Es folgt, dass $G' = g = f'$ ist. □

Einige Anwendungen der Integralrechnung

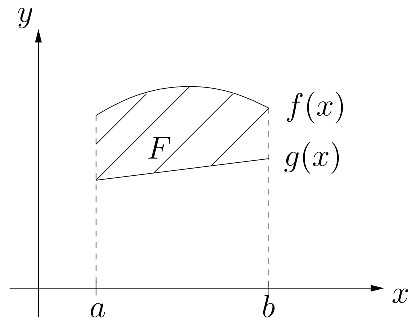
Bestimmte Integrale werden benutzt, um geometrische, physikalische und technische Größen zu berechnen. Wir werden hier nur eine grobe Übersicht über die Anwendungsmöglichkeiten geben.

Anwendungen in der Geometrie

- Flächeninhalt:

$$F = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx,$$

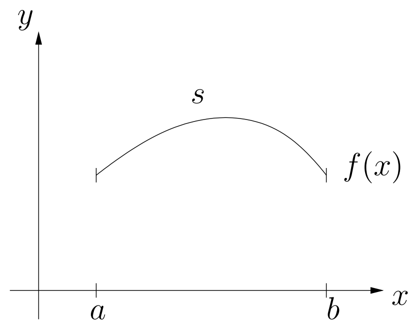
wobei $f(x) - g(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ ist.



- Bogenlänge:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

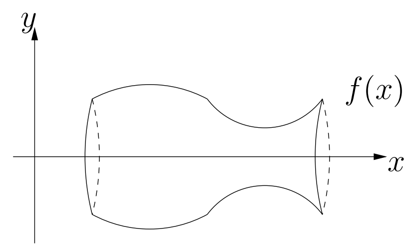
wobei $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist.



- Volumen von Rotationskörpern:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2\,dx, \qquad (4.55)$$

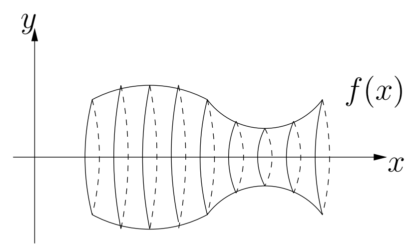
wobei $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$ ist.



- Rotationsflächen:

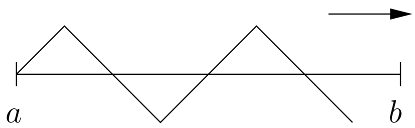
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$$

wobei $f(x) > 0$ und $f(x)$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist.

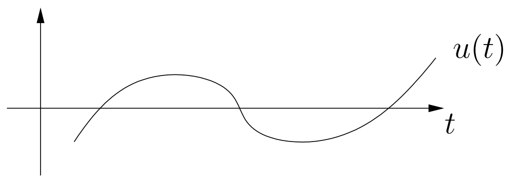


Anwendungen in Natur- und Ingenieurwissenschaften

- Mechanische Arbeit:
$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$
Die Kraft F greift in Richtung der positiven x-Achse an.

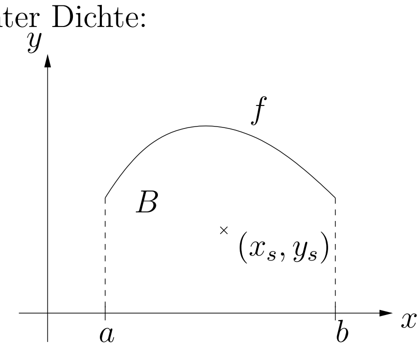


- Elektrische Arbeit:
$$W = \int_0^T u(t)i(t)\,dt,$$
wobei $u(t)$ die Spannung und $i(t)$ die Stromstärke ist.



- Effektive Spannung bzw. Strom:
$$U := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt},$$
$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}.$$

- Schwerpunkt eines ebenen Bereiches B mit konstanter Dichte:
$$x_s = \frac{1}{F}\int_a^b xf(x)\,dx,$$
$$y_s = \frac{1}{2F}\int_a^b (f(x))^2\,dx,$$
F ist der Flächeninhalt von B.



- Berechnung von Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion $f(x) = f(x+T)$:
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega x) + b_1\sin(\omega x) + \cdots + a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) + \dots .$$

Hierbei ist $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und die Fourierkoeffizienten haben die Gestalt
$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx,$$
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1
Zeigen Sie, dass
a) die Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ einen $\mathbb{R}$–Vektorraum bilden;
b) der Betrag einer Treppenfunktion wieder eine Treppenfunktion ist. Gilt von b) auch die Umkehrung?

Aufgabe 17.2 Man bestimme die Integrale

$$\text{a) } \int_{-1}^{1} x dx, \qquad \text{b) } \int_{-1}^{1} x^2 dx$$

durch Approximation der Integranden x bzw. x^2 durch geeignete Treppenfunktionen.
Hinweis zu b): Die meisten werden die Summe $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1)$ benötigen.

Aufgabe 17.3
Geben Sie alle Funktionen $\phi \in C^0[-1, +1]$ an, für die folgende Gleichung gilt:

$$\phi(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt \qquad (-1 \le x \le 1).$$

Hinweis: Man betrachte $\int^x f'(t)/f(t)\ dt$.

Aufgabe 17.4
Man bestimme

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt.$$

Aufgabe 17.5
Man bestimme a) $\displaystyle\int_1^e x \ln x\, dx$, b) $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^2\, dx$, c) $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t}}\, dt$.

Aufgabe 17.6
Man bestimme a) $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\, dt$, b) $\displaystyle\int^x \frac{t^5+5t^4+t^3-13t^2-t+9}{t^3+2t^2-t-2}\, dt$.

Aufgabe 17.7
Man bestimme a) $\displaystyle\int^y \frac{2x+41}{x^2+5x-14}\, dx$, b) $\displaystyle\int^x \text{Arcsin} t\, dt$, c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+\sqrt{t}\,)}\, dt$

Aufgabe 17.8
Bestimmen Sie die Fourier–Reihe der 2π periodischen Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 1, & \in (0, \pi). \end{cases}$$

d.h., bestimmen Sie die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

Skizzieren Sie $f(x)$ und geeignete (je nach vorhandener EDV) Partialsummen s_n mit

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Aufgabe 17.9
Ein Seil unter Belastung $q(x)$ mit Minimum in x_0 nehme die Position $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \left(\int_0^t q(s)\, ds \right) dt$ ein. Für $x_0 = 0$ mit $y(0) = 0$ finde man die Aufhängepunkte $y(-3)$ und $y(2)$, wobei

a) $q(x) = q_0 = 1$, (konstante Belastung, Hängebrücke),

b) $q(x) = \cosh(x),\ q_0 = 1$ (Seil unter "Eigenlast").

Skizzieren Sie die beiden Kurven.

Aufgabe 17.10
Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y \ln y}{\sinh y - y}\, dy,$ c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{(2x-1)^2}\, dx.$

Hinweis. An geeigneter Stelle benötigen Sie Minoranten– und Majorantenkriterium. Diese Kriterien lauten z.B. (und sinngemäß für entsprechende weitere Fälle):

Seien $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und f, g in $[a, b)$ definierte Funktionen, die in $[a, c],\ a < c < b$ integrierbar sind. Dann gilt:

1) Minorantenkriterium: Ist $0 \le f(x) \le g(x)$ für $x \in [a, b)$ und divergiert $\int_a^b f(t)\, dt$, dann divergiert auch $\int_a^b g(t)\, dt$.

2) Majorantenkriterium: Ist $|f(x)| \le g(x)$ für $x \in [a, b)$ und existiert $\int_a^b g(t)\, dt$, dann existiert auch $\int_a^b f(t)\, dt$.

Aufgabe 17.11
Sei $r > 0$. Man skizziere die Kurve

$$(-r, r) \ni x \mapsto f(x) = r\sqrt{(1 - x^2/r^2)},$$

bestimme ihre Bogenlänge, sowie die Rotationsfläche

$$A = 2\pi \int_{-r}^{r} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

4.3 Differentiation von Funktionen mehrerer Variablen

Um tatsächlich ablaufende Prozesse in Raum und Zeit zu beschreiben, reicht es nicht aus, Funktionen einer Variablen zu betrachten. Außerdem können funktionale Zusammenhänge durch weitere Parameter, bzw. Variablen, genauer beschrieben werden. Wir betrachten daher Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, d. h. reelle Funktionen von n reellen Variablen.

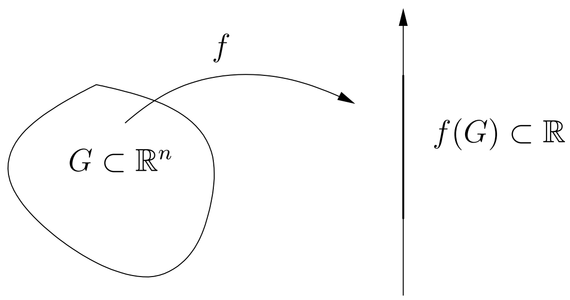


Abbildung 4.12: Abbildung $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Für $n = 2$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, können wir den Graphen von f skizzieren:

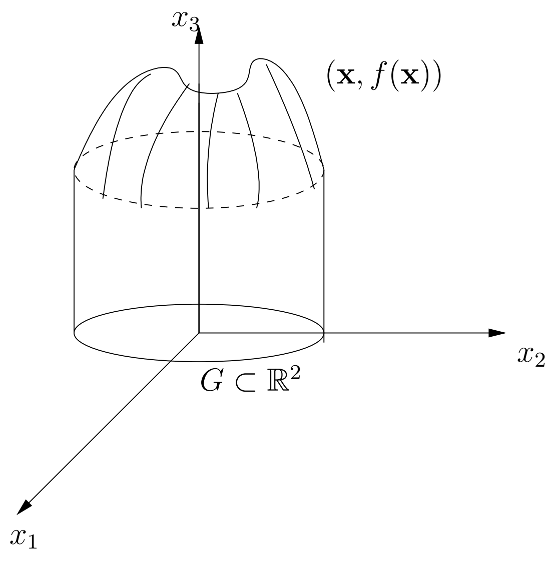


Abbildung 4.13: Graph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Um die Differentiation von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ einzuführen, kann man i. Allg.

nicht von Differenzenquotienten ausgehen; der Ausdruck

$$\frac{f(x_1,\ldots,x_n)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{(x_1,\ldots,x_n)-(x_1^0,\ldots,x_n^0)} \tag{4.56}$$

ist für $n > 1$ **nicht** erklärt, da durch „Vektoren“ dividiert werden muss. Führt man jedoch spezielle Differenzen (Änderungen in einer bestimmten Richtung) ein, so wird man (4.56) einen Sinn geben und sogenannte Richtungsableitungen bzw. partielle Ableitungen definieren können.

Partielle Ableitungen

Die partielle Differentiation geht auf Euler (1707 - 1783) und d'Alembert (1717 - 1783) zurück und tritt Mitte des 18. Jahrhunderts auf.

Definition 4.60. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in D$. Die Funktion f ist in $\boldsymbol{x}$ partiell nach der k-ten Variablen x_k differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = f_{x_k}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)}{h} \tag{4.57}$$

existiert.

In der Abbildung 4.14 ist eine geometrische Veranschaulichung für $n = 2$ zu sehen.

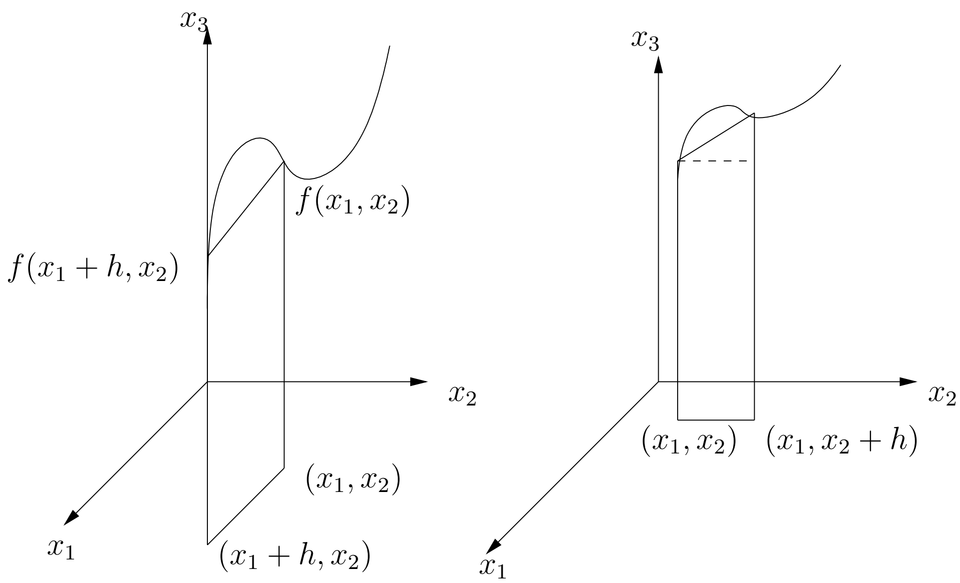


Abbildung 4.14: Graph von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Im Fall $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})$ konvergiert $\boldsymbol{x}_h = (x_1+h, x_2)$ zu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ parallel zur x_1-Achse, wobei x_2 festgehalten wird. Im Fall $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$ konvergiert $\hat{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2 + h)$ zu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ parallel zur

x_2-Achse. Damit werden die partiellen (teilweisen) Ableitungen auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt.

Beispiel

Es sei $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sin x_1$. Dann ist

$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_1} = x_2 + 2x_1 + \cos x_1|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1} = 3 + \cos 1$$
$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1} = 3$$
$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x_3} = 2x_3|_{x_1=1,x_2=1,x_3=1} = 2.$$

Das Beispiel zeigt, dass die Ableitungen von den Richtungen abhängen, in denen man zum Punkt $\boldsymbol{x}$ konvergiert.
Man sagt: f besitzt im Gebiet D partielle Ableitungen, falls f in allen Punkten aus D partiell differenzierbar ist. f ist partiell stetig differenzierbar in $\boldsymbol{x}$, falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{y})$ in $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ stetig ist.

Richtungsableitung

Bisher haben wir Änderungen der Variablen, parallel zu den Koordinatenachsen betrachtet. Es ist auch möglich, Ableitungen in vorgegebenen Richtungen zu untersuchen. Insbesondere treten beim Beschreiben eines Flusses durch Oberflächen Ableitungen in Richtung der Flächennormalen auf.

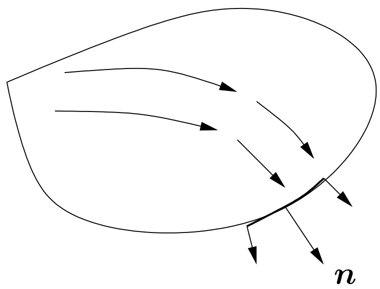


Abbildung 4.15: Fluss durch eine Randkurve

Definition 4.61. Sei $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)^\top$ ein Richtungsvektor der Länge 1, d. h.

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = 1.$$

Weiterhin sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{a}$ im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ ist der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \frac{d}{dt}\left[f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{a})\right]_{t=0}. \tag{4.58}$$

Remark 4.62. Wählen wir $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_k = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^\top$, wobei die 1 an der k-ten Stelle steht, erhalten wir die partielle Ableitung nach x_k:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_k}(\boldsymbol{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}).$$

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ sei ein Einheitsvektor.

Die Richtungsableitung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{d}{dt}\left[f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{a})\right]_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[(x_1+ta_1)^2 + (x_2+ta_2)^2 + (x_3+ta_3)^2\right]_{t=0} \\ &= 2(x_1+ta_1)a_1 + 2(x_2+ta_2)a_2 + 2(x_3+ta_3)a_3|_{t=0} \\ &= 2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = 2\sum_{i=1}^{3} x_i a_i.\end{aligned}$$

Totale Ableitung

Wir möchten jetzt eine Ableitung definieren, in der Grenzwerte unabhängig von der Richtung $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{x}$ betrachtet werden. Um diese Definition vorzubereiten, erinnern wir uns an die Ableitung einer reellen Funktion einer reellen Variablen, $\boldsymbol{x} = x$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4.59}$$

(4.59) können wir mit Hilfe des Taylorpolynoms T_1 schreiben

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(x+h)h \tag{4.60}$$

mit $\lim_{h\to 0} r(x+h) = 0$. (Man ersetze in (4.22) x durch $x+h$ und x_0 durch x.) (4.60) kann auch mit Hilfe der Landauschen Ordnungssymbole folgendermaßen geschrieben werden (siehe (4.23)):

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h). \tag{4.61}$$

Die Gleichung (4.61) ist Grundlage für die Definition der totalen Ableitung, die auch Fréchet-Ableitung genannt wird. Dabei wird anstelle des Produktes $f'(x)h$ das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i =: \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \tag{4.62}$$

auftreten, das in [7] im Abschnitt 2.7 eingeführt wurde.

Definition 4.63. Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist total differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$, falls ein Vektor $f'(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h}) \tag{4.63}$$

für alle Elemente $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in D$ ist.
Hierbei bedeutet

$$o(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}, \quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} |\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})| = 0. \tag{4.64}$$

Die Schreibweise $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ steht für das durch (4.62) definierte Skalarprodukt. ∇ ist der sogenannte „nabla“ Operator; auch als „grad“ geschrieben

$$\nabla f = \operatorname{grad} f.$$

Remark 4.64. Die totale Ableitung ist in folgendem Sinn eindeutig bestimmt. Sei

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h})$$

und

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h}).$$

Durch Subtraktion erhalten wir

$$0 = 0 + (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{h} + \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{h}$$

und

$$((\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})) - \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})) \cdot \boldsymbol{h} = 0 \quad \text{für alle } \boldsymbol{h} \in U(\boldsymbol{0}).$$

Es folgt

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h})$$

und

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \tilde{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{h}) = 0.$$

Beispiele

1° Es sei $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + b$, wobei $\boldsymbol{a}$ ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$ und b eine beliebige reelle Zahl ist,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Es ist

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) + b = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h} + b = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{h}.$$

Wir lesen ab, dass $\boldsymbol{a} = \nabla f$, $o(\boldsymbol{h}) = 0$ ist.

2° Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$. Wir erhalten

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} \tag{4.65}$$
$$= f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h}), \tag{4.66}$$

wobei $\nabla f = 2\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h} = o(\boldsymbol{h})$ ist.

Wir untersuchen nun, ob es einen Zusammenhang zwischen der totalen Ableitung, den partiellen Ableitungen bzw. der Richtungsableitung gibt.

Theorem 4.65. *Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in $\boldsymbol{x} \in D$ total differenzierbar. Dann existiert die Richtungsableitung für ein $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}). \tag{4.67}$$

Beweis. Wir setzen in (4.63) Vektoren $\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ein und erhalten

$$f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}) + \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot h\boldsymbol{a} + o(h\boldsymbol{a}).$$

Durch Umformung folgt

$$\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a} + \frac{o(h\boldsymbol{a})}{h}$$

und schließlich

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+h\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \nabla f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}).$$

□

Conclusion 4.66. Eine in $\boldsymbol{x}$ total differenzierbare Funktion besitzt die Ableitung

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

Beweis. Wir betrachten die Richtungsvektoren $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Dann liefert uns (4.67)

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_k}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_k\cdot\nabla f(\boldsymbol{x}) = k - \text{te Komponente von } \nabla f(\boldsymbol{x}).$$

□

Die Beziehung (4.68) ist ein wichtige Aussage, die es gestattet, totale Ableitungen zu berechnen, ohne auf die Definition 4.63 zurückgreifen zu müssen.

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = \sin(nx_1)\cos(mx_2)$. Es ist

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} n\cos(nx_1)\cos(mx_2) \\ -m\sin(nx_1)\sin(mx_2) \end{pmatrix}.$$

Remark 4.67. Wir sehen uns noch einmal die Formel (4.67) für $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ an:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = |\boldsymbol{a}| \, |\nabla f(\boldsymbol{x}_0)| \cos\left(\sphericalangle \boldsymbol{a}, \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\right).$$

Die Richtungsableitung wird am größten, wenn $\cos\left(\sphericalangle \boldsymbol{a}, \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\right) = 1$ ist, d. h. $\boldsymbol{a}$ und $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ haben die gleiche Richtung. In diesem Fall ist

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = |\nabla f(\boldsymbol{x}_0)|,$$

da $|\boldsymbol{a}| = 1$ ist. Damit zeigt $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ in Richtung der größten Änderung von f im Punkt $\boldsymbol{x}_0$. Diese Tatsache wird bei numerischen Verfahren (steilster Anstieg, Gradientenverfahren) genutzt.

Wir stellen nun einige Aussagen und Rechenregeln zusammen:

A1 Eine in $\boldsymbol{x}$ total differenzierbare Funktion ist in $\boldsymbol{x}$ stetig. Diese Aussage folgt sofort aus Definition 4.63.

A2 Ist $n > 1$, so folgt aus der Existenz aller partiellen Ableitungen von f **nicht** die Stetigkeit und damit auch nicht die totale Differenzierbarkeit in allen Punkten des Definitionsbereichs D.

Beispiel

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0, \\ \frac{x_1^5}{(x_2 - x_1^2)^2 + x_1^6} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0. \end{cases}$$

Wir sehen uns die partiellen Ableitungen im Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(h_1, 0) - f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^5}{(h_1^4 + h_1^6)h_1} \\ &= \lim_{h_1 \to 0} \frac{1}{1 + h_1^2} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(0, h_2) - f(0,0)}{h_2} = 0. \end{aligned}$$

Stetigkeit würde vorliegen, wenn (h_1, h_2) auf beliebigem Weg gegen $(0,0)$ konvergiert und der Grenzwert $\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} f(h_1, h_2)$ stets existiert und gleich ist.
Wählen wir $h_2 = h_1^2$, d. h. wir gehen auf einem Parabelast gegen $(0,0)$, dann wäre

$$\lim_{h_1 \to 0} f(h_1, h_1^2) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1^5}{h_1^6} = \infty,$$

d. h. f ist nicht stetig im Nullpunkt und daher nach Aussage A1 auch nicht total differenzierbar.

A3 Existieren alle partiellen Ableitungen und sind diese stetig in D, dann ist f total differenzierbar in D.
Der Beweis wird für $n = 2$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, geführt. Es ist

$$\begin{aligned}
&f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \\
&= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \\
&\overset{(4.16)}{=} \frac{\partial f(x_1 + \xi_1, x_2 + h_2)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2 + \xi_2)}{\partial x_2} h_2 \\
&= \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} h_2 + \left(\frac{\partial f(x_1 + \xi_1, x_2 + h_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) h_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2 + \xi_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) h_2 \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \nabla f(x_1, x_2) \cdot \boldsymbol{h} + o(\boldsymbol{h}).
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass im Beispiel der Aussage A2 die partiellen Ableitungen nicht stetig im Nullpunkt sind.

A4 Es gilt ein Mittelwertsatz für Funktionen mehrerer Veränderlicher:
Sei f stetig differenzierbar in $D \subset \mathbb{R}^n$. Seien $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ und ihre Verbindungsstrecke

$$V = \{\boldsymbol{x}_t := \boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}),\ t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Dann existiert ein $\tau \in (0, 1)$, so dass $\boldsymbol{x}_\tau \in V$ ist, und

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}_\tau) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}). \tag{4.69}$$

Beweis. Wir halten $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ fest und betrachten

$$g(t) = f(\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) \quad \text{für } t \in [0, 1].$$

Dann ist für $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_t + h(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})) - f(\boldsymbol{x}_t)}{h} \\
&= \lim_{h|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_t + h\boldsymbol{a}|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|) - f(\boldsymbol{x}_t)}{h|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \\
&= |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_t) \\
&= |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_t) = \nabla f(\boldsymbol{x}_t) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Damit ist $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und der Mittelwertsatz für Funktionen einer Variablen besagt:
Es gibt ein $\tau \in (0, 1)$, so dass gilt

$$g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0) = g'(\tau),$$

und daher ist

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}_\tau) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

□

A5 Sind f und g in $\boldsymbol{x}$ total, bzw. partiell differenzierbar, dann sind auch $f+g$, cf, fg und $\frac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ total bzw. partiell differenzierbar.

A6 Es gilt folgende **Kettenregel**:
Die Funktion $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, der Wertebereich $g(D)$ befinde sich im Intervall I. Die Funktion $F : D \times I \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))\right) = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, g)}{\partial x_l} + \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, g)}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x_l}.$$

Beweis. Es ist

$$\frac{F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_l, g(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_l)) - F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{h} \overset{(4.69)}{=} \frac{F(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_l, g(\boldsymbol{x}) + h\frac{\partial g}{\partial x_l}(\tilde{\boldsymbol{x}})) - F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))}{h}, \tag{4.70}$$

wobei $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \tau h\boldsymbol{e}_l$ ist.
Wir beschreiben die rechte Seite in folgender Form: sei

$$\boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_e, g(\boldsymbol{x}) + h\frac{\partial g}{\partial x_e}(\tilde{\boldsymbol{x}})\right) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

dann hat die rechte Seite von (4.70) die Gestalt

$$\frac{F(\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{w})}{h}. \tag{4.71}$$

Auf (4.71) wenden wir wieder den Mittelwertsatz (4.69) an und erhalten für

$$\boldsymbol{w}_{\tau^*} = \boldsymbol{w} + \tau^*(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} + \tau^* \begin{pmatrix} h\boldsymbol{e}_l \\ h\frac{\partial g}{\partial x_l}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{F(\boldsymbol{v}) - F(\boldsymbol{w})}{h} &= \frac{\nabla F(\boldsymbol{w}_{\tau^*}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})}{h} \\ &= \frac{\nabla F(\boldsymbol{w}_{\tau^*})}{h} \cdot \begin{pmatrix} h\boldsymbol{e}_l \\ h\frac{\partial g}{\partial x_l}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x_l}(\boldsymbol{w}_{\tau^*}) + \frac{\partial F}{\partial g}(\boldsymbol{w}_{\tau^*})\frac{\partial g}{\partial x_l}(\tilde{\boldsymbol{x}}). \end{aligned} \tag{4.72}$$

Wir bilden jetzt den Grenzwert $h \to 0$ in (4.70) und beachten, dass in (4.71) $\boldsymbol{w}_{\tau^*} \to \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{x}} \to \boldsymbol{x}$ für $h \to 0$ konvergiert. Es folgt die Behauptung

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(F(\boldsymbol{x}, g(\boldsymbol{x}))\right) = \frac{\partial F}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}, g) + \frac{\partial F}{\partial g}(\boldsymbol{x}, g)\frac{\partial g}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}).$$

□

Es folgt $\qquad \nabla_x(F) = \nabla_x F(\boldsymbol{x}, g) + \frac{\partial F}{\partial g}\nabla g.$

Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Um den Satz von Taylor für reelle Funktionen mehrerer reeller Variablen formulieren zu können, müssen wir Ableitungen höherer Ordnung einführen. Das ist sehr einfach für partielle Ableitungen. Für die totalen Ableitungen, die Vektoren sind, bedarf es zusätzlicher Überlegungen, um höhere Ableitungen zu definieren.

Definition 4.68 (Höhere partielle Ableitungen)**.** Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell nach der Variablen x_k differenzierbar in D, d. h. die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existiert. Besitzt $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ eine partielle Ableitung nach der Variablen x_i, dann sagen wir f besitzt eine partielle Ableitung nach den Variablen x_k und x_i und schreiben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(\boldsymbol{x}).$$

Ist $x_i = x_k$, dann schreibt man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\boldsymbol{x}).$$

Allgemein können wir Ableitungen höherer Ordnung mit Hilfe von Multiindices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \cup \{\mathbf{0}\}$ und der Schreibweise $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ einführen:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Wir sehen uns jetzt an, ob man die Reihenfolge der partiellen Differentiation immer vertauschen kann.

Beispiel

Es sei

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$, aber $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) = +1$, d. h. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0)$.
Wir überprüfen, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) = -1$ ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) &= \lim_{h_2 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)}{h_2} \\
&= \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2} \left. \frac{\left[x_2(x_1^2 - x_2^2) + x_1 x_2 (2x_1)\right](x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 2 x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right|_{(0,h_2)} \\
&= \lim_{h_2 \to 0} \frac{-h_2^5}{h_2^5} = -1.
\end{aligned}$$

Der folgende Satz von H. A. Schwarz (1843 - 1921) gibt eine hinreichende Bedingung an, wann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

ist.

Theorem 4.69. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und die drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ existieren und seien stetig. Dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ und es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis für $n = 2$ und setzen $x_i = x_2, x_k = x_1$. Nach Voraussetzung existiert $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ und wir wollen die Existenz von $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ zeigen.
Wir sehen uns den Differenzenquotienten an:

$$\begin{aligned}
&\frac{f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2) - f_{x_2}(x_1, x_2)}{h_1} \\
&= \frac{1}{h_1} \lim_{h_2 \to 0} \left(\frac{f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)}{h_2} - \frac{f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)}{h_2} \right) \\
&= \frac{1}{h_1} \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2} \left(f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - (f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)) \right) \\
&\overset{\text{MWS},0<\xi_1<h_1}{=} \frac{1}{h_1} \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2} \left(f_{x_1}(x_1 + \xi_1, x_2 + h_2) h_1 - f_{x_1}(x_1 + \xi_1, x_2) h_1 \right) \\
&= \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2} \left(f_{x_1}(x_1 + \xi_1, x_2 + h_2) - f_{x_1}(x_1 + \xi_1, x_2) \right) \\
&\overset{\text{MWS},0<\xi_2<h_2}{=} \lim_{h_2 \to 0} \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) h_2 \right) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \xi_1, x_2).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ stetig ist, existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned}
\lim_{h_1 \to 0} \frac{f_{x_2}(x_1 + h_1) - f_{x_2}(x_1, x_2)}{h_1} &\overset{(4.73)}{=} \lim_{h_1 \to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1 + \xi_1, x_2) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

□

Der Satz von Taylor

Wir formulieren den Satz von Taylor zunächst für Funktionen von zwei Variablen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Taylorpolynome, bzw. Polynome vom Grad n für zwei Variable, haben folgende Gestalt:

$$p(x_1, x_2) = a_{(0,0)} + a_{(1,0)}x_1 + a_{(0,1)}x_2 + a_{(2,0)}x_1^2 + a_{(1,1)}x_1x_2 + a_{(0,2)}x_2^2 + a_{(3,0)}x_1^3 + \cdots + a_{(0,n)}x_2^n$$

Der Satz von Taylor für zwei Variable wird daher folgende Gestalt haben (hier für ein Taylorpolynom 2.Grades an der Stelle $(x_{1,0}, x_{2,0})$ formuliert):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) =& f(x_{1,0}, x_{2,0}) + \partial_{x_1} f(x_{1,0}, x_{2,0})(x_1 - x_{1,0}) + \partial_{x_2} f(x_{1,0}, x_{2,0})(x_2 - x_{2,0}) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\partial_{x_1x_1} f(x_{1,0}, x_{2,0})(x_1 - x_{1,0})^2 + 2\partial_{x_1x_2} f(x_{1,0}, x_{2,0})(x_1 - x_{1,0})(x_2 - x_{2,0}) \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \partial_{x_2x_2} f(x_{1,0}, x_{2,0})(x_2 - x_{2,0})^2 + R_2((x_1, x_2), (x_{1,0}, x_{2,0})). \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie wir auf diese Form kommen, erinnern wir uns an den Satz von Taylor für Funktionen einer reellen Variablen:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m}{m!} + R_m(x, x_0). \tag{4.74}$$

Wir sehen, dass die Ordnung der Ableitungen mit den Potenzen von $(x - x_0)$ in den einzelnen Summanden übereinstimmt. Dies ist die Motivation für folgende Schreibweise von (4.74)

$$\begin{aligned} f(x) = & \left(\left[(x - x_0) \frac{d}{dx} \right]^0 f \right) (x_0) + \left(\left[(x - x_0) \frac{d}{dx} \right]^1 f \right) (x_0) + \cdots + \\ & \frac{1}{m!} \left(\left[(x - x_0) \frac{d}{dx} \right]^m f \right) (x_0) + R_m(x, x_0). \end{aligned} \tag{4.75}$$

Dabei bedeutet $[(x - x_0)\frac{d}{dx}]^m f(x_0) = (x - x_0)^m \frac{d^m}{dx^m} f(x_0)$.
Ersetzt man den Ausdruck $(x - x_0)\frac{d}{dx}$ in Formel (4.75) durch $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla$ so erhält man den Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Variablen.

Theorem 4.70 (Satz von Taylor für zwei Variable)**.** *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_0 \in D$. Weiterhin sei $U(\boldsymbol{x}_0) \subset D$ eine Kreisumgebung von $\boldsymbol{x}_0$, in der f $(m+1)$-mal stetig differenzierbar sei. Dann gilt die Taylorsche Formel für $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$:*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) &= f(\boldsymbol{x}_0) + ((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla f)(\boldsymbol{x}_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} \left([(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla]^m f \right) (\boldsymbol{x}_0) + R_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} \left([(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla]^\mu f \right) (\boldsymbol{x}_0) + R_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0). \end{aligned} \tag{4.76}$$

Hierbei ist

$$
\begin{aligned}
\left(\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\right]^\mu f\right) :&= \left(\left[\sum_{i=1}^{2}(x_i-x_i^0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^\mu f\right)(\boldsymbol{x}_0)\\
&= \left(\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-x_2^0)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^\mu f\right)(\boldsymbol{x}_0)\\
&= \sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}(x_1-x_1^0)^j(x_2-x_2^0)^{\mu-j}\frac{\partial^\mu f}{\partial x_1^j\partial x_2^{\mu-j}}(\boldsymbol{x}_0) \qquad (4.77)
\end{aligned}
$$

und

$$R_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\nabla\right]^{m+1} f\right)(\xi,\eta)$$

mit

$$\xi = x_1^0+\vartheta(x_1-x_1^0), \quad \eta = x_2^0+\vartheta(x_2-x_2^0), \quad \vartheta\in(0,1).$$

Remark 4.71. Die zweiten Ableitungen in der Taylorformel können kürzer mit Hilfe der Hessematrix

$$H(x_1^0,x_2^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}\end{pmatrix}(x_1^0,x_2^0)$$

beschrieben werden. Es gilt nämlich

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_1x_1}f(x_{1,0},x_{2,0})(x_1-x_{1,0})^2 &+ 2\partial_{x_1x_2}f(x_{1,0},x_{2,0})(x_1-x_{1,0})(x_2-x_{2,0})+\partial_{x_2x_2}f(x_{1,0},x_{2,0})(x_2-x_{2,0})^2\\
&= \begin{pmatrix} x_1-x_{1,0}\\ x_2-x_{2,0}\end{pmatrix}^\top H(x_{1,0}x_{2,0})\begin{pmatrix} x_1-x_{1,0}\\ x_2-x_{2,0}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Remark 4.72. Um den Satz von Taylor für mehr als zwei Variable formulieren zu können, müssen wir in (4.77) anstelle der binomischen Formel

$$(a_1+a_2)^\mu = \sum_{j=0}^{\mu}\binom{\mu}{j}a_1^j a_2^{\mu-j}, \quad \binom{\mu}{j} = \frac{\mu!}{j!(\mu-j)!}$$

eine Formel für

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\mu$$

anwenden. Eine solche Formel kann in der Multiindexschreibweise einfach formuliert werden. Es sei $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\cup\{\mathbf{0}\}$ ein Multiindex, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1!\cdot\cdots\cdot\alpha_n!$. Für ein $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n$ sei $\boldsymbol{a}^\alpha = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}+\cdots+a_n^{\alpha_n}$ definiert. Dann ist

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^\mu = \sum_{|\alpha|=\mu}\frac{\mu!}{\alpha!}\boldsymbol{a}^\alpha. \qquad (4.78)$$

Beispiel

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} \boldsymbol{a}^\alpha.$$

Da $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $|\alpha| = 2$ die Werte $(2,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ annimmt, ist

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3)^2 &= \frac{2!}{2!}a_1^2 + \frac{2!}{2!}a_2^2 + \frac{2!}{2!}a_3^2 + \frac{2!}{1!1!}a_2a_3 + \frac{2!}{1!1!}a_1a_3 + \frac{2!}{1!1!}a_1a_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2(a_2a_3 + a_1a_3 + a_1a_2).\end{aligned}$$

Theorem 4.73 (Satz von Taylor für mehrere Variable)**.** *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Es sei $U(\boldsymbol{x}_0)$ eine Kugelumgebung von $\boldsymbol{x}_0$, die zu D gehört und in der f $(m+1)$-mal stetig differenzierbar ist. Dann gilt für alle $\boldsymbol{x} \in U(\boldsymbol{x}_0)$*

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\mu=0}^{m} \frac{1}{\mu!} \left([(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \nabla]^\mu f\right)(\boldsymbol{x}_0) + R_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \\ &= \sum_{\mu=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=\mu} \frac{1}{\alpha!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\alpha \frac{\partial^\mu f}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}_0) \right) + R_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0).\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$R_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^\alpha \frac{\partial^{m+1} f}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}_0 + \vartheta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Beispiel

$f(x_1, x_2) = \sin x_1 \sin x_2$ ist bis zum Restglied R_2 in ein Taylorpolynom an der Stelle $(0,0)$ zu entwickeln.

Die Taylorformel (4.76) lautet:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= f(0,0) + x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) + \frac{1}{2!}\left(\left[x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2 f\right)(0,0) + R_2 \\
&= f(0,0) + x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(x_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0,0) + 2x_1x_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(0,0) + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0,0)\right) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(x_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + 3x_1^2x_2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\partial x_2} + 3x_1x_2^2\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2^2} + x_1^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}\right)(\boldsymbol{\xi}) \\
&= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2x_1x_2\right) + \frac{1}{6}\left(-x_1^3\cos\xi_1\sin\xi_2\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\left(3x_1^2x_2(-\sin\xi_1\cos\xi_2) + 3x_1x_2^2(-\cos\xi_1\sin\xi_2) - x_2^3\sin\xi_1\cos\xi_2\right) \\
&= x_1x_2 - \frac{1}{6}\left((x_1^3 + 3x_1x_2^2)\cos\xi_1\sin\xi_2 + (x_2^3 + 3x_1^2x_2)\sin\xi_1\cos\xi_2\right),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
|R_2| \le \frac{1}{6}(|x_1| + |x_2|)^3
$$

ist.

Beweisskizze für den Satz von Taylor im Fall $n = 2$

Der Beweis des Satzes wird so geführt, dass die Taylorsche Formel für eine Variable angewandt wird. Wir setzen

$$
g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)), \quad 0 \le t \le 1.
$$

Dann ist

$$
f(\boldsymbol{x}) = g(1) = g(0) + g'(0) + \cdots + \frac{1}{m!}g^{(m)}(0) + R_m.
$$

Die Berechnung von $g^{(k)}(0)$ führt auf die obige Taylorformel. Dabei wird die vollständige Induktion benutzt [7, Satz 1.32].

Die Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ wird gebraucht, um z. B. Extremwertaufgaben zu lösen, um gekrümmte Flächen im Raum zu beschreiben und um nichtlineare Gleichungen zu lösen. Wir werden uns im nächsten Abschnitt mit Extremwertaufgaben beschäftigen.

Extremwertaufgaben

Wir haben bereits lokale Extremwerte, Maxima und Minima für reelle Funktionen einer reellen Variablen eingeführt (siehe Definition 4.14). Analog definieren wir:

Definition 4.74 (Lokaler Extremwert)**.** Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $f(\boldsymbol{x}_0)$ ist lokales isoliertes Maximum genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$K_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset D$ ist und für alle $\boldsymbol{y} \in K_\delta(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ gilt, dass $f(\boldsymbol{y}) < f(\boldsymbol{x}_0)$ ist.
$f(\boldsymbol{x}_0)$ ist lokales isoliertes Minimum genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $K_\delta(\boldsymbol{x}_0) \subset D$ ist und für alle $\boldsymbol{y} \in K_\delta(\boldsymbol{x}_0) \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ gilt, dass $f(\boldsymbol{y}) > f(\boldsymbol{x}_0)$ ist.

Wir untersuchen nun, wann ein lokaler Extremwert vorliegt. Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Satzes 4.15.

Theorem 4.75 (Notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert)**.**
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und besitze in $\boldsymbol{x}_0$ einen lokalen Extremwert. Dann gilt

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{4.79}$$

d. h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \textit{für } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Richtungsvektor $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und die Funktion $g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a})$, $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion $g(t)$ besitzt in $t = 0$ ein lokales Extremum. Folglich muss nach Satz 4.15 notwendigerweise

$$0 = \frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} \tag{4.80}$$

gelten. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + (t+h)\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) \cdot h\boldsymbol{a}}{h} + \frac{o(h)}{h} \right) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{d}{dt} g(t)|_{t=0} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}.$$

Wählen wir $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_j$, erhalten wir aus (4.80)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \text{für } j = 1, 1, \ldots, n$$

und damit (4.79). □

Die Bedingung (4.79) ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Beispiel

Wir betrachten die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Es ist

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{falls } x_1 = x_2 = 0 \text{ ist.}$$

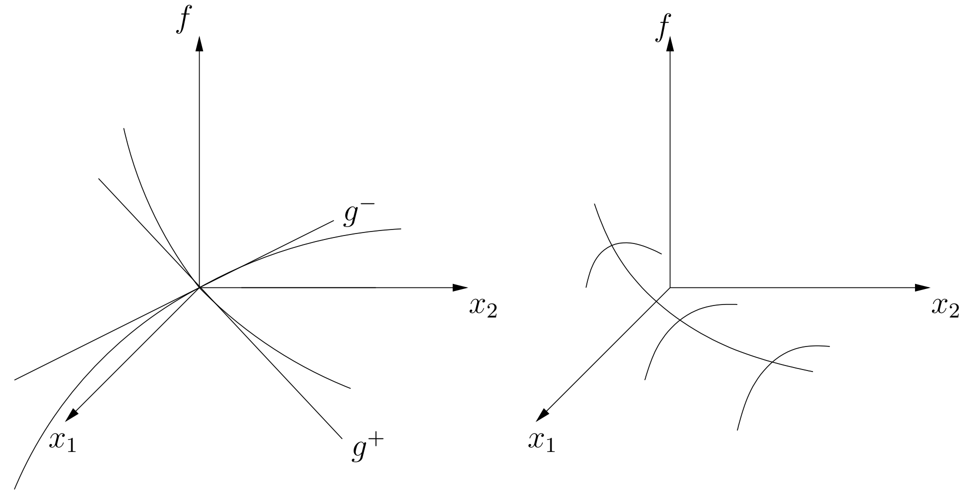


Abbildung 4.16: Graph von $f(\boldsymbol{x}) = x_1x_2$

Wir betrachten nun die Gerade $g^+ = \{(t,t), -\infty < t < +\infty\}$, die durch den Nullpunkt geht. Auf dieser Geraden ist $f(t,t) = t^2 > 0$ für $|t| > 0$. Jedoch nimmt auf der Geraden $g^- = \{(t,-t), -\infty < t < +\infty\}$ die Funktion f die Funktionswerte $f(t,-t) = -t^2$ für $|t| > 0$ an, siehe Abbildung 4.16.

Es gibt also keine Umgebung $K_\delta(0,0)$ in der f nur positive oder nur negative Werte besitzt, d. h. der Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$ ist kein lokaler Extremwert. Soolche Punkte nennt man Sattelpunkte. Es müssen zusätzliche Entscheidungsregeln aufgestellt werden, die das tatsächliche Vorliegen eines Extremwertes beschreiben.

Remark 4.76. Punkte $\boldsymbol{x}_0$ mit $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$ nennt man kritische Punkte. Die Frage lautet daher: Wann ist ein kritischer Punkt von f eine Extremalstelle, d. h. wann nimmt f in $\boldsymbol{x}_0$ sein Maximum bzw. Minimum an?

Der Fall $n = 1$

Wir sehen uns zunächst den eindimensionalen Fall an. Sei $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ zweimal stetig differenzierbar. Dann liefert der Satz von Taylor für $x \in K_\delta(x_0)$ für eine Zwischenstelle ξ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(\xi) \neq 0$ für $\xi \in K_\delta(x_0)$, dann erhalten wir die Fälle

a) Ist $f''(\xi) > 0$ in $K_\delta(x_0)$, dann folgt $f(x) > f(x_0)$ in $K_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ und es liegt ein Minimum in x_0 vor.

b) Ist $f''(\xi) < 0$ in $K_\delta(x_0)$, dann folgt $f(x) < f(x_0)$ in $K_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ und es liegt ein Maximum in x_0 vor.

Der Fall $n = 2$

Wir können im Fall $n = 2$ ähnlich vorgehen und den Satz 4.70 von Taylor als Entscheidungskriterium zur Hilfe nehmen.

Theorem 4.77 (Hinreichende Bedingung für einen lokalen Extremwert).
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar und* $\boldsymbol{x}_0 \in D$ *ein kritischer Punkt von* f*. Sei*

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{x}_0) = \left(f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - f_{x_1x_2}^2\right)(\boldsymbol{x}_0) = \det\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}(\boldsymbol{x}_0)$$

die Determinante der Hessematrix, auch Diskriminante von f *im Punkt* $\boldsymbol{x}_0$*, genannt. Dann gilt:*

a) Ist $\mathcal{D}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ *und* $f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ *(oder* $f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}_0) > 0$*), dann liegt an der Stelle* $\boldsymbol{x}_0$ *ein lokales Minimum vor.*

b) Ist $\mathcal{D}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ *und* $f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) < 0$ *(oder* $f_{x_2x_2}(\boldsymbol{x}_0) < 0$*), dann liegt an der Stelle* $\boldsymbol{x}_0$ *ein lokales Maximum vor.*

Beweis. Der Satz von Taylor für zwei Variable lautet. Für $\boldsymbol{x} \in K_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ existiert ein $\boldsymbol{\xi} \in K_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ so dass

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + (x_1 - x_1^0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) + (x_2 - x_2^0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) \\ &+ \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_1^0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{\xi}) + 2(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{\xi}) + (x_2 - x_2^0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{\xi})\right]. \end{aligned}$$

Ist $\boldsymbol{x}_0$ kritischer Punkt, dann verschwinden die ersten partiellen Ableitungen und wir erhalten mit $h_1 = x_1 - x_1^0$, $h_2 = x_2 - x_2^0$, $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{\xi})$, $a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\boldsymbol{\xi})$, $a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\boldsymbol{\xi})$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}\left[a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2\right]. \tag{4.81}$$

Wir nehmen an, dass $f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ sei. Da $f_{x_1x_1}$ stetig in $\boldsymbol{x}_0$ ist gibt es eine Umgebung $K_\delta(\boldsymbol{x}_0)$ in der $f_{x_1x_1} > 0$ ist. Damit ist auch

$$a_{11} = f_{x_1x_1}(\boldsymbol{\xi}) > 0 \quad \text{für } \boldsymbol{\xi} \in K_\delta(\boldsymbol{x}_0).$$

Wir schreiben (4.81) in folgender Form:

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}a_{11}\left[(h_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}h_2)^2 + \frac{h_2^2}{(a_{11})^2}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\right].$$

Aus der Voraussetzung $\mathcal{D}(\boldsymbol{x}_0) > 0$ folgt wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitungen, dass auch $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ist bei geeigneter Wahl von δ. Folglich gilt $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)$ und die Aussage a) ist bewiesen.
Analog können wir zeigen: Falls $f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) < 0$ und damit auch $a_{11} < 0$ ist, folgt die Aussage b). □

Remark 4.78. Man bezeichnet den Ausdruck

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2) &= a_{11}h_1^2 + 2a_{12}h_1h_2 + a_{22}h_2^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \cdot h_ih_j = \boldsymbol{h}^\top A\boldsymbol{h} \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

als quadratische Form. Q heißt positiv definit, falls $Q(\boldsymbol{h}) > 0$ für $\boldsymbol{h} \neq 0$, negativ definit, falls $Q(\boldsymbol{h}) < 0$ für $\boldsymbol{h} \neq 0$. Satz 4.77 kann dann auch folgendermaßen definiert werden.

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}_0 \in D$ zweimal stetig differenzierbar, $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ und

$$Q(h_1, h_2) = \sum_{i,k=1}^{2} f_{x_ix_k}(\boldsymbol{x}_0)h_ih_k = \mathbf{h}^\top H(\boldsymbol{x}_0)\mathbf{h} \tag{4.82}$$

sei positiv definit. Dann besitzt f in $\boldsymbol{x}_0$ ein lokales Minimum. Ist $Q(h_1, h_2)$ in (4.82) negativ definit, dann besitzt f in $\boldsymbol{x}_0$ ein lokales Maximum.Dies folgt aus der Taylorformel

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h}^\top H(\xi)\mathbf{h}$$

wobei $A = H$ ist.

Der Fall $n > 2$

Die obige Formulierung ermöglicht eine hinreichende Bedingung für Extremwerte von Funktionen von n Variablen zu formulieren.

Theorem 4.79. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $\boldsymbol{x}_0 \in D$ zweimal stetig differenzierbar und $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Falls*

$$Q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)h_ih_k = \boldsymbol{h}^\top H(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} \tag{4.83}$$

positiv definit ist, dann liegt in $\boldsymbol{x}_0$ ein lokales Minimum, falls $Q(h_1, \dots, h_n)$ negativ definit ist, ein lokales Maximum vor.

$$H(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}$$

ist die Hesse-Matrix im Punkt $\boldsymbol{x}_0$.

Otto Hesse (1811-1874) arbeitete in Königsberg, Heidelberg und München.

Beispiel

Wir sehen uns folgendes Standortproblem an.
Auf einem Firmengelände befinden sich die Standorte P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Es soll ein Zentrallager P so errichtet werden, dass die Transportkosten, die proportional zum Quadrat des Abstands von P zu P_i sind, minimal werden. Seien $P_i = (a_i, b_i), P = (x_1, x_2)$ und

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \left((x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2\right)$$

die Transportkostenfunktion. Es ist das Minimum von f zu berechnen. Wir berechnen die kritischen Punkte $\boldsymbol{x}_0$ mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 2(x_1^0 - a_i) = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) &= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 2(x_2^0 - b_i) = 0.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}x_1^0 \sum_{i=1}^{N} c_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 a_i,\\ x_2^0 \sum_{i=1}^{N} c_i^2 &= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 b_i.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\boldsymbol{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 a_i}{\sum_{i=1}^{N} c_i^2} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 b_i}{\sum_{i=1}^{N} c_i^2} \end{pmatrix}$$

ein kritischer Punkt. Wir überprüfen die hinreichende Bedingungen: Die Hesse Matrix lautet

$$H(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{N} c_i^2 & 0 \\ 0 & 2\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \end{pmatrix}$$

und $\boldsymbol{h}^\top H(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = 2\sum_{i=1}^{N} c_i^2 (h_1^2 + h_2^2)$ ist positiv definit. Damit nimmt f in $\boldsymbol{x}_0$ sein Minimum an und das Zentrallager ist am Standort

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 a_i}{\sum_{i=1}^{N} c_i^2} \\ \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 b_i.}{\sum_{i=1}^{N} c_i^2} \end{pmatrix}$$

zu errichten.

Remark 4.80. Die Hesse Matrix H ist eine symmetrische Matrix. Damit besitzt sie reelle Eigenwerte und ist diagonalisierbar. Positive bzw. negative Definitheit der entsprechenden quadratischen Form liegt vor, falls die Hesse Matrix nur positive bzw. nur negative Eigenwerte besitzt. Wir formulieren diese Aussagen etwas genauer in folgendem Lemma:

Lemma 4.81. *Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix mit rellen Einträgen, d.h. $A = A^\top$. Dann gilt*

- *(i) Alle Eigenwerte von A sind reell.*
- *(ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal.*
- *(iii) Für jeden Eigenwert λ gilt*

  $$f_A(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$$
  $$f_A(E_\lambda^\perp) \subseteq E_\lambda^\perp.$$

  Hierbei ist E_λ der Eigenraum zum Eigenwert λ, $E_\lambda^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0 \; \forall y \in E_\lambda\}$ sein orthogonales Komplement.
- *(iv) Die Matrix A ist diagonalisierbar und besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*
- *(v) Besitzt A nur positive bzw. nur negative Eigenwerte, genau dann ist die quadratische Form $\boldsymbol{h}^\top A\boldsymbol{h}$ positiv bzw. negativ definit. In diesem Fall sagt man auch, A ist positiv bzw. negativ definit.*

Beweis. (i): Sei λ ein Eigenwert von A und v der zugehörige Eigenvektor. Dann gilt für das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, A^\top v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

Es folgt $\lambda = \overline{\lambda}$.

(ii) Seien λ und μ verschiedene Eigenwerte von A mit den zughörigen Eigenvektoren v_λ und v_μ. Wir erhalten:

$$\lambda\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = \langle \lambda v_\lambda, v_\mu\rangle = \langle Av_\lambda, v_\mu\rangle = \langle v_\lambda, Av_\mu\rangle = \mu\langle v_\lambda, v_\mu\rangle.$$

Da $\lambda \neq \mu$ ist, muss $\langle v_\lambda, v_\mu\rangle = 0$ sein, d.h. v_λ und v_μ sind zueinander orthogonal.

(iii) Sei $v \in E_\lambda$. Dann ist auch das Bild $f_A(v) = Av = \lambda v$ aus E_λ. Für $w \in E_\lambda^\perp$ und $v \in E_\lambda$ folgt:

$$0 = \langle w, \lambda v\rangle = \langle w, Av\rangle = \langle Aw, v\rangle.$$

Damit ist $Aw \in E_\lambda^\perp$.

(iv) Wir nehmen an, dass es keine Basis aus Eigenvektoren gibt, d.h. die lineare Hülle aller Eigenvektoren $v_{\lambda_1}, \cdots, v_{\lambda_k}, k < n$ bildet einen echten Teilraum von V; $\dim V = k$,

$\dim V^\perp = n - k$. Die Vektoren $v \in V$ und $w \in V^\perp$ seien beliebig gewählt. Nach (iii) gilt, dass

$$\langle v, Aw\rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} c_{\lambda_i} v_{\lambda_i}, Aw\rangle = \sum_{i=1}^{k} c_{\lambda_i} \langle a v_{\lambda_i}, w\rangle = 0.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f_A|_{V^\perp} :& V^\perp \to V^\perp \\ & w \to Aw. \end{aligned}$$

Da $V^\perp \neq \{0\}$ ist, besitzt diese mindestens einen Eigenwert λ_0 mit dem entsprechenden Eigenvektor $v_0 \in V^\perp$. λ ist aber auch ein Eigenwert von A und daher muss $v_0 \in V$ sein. Es folgt, dass

$$v_0 \in V^\perp \cap V = \{0\},$$

was zu einem Widerspruch führt.

(v) Betrachten wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, dann kann A dargestellt werden als

$$A = \tilde{H} D \tilde{H}^\top.$$

Hierbei ist $\tilde{H}$ die orthogonale Matrix, die aus orthonormalisierten Eigenvektoren als Spaltenvektoren besteht. Die quadratische Form

$$\boldsymbol{h}^\top A \boldsymbol{h} = \langle \boldsymbol{h}, A\boldsymbol{h}\rangle = \langle \boldsymbol{h}, \tilde{H} D \tilde{H}^\top . \boldsymbol{h}\rangle = \langle \tilde{H}^\top \boldsymbol{h}, D \tilde{H}^\top . \boldsymbol{h}\rangle = \langle g, Dg\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i^2$$

ist genau dann positiv bzw. negativ definit, falls alle Eigenwerte λ_i positiv bzw. negativ definit sind. □

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Häufig wird die Menge, in der ein Maximum bzw. Minimum einer Funktion gesucht wird, durch weitere Bedingungen, sogenannte Nebenbedingungen, eingeschränkt.

Beispiel

Gegeben sei ein Quader. Wie sind Höhe x_1, Breite x_2 und Tiefe x_3 zu wählen, so dass der Oberflächeninhalt unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ maximal wird.
Die Funktion, auch Zielfunktion genannt, deren Maximum gesucht wird, ist die

$$\text{Oberfläche} = f(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3). \tag{4.84}$$

Weiterhin soll gelten

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10. \tag{N}$$

Durch Auflösen von (N) und Einsetzen in (4.84) erhalten wir eine reine Extremwertaufgabe von zwei Variablen. Dieses Vorgehen kann schwierig sein, insbesondere wenn mehrere Nebenbedingungen vorliegen. So wurde von Joseph Louis Lagrange (1736-1813) ein Verfahren entwickelt, Lagrangesche Multiplikatorenmethode genannt, um Extremwerte unter Nebenbedingungen zu berechnen. Wir stellen dieses Verfahren vor und erläutern es an Beispielen.

Lagrangesche Multiplikatorenmethode

Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein Teilgebiet $D_0 \subset D$, das durch die Gleichung

$$g(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{N2}$$

beschrieben wird.
Die Funktion g sei ebenfalls stetig differenzierbar. Die Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen lautet: Man finde lokale Extremwerte von f in D_0.

Theorem 4.82 (Notwendige Bedingung)**.** *Es seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Weiterhin nehmen wir an, dass*

$$\nabla g(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0} \tag{4.85}$$

sei. Notwendig dafür, dass an der Stelle $\boldsymbol{x}_0$ ein lokaler Extremwert der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(\boldsymbol{x}) = 0$ auftritt, ist die folgende Bedingung:
Für die Funktion $F(\boldsymbol{x}, \lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$, $F : D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ existiere ein Lagrange-Multiplikator λ_0, so dass

$$\nabla_{\boldsymbol{x},\lambda} F(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \boldsymbol{0},$$

d. h. es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = 0. \tag{4.86}$$

Im Beweis dieses Satzes werden Auflösungssätze benutzt. Wir verzichten auf den Beweis und verweisen auf [9, Abschnitt 9.3].

Beispiel

Wir betrachten das Beispiel (4.84). Es ist

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0$$

und

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 10).$$

Aus der Bedingung $\nabla_{\boldsymbol{x},\lambda} F(\boldsymbol{x},\lambda) = \mathbf{0}$ erhalten wir die 4 Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\lambda) = 2(x_2 + x_3) + \lambda = 0, \tag{4.87}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(\boldsymbol{x},\lambda) = 2(x_1 + x_3) + \lambda = 0, \tag{4.88}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(\boldsymbol{x},\lambda) = 2(x_1 + x_2) + \lambda = 0, \tag{4.89}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\boldsymbol{x},\lambda) = x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0. \tag{4.90}$$

Aus (4.87) folgt $\lambda = -2(x_2 + x_3)$. Einsetzen in (4.88) und (4.89) ergibt $2(x_1 - x_2) = 0$ und $2(x_1 - x_3) = 0$, d. h. $x_1 = x_2 = x_3$. Schließlich folgt aus (4.90)

$$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = \frac{10}{3},\ \lambda_0 = -\frac{40}{3}$$

und $(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{-40}{3},\right)$ ist ein kritischer Punkt von F. Weiterhin ist $\boldsymbol{x}_0$ kritischer Punkt von f in D_0.

Wir formulieren jetzt hinreichende Bedingungen für das Auftreten von Extremwerten.

Theorem 4.83 (Hinreichende Bedingungen)**.** *Es seien $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen, $(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)$ sei ein kritischer Punkt von F und $\nabla g(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$. Falls die quadratische Form*

$$Q = Q(h_1, \ldots, h_n)(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) h_i h_j \tag{4.91}$$

für Vektoren $\boldsymbol{h}$ mit

$$\nabla g(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h} = 0 \tag{4.92}$$

positiv (negativ) definit ist, liegt ein Minimum (Maximum) vor.

Remark 4.84. Im Beweis von Satz 4.83 fließt folgende Überlegung ein:
Es sei $\nabla_{\boldsymbol{x},\lambda} F(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) = 0$. Die quadratische Form, analog zu (4.83), lautet für die Funktion $F(\boldsymbol{x},\lambda) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} Q_F(h_1, \ldots, h_n, l) &= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) h_i h_k + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (\lambda g)}{\partial x_i \partial \lambda}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) h_i l + \frac{\partial^2 (\lambda g)}{\partial \lambda^2}(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) l^2 \\ &= Q(h_1, \ldots, h_n)(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0) + 2l \nabla g(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{h}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $l = \lambda - \lambda_0$. Gilt (4.92), dann wird die positive (negative) Definitheit von Q_F durch (4.91) beschrieben.

Beispiel

Wir betrachten die Extremwertaufgabe: Welche Punkte der Ellipse $4x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$ haben vom Punkt $P = (2, 0)$ extremalen Abstand?
Zur Vereinfachung betrachten wir als Zielfunktion das Quadrat des Abstandes

$$f(x_1, x_2) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{P}|^2 = (x_1 - 2)^2 + x_2^2$$

mit der Nebenbedingung, dass $\boldsymbol{x}$ auf der Ellipse liegen soll:

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0.$$

Es ist

$$F(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + \lambda(4x_1^2 + x_2^2 - 4)$$

und die Gleichungen (4.87) - (4.90) lauten

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) + 8\lambda x_1 = 0, \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0, \tag{4.94}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 4x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0. \tag{4.95}$$

Dieses System besitzt folgende Lösungen $(\boldsymbol{x}_0, \lambda_0)$:

$$\begin{array}{ll} (\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \lambda_0^{(1)}) = (1, 0, \frac{1}{4}), & (\boldsymbol{x}_0^{(2)}, \lambda_0^{(2)}) = (-1, 0, -\frac{3}{4}), \\ (\boldsymbol{x}_0^{(3)}, \lambda_0^{(3)}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}, -1) & (\boldsymbol{x}_0^{(4)}, \lambda_0^{(4)}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}, -1). \end{array}$$

Die entsprechenden Funktionswerte lauten

$$\begin{array}{ll} f_1 = f(1, 0) = 1, & f_2 = f(-1, 0) = 9, \\ f_3 = f(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{84}{9}, & f_4 = f(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}) = \frac{84}{9}. \end{array}$$

Man vermutet sofort, dass f_1, f_2 minimale Werte und $f_3 = f_4$ maximale Werte sind.
Wir überprüfen die hinreichenden Bedingungen. Die quadratische Form (4.91) lautet

$$Q = Q(h_1, h_2) = (2 + 8\lambda_0)h_1^2 + (2 + 2\lambda_0)h_2^2, \tag{4.96}$$

wobei die Vektoren $\boldsymbol{h}$ der Bedingung (4.92) genügen:

$$8x_1h_1 + 2x_2h_2|_{\boldsymbol{x}_0} = 0. \tag{4.97}$$

Wir sehen uns jetzt die kritischen Werte $(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \lambda_0^{(1)})$, $(\boldsymbol{x}_0^{(2)}, \lambda_0^{(2)})$, $(\boldsymbol{x}_0^{(3)}, \lambda_0^{(3)})$, $(\boldsymbol{x}_0^{(4)}, \lambda_0^{(4)})$ an.

1. Fall: $(\boldsymbol{x}_0^{(1)}, \lambda_0^{(1)}) = (1, 0, \frac{1}{4})$.
Die Beziehung (4.97) liefert $8h_1 = 0$, woraus $h_1 = 0$ folgt. Damit wird nach (4.96)

$$Q_1(h_1, h_2) = \frac{5}{2}h_2^2,$$

positiv definit.
2. Fall: $(\boldsymbol{x}_0^{(2)}, \lambda_0^{(2)}) = (-1, 0, -\frac{3}{4})$.
In diesem Fall folgt aus (4.97) ebenfalls $h_1 = 0$ und

$$Q_2(h_1, h_2) = (2 + 2\lambda_0^{(2)})h_2^2 = \frac{1}{2}h_2^2$$

ist positiv definit.
3. Fall: $(\boldsymbol{x}_0^{(3)}, \lambda_0^{(3)}) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{5}, -1)$.
Die Beziehung (4.97) liefert $-\frac{16}{3}h_1 + \frac{4}{3}\sqrt{5}h_2 = 0$ und

$$Q_3(h_1, h_2) = -6h_1^2$$

ist negativ definit.
4. Fall: $(\boldsymbol{x}_0^{(4)}, \lambda_0^{(4)}) = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{5}, -1)$.
Wir erhalten aus (4.97) $-\frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{5}h_2 = 0$ und schließlich ist

$$Q_4(h_1, h_2) = -6h_1^2$$

negativ definit.

Differentation von vektorwertigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Bisher haben wir sogenannte sklare Feldfunktionen $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ betrachtet. Möchten wir jedoch Transformationen des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$, Strömungsfelder, elektromagnetische Felder oder Spannungsvektoren differenzieren, so reicht unsere bisherige Vorgehensweise nicht aus.

Definition 4.85. Eine Abbildung $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die jedem $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ einen Vektor $\boldsymbol{y} = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x}))^\top$ zuordnet, heißt vektorwertige Funktion oder Feldfunktion. Die Funktionen $f_i : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$, heißen die Komponenten von $\boldsymbol{f}$.

Die Eigenschaften der Komponenten f_i von $\boldsymbol{f}$ bestimmen die Eigenschaften von $\boldsymbol{f}$.

Lemma 4.86. *$\boldsymbol{f}$ ist genau dann stetig im Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$, wenn alle Komponenten im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ stetig sind.*

Beweis. Wir erinnern an den Begriff der Stetigkeit in metrischen Räumen, siehe Definition 3.37, 3.38, [7]. Die Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind mit der euklidischen Norm versehen:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Feldfunktion $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig im Punkt $\boldsymbol{x} \in B$ falls aus $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_k\|_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_k) = 0$ folgt, dass auch

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\|_{\mathbb{R}^m} = 0$$

ist. Nun ist

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)\|_{\mathbb{R}^m} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty} |f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}_k)| = 0$ für jede Komponente $i = 1, 2, \ldots, m$ ist. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir kommen nun zur Differenzierbarkeit der Feldfunktion $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Definition 4.87. Die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist partiell, bzw. total differenzierbar, wenn ihre Komponenten $f_i : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ partiell bzw. total differenzierbar sind. Ebenso ist sie stetig differenzierbar bzw. ihre Richtungsableitung existieren, falls dies für ihre Komponenten zutrifft. Dabei ist

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{a}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \boldsymbol{a}} \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.88. *Die totale Ableitung einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine $m \times n$ Matrix M, die der Beziehung*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h}), \tag{4.98}$$

genügt. Hierbei ist

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = M(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{4.99}$$

eine $m \times n$ Matrix.

Beweis. Nach Definition 4.87 ist $\boldsymbol{f}$ total differenzierbar, wenn seine Komponenten total differenzierbar sind. Daher ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) &= \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) + \nabla f_1 \cdot \boldsymbol{h} + o_1(\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) + \nabla f_m \cdot \boldsymbol{h} + o_m(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + M(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h} + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h}),\end{aligned}$$

wobei $M(\boldsymbol{x})$ durch (4.99) gegeben ist. □

Remark 4.89. Die Matrix $D\boldsymbol{f}$ wird auch Vektorgradient, Funktionalmatrix oder Jacobi-Matrix des Feldes $\boldsymbol{f}$ genannt (Carl Gustav Jacobi lebte 1804-1851 in Berlin und Königsberg). Man schreibt auch

$$D\boldsymbol{f} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = J.$$

Ist $m = n$, dann kann man die Determinante von $D\boldsymbol{f}$ berechnen. Sie heißt Funktionaldeterminante oder Jacobi-Determinante:

$$\det D\boldsymbol{f} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \det J.$$

Die Funktionaldeterminante wird eine wichtige Rolle bei der Substitutionsregel für die Integration von Funktionen mehrerer Variabler spielen.

Beispiel

Wir betrachten kartesische Koordinaten $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ und die Polarkoordinaten $x_1 = r$, $x_2 = \phi$ im $\mathbb{R}^2$. Es gilt

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2) = f_1(r, \phi) = r \cos \phi, \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2) = f_2(r, \phi) = r \sin \phi. \end{aligned}$$

Diese Formeln beschreiben die Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten. Die Funktionaldeterminante lautet:

$$\begin{aligned}\det(D_{r,\phi}\boldsymbol{f}) &= \det \left(\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(r, \phi)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.\end{aligned}$$

Allgemein werden Transformationen folgendermaßen beschrieben:

Definition 4.90. Sei $\boldsymbol{f} : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Vektorfunktion, die das offene und zusammenhängende Gebiet $B \subset \mathbb{R}^n$ in $\boldsymbol{f}(B) \subset \mathbb{R}^n$ abbildet:

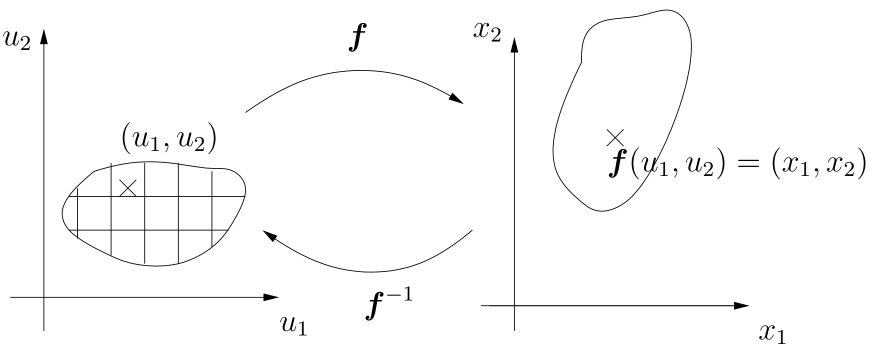
$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}.$$

Weiterhin sei $\boldsymbol{f} : B \to \boldsymbol{f}(B)$ eindeutig und die inverse $\boldsymbol{f}^{-1} : \boldsymbol{f}(B) \to B$ existiere und sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\det(D\boldsymbol{f}) = \det J > 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in B.$$

Dann nennt man $\boldsymbol{f}$ eine Transformation.

Als Beispiel betrachten wir eine Transformation: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



u_1 =const und u_2 =const ergeben achsenparallele Geraden in der u_1-u_2–Ebene (bzw. im $\mathbb{R}^n$). Die Bilder der achsenparallelen Geraden $f_1(u_1 = \text{const}, u_2), f_2(u_1, u_2 = \text{const})$ sind krummlinig in der x_1-x_2–Ebene (bzw. im $\mathbb{R}^n$).

Beispiel

Es sei $u_1 = r, u_2 = \phi,\ f_1(r, \phi) = r\cos\phi = x_1,\ f_2(r, \phi) = r\sin\phi = x_2$.
Außerhalb des Nullpunkts ist $\boldsymbol{f}$ eine Transformation, da

$$\det(D\boldsymbol{f}) = r.$$

Geometrische Veranschaulichung der Funktionaldeterminante

Wir sehen uns eine Transformation: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an. Wir betrachten in der $u_1 - u_2$-Ebene ein Rechteck mit den Eckpunkten

$$\boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_0 + \begin{pmatrix} h_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_0 + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

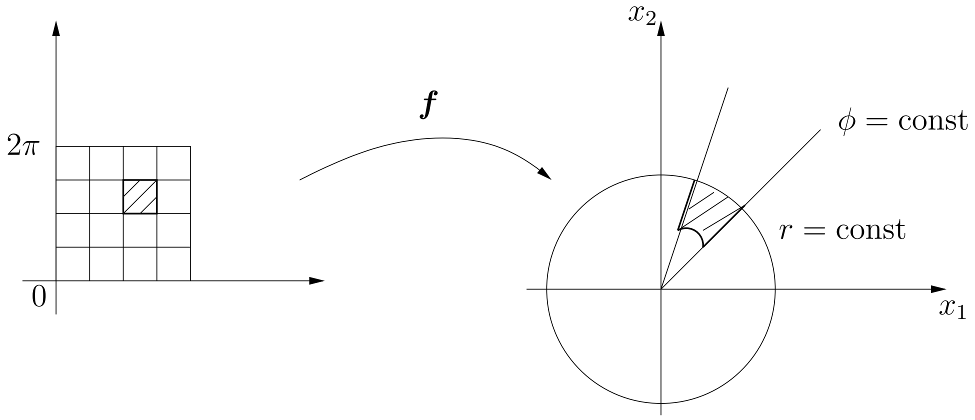
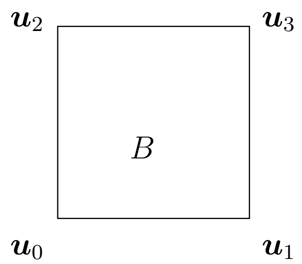
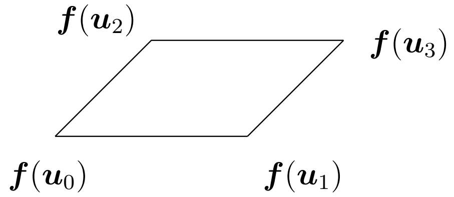


Abbildung 4.17: Halbstreifen



Durch die Transformation $\boldsymbol{f}$ geht dieses Rechteck näherungsweise in ein Parallelogramm über, das durch die Vektoren

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0) \approx \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}_0)h_1,$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0) \approx \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_2}(\boldsymbol{u}_0)h_2$$



aufgespannt wird (h_1, h_2 sind klein). Außerdem gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}\operatorname{area} \boldsymbol{f}(B) &\approx \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_1} h_1 & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_2} h_2 \\ \frac{\partial f_2(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_1} h_1 & \frac{\partial f_2(\boldsymbol{u}_0)}{\partial u_2} h_2 \end{pmatrix} \right| \\ &\approx |\det J(\boldsymbol{u}_0)| h_1 h_2 = \det J(\boldsymbol{u}_0) \operatorname{area} B.\end{aligned}$$

Im $\mathbb{R}^3$ haben wir entsprechend:

$$\operatorname{vol} \boldsymbol{f}(B) \approx |\det J(\boldsymbol{u}_0)| \operatorname{vol} B. \tag{4.100}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.1
Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen erster Ordnung.
a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$, b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$
c) $f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z)$, d) $f(x, y, z) = xe^y/z \quad (z \neq 0)$

Aufgabe 18.2
Für jede Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und jedes $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$N_c(f) := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c \},$$

die sogenannten Höhen–oder*Niveaulinien* von f. Veranschaulichen Sie die folgenden Funktionen, indem Sie die Niveaulinien N_c für $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ skizzieren:

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad g(x, y) = xy, \qquad h(x, y) = y^2 - x^2.$$

Aufgabe 18.3
Der Roboter I schafft Steigungen bis 45%. Er steht auf der Fläche

$$z = f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$$

im Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Zeigen Sie, daß er auf "direktem Weg", d.h. entlang

$$(x, y, z) = (t, t, f(t, t)), \quad 0 \leq t \leq 1/2$$

zum Punkt $(1/2, 1/2, f(1/2, 1/2))$ gelangen kann. Roboter II ist nicht so gut und schafft nur 33% Steigung. Finden Sie einen Weg, z.B. bestehend aus drei Strecken in (x, y), auf dem Roboter II von $(0, 0, 0)$ nach $(1/2, 1/2, f(1/2, 1/2))$ gelangen kann.

Hinweis. Es kann hilfreich sein, zunächst wieder die Höhenlinien von f zu skizzieren, und so eine geometrische Vorstellung möglicher Wege für Roboter II zu entwickeln.

Aufgabe 18.4
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $\vec{u} := (1,2)$ und $\vec{v} := (-1,1)$ gelte

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -1\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = 2\,.$$

Bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial \vec{w}}(x_0, y_0)$ für $\vec{w} = (1,1)$. Geben Sie die Richtung $\vec{h}$ mit $\|\vec{h}\| = 1$ an, für die $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 18.5
Man bestimme ∇f für

a) $f(x,y) = x + \ln(1 + x^2 + 3y^2)$, b) $g(x,y,z) = \tanh\left(\dfrac{x}{1+y^2} + z\right)$

Aufgabe 18.6
Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom zweiten Grades um den Entwicklungspunkt P.

a) $f(x,y,z) = xe^z - y^2\,,\quad P = (1,-1,0)$, b) $f(x,y) = \arctan(xy)\,,\quad P = (1,1)$.

Aufgabe 18.7
Zeigen Sie die Produktregel

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\Delta g\,,$$

wobei $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar seien und $\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f$ ist.

Aufgabe 18.8
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie die Art der Extrema an für

a) $f : B \to \mathbb{R}, \qquad B := [-1,1] \times [-1,1], \qquad f(x,y) := 1 - |x| - |y|$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^3 - x + 2xy + y^2$.

Hinweise. Bei a) sollen Sie nicht rechnen; es reicht eine geometrische Argumentation. Bei b) machen Sie sich bitte den Unterschied zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung für Extrema klar. Skizzieren Sie die Funktionen. Dieser Hinweis gilt auch für die weiteren Aufgaben.

Aufgabe 18.9
Bestimmen Sie alle lokalen Extrema und geben Sie die Art der Extrema an für

a) $f : B \to \mathbb{R}, \qquad B = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 36\,\}, \qquad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2$

Aufgabe 18.10
Finden Sie die Extrema von $f(x,y) = xy$ auf der Kreislinie $x^2 + y^2 = 1$ durch a) Auflösen und Einsetzen und b) mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode.

Aufgabe 18.11
Die Funktion $f : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y,z) := x + y + z$. Bestimmen Sie das Minimum von f unter der Nebenbedingung

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \qquad (a,b,c > 0)\,,$$

wobei Sie annehmen dürfen, daß ein eindeutiges Minimum existiert.

Aufgabe 18.12
Beweisen Sie die folgende Kettenregel für vektorwertige Funktionen (wobei n und/oder m, l auch gleich 1 sein dürfen).
Satz. Seien $\vec{g} : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\vec{f} : \vec{g}(B) \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist auch die Komposition $\vec{f} \circ \vec{g} : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ stetig differenzierbar und es gilt

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(x) = D(\vec{f}(\vec{g}(x)) = (D\vec{f})(\vec{g}(x))(D\vec{g})(x)\,,$$

d.h. die Jacobi-Matrix der Komposition $\vec{f} \circ \vec{g}$ an der Stelle x ist das Matrixprodukt der Jacobi-Matrix von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{g}(x)$ und der Jacobi-Matrix von $\vec{g}$ an der Stelle x.
Hinweis: ein eleganter und kurzer Beweis benutzt direkt die Definition der Jakobi-Matrix

$$\vec{f}(x+h) = \vec{f}(x) + (D\vec{f})(x)h + o(h)$$

Aufgabe 18.13
Berechnen Sie mit Hilfe obiger Kettenregel die Jacobi-Matrix der Funktion $\vec{f} \circ \vec{g}$ mit

$$\begin{array}{rccc} \vec{g}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rccc} \vec{f}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Aufgabe 18.14
Die Funktion $h : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $h(x,y) := f(u(x,y), v(x,y))$, wobei

$$u(x,y) := e^{-x-y}\,, \qquad v(x,y) := e^{xy}\,, \qquad f(u,v) := \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\,.$$

a) Berechnen Sie Dh unter Verwendung der Kettenregel.
b) Berechnen Sie Dh indem Sie h explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 18.15
Betrachte
$\vec{z} : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ sowie $\vec{k} : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{z}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{k}(r, \phi, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme $D\vec{z}$ und $\det D\vec{z}$ und skizziere das Bild $\vec{z}(S)$ der Strecke

$$S := \{(r, \phi, z) = (1, 0, 0) + t(1, 2\pi, 1) : t \in [0, 1]\}.$$

b) Man bestimme $D\vec{k}$ und $\det D\vec{k}$ und skizziere die Bilder $\vec{k}(S_1), \vec{k}(S_2)$ der Strecken

$$S_1 := \{(r, \phi, \theta) = (1, \pi/2, t) : t \in [0, \pi]\}, \quad S_2 := \{(r, \phi, \theta) = (1, t, \pi/4) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

4.4 Integration von Funktionen mehrerer Variabler

Die Integration im $\mathbb{R}^n$ kann bei bestimmter Gestalt der Integrationsgebiete auf die Integration im $\mathbb{R}^1$ zurückgeführt werden. Diese Gebiete heißen Normalbereiche. Die Integration über Normalbereiche wird durch mehrfache Integration von sogenannten Parameterintegralen eingeführt. Wir müssen also zunächst klären, was wir unter einem Normalbereich und unter einem Parameterintegral verstehen.

Parameterabhängige Integrale

Seien $a : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, b : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ zwei stetige Funktionen, wobei

$$a(\boldsymbol{x}) \le b(\boldsymbol{x}) \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in B$$

gilt. Weiterhin führen wir das Gebiet $B^* = \{(\boldsymbol{x}, \xi) : \boldsymbol{x} \in B,\ a(\boldsymbol{x}) \le \xi \le b(\boldsymbol{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein.

Definition 4.91. Sei $f : B^* \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Das eindimensionale Integral

$$\int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi = \Phi(\boldsymbol{x}) \tag{4.101}$$

heißt parameterabhängiges Integral. Die Werte $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ sind fest, aber beliebig, und heißen Parameter.

In Bezug auf die Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}$ gilt folgende Aussage:

Theorem 4.92. *Seien a, b in B und f in B^* stetig. Dann ist auch das parameterabhängige Integral*

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi \tag{4.102}$$

stetig, d. h. genauer: $\Phi : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis. Wir wählen ein $\boldsymbol{x}_0 \in B$. Wir müssen zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so dass

$$|\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{für } \boldsymbol{x} \text{ mit } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta.$$

Wir schätzen nun das Parameterintegral (4.102) ab. Es ist

$$|\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}_0)| = \left| \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}, \xi)\, d\xi - \int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{b(\boldsymbol{x}_0)} f(\boldsymbol{x}_0, \xi)\, d\xi \right|. \tag{4.103}$$

Wir betrachten nun ein gemeinsames Integrationsintervall, indem wir annehmen

$$a(\boldsymbol{x}_0) \le a(\boldsymbol{x}), \quad b(\boldsymbol{x}) \le b(\boldsymbol{x}_0).$$

Dann wird

$$\int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{b(\boldsymbol{x}_0)} \cdots = \int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{a(\boldsymbol{x})} \cdots + \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \cdots + \int_{b(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x}_0)} \cdots. \tag{4.104}$$

Falls $a(\boldsymbol{x}) \leq a(\boldsymbol{x}_0), b(\boldsymbol{x}) \leq b(\boldsymbol{x}_0)$ ist, gilt:

$$\int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{b(\boldsymbol{x}_0)} \cdots = \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \cdots - \int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{a(\boldsymbol{x})} \cdots + \int_{b(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x}_0)} \cdots.$$

Die übrigen Fälle können analog behandelt werden. Somit können wir unter Beachtung von (4.104) die Gleichung (4.103) folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} |\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}_0)| &= \left| \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \left(f(\boldsymbol{x},\xi) - f(\boldsymbol{x}_0,\xi)\right) d\xi - \int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{a(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}_0,\xi)\, d\xi - \int_{b(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x}_0)} f(\boldsymbol{x}_0,\xi)\, d\xi \right| \\ &\leq \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} |f(\boldsymbol{x},\xi) - f(\boldsymbol{x}_0,\xi)|\, d\xi + \int_{a(\boldsymbol{x}_0)}^{a(\boldsymbol{x})} |f(\boldsymbol{x}_0,\xi)|\, d\xi + \int_{b(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x}_0)} |f(\boldsymbol{x}_0,\xi)|\, d\xi. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Da a, b und f stetig sind können wir für ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ ein $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon})$ finden, so dass gilt

$$|f(\boldsymbol{x},\xi) - f(\boldsymbol{x}_0,\xi)| < \tilde{\varepsilon}, \quad |a(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x}_0)| < \tilde{\varepsilon}, \quad |b(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{x}_0)| < \tilde{\varepsilon}$$

für $|(\boldsymbol{x},\xi) - (\boldsymbol{x}_0,\xi)| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \tilde{\delta}$. Damit wird (4.105) unter Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf die letzten beiden Terme abgeschätzt

$$\begin{aligned} |\Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}_0)| &\leq \tilde{\varepsilon}|b(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x}_0,\eta)||a(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x}_0)| \\ &\quad + |f(\boldsymbol{x}_0,\hat{\eta})||b(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{x}_0)| \\ &\leq \tilde{\varepsilon} M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hierbei ist M eine Konstante, die die Beschränktheit von $|b(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})|$ charakterisiert. Der Wert $|f(\boldsymbol{x}_0,\eta)|$ wird für ein η mit $a(\boldsymbol{x}_0) \leq \eta \leq a(\boldsymbol{x})$ betrachtet und der Wert $f(\boldsymbol{x}_0,\hat{\eta})$ für ein $\hat{\eta}$ mit $b(\boldsymbol{x}) \leq \hat{\eta} \leq b(\boldsymbol{x}_0)$. Setzen wir $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{M}$, folgt die Behauptung. □

Differentiation von Parameterintegralen

Wie wir gesehen haben, überträgt sich die Stetigkeit von a, b und f auf die Stetigkeit des Parameterintegrals

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\xi)\, d\xi.$$

Ähnliches gilt für die Differentiation. Wir betrachten im folgenden Satz die partielle Ableitung nach der Variablen x_1. Eine analoge Aussage gilt auch für andere partielle Ableitungen.

Theorem 4.93. *Seien $a : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, b : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial a(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial b(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}.$$

$f : B^* \to \mathbb{R}$ sei stetig und besitze in B^* die stetige partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\xi)\,d\xi\right) \\ &= \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\xi)\,d\xi + \frac{\partial b(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} f(\boldsymbol{x}, b(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial a(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} f(\boldsymbol{x}, a(\boldsymbol{x})). \end{aligned} \tag{4.106}$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{\Phi(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)-\Phi(\boldsymbol{x})}{h_1} = \int_{a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)}^{b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)} \frac{1}{h_1} f(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1,\xi)\,d\xi - \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \frac{1}{h_1} f(\boldsymbol{x},\xi)\,d\xi.$$

Wir wollen beide Integrale über einem gemeinsamen Integrationsbereich betrachten. Dazu führen wir für jedes $\boldsymbol{x}$ die Grenzen

$$\begin{aligned} a_{\max}(\boldsymbol{x}) &= \max\{a(\boldsymbol{x}), a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)\}, \\ b_{\min}(\boldsymbol{x}) &= \min\{b(\boldsymbol{x}), b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)\} \end{aligned}$$

ein. Wir betrachten den Spezialfall $a_{\max}(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}), b_{\min}(\boldsymbol{x}) = b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)$. Die anderen Fälle können analog untersucht werden. Dann wird

$$\begin{aligned} \int_{a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)}^{b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)} \dots &= \int_{a_{\max}(\boldsymbol{x})}^{b_{\min}(\boldsymbol{x})} \dots + \int_{a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)}^{a_{\max}(\boldsymbol{x})} \dots \;, \\ \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \dots &= \int_{a_{\max}(\boldsymbol{x})}^{b_{\min}(\boldsymbol{x})} \dots + \int_{b_{\min}(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x})} \dots \;. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)-\Phi(\boldsymbol{x})}{h_1} &= \int_{a_{\max}(\boldsymbol{x})}^{b_{\min}(\boldsymbol{x})} \frac{1}{h_1}\left(f(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1,\xi) - f(\boldsymbol{x},\xi)\right)\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{h_1}\int_{a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)}^{a(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1,\xi)\,d\xi - \frac{1}{h_1}\int_{b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)}^{b(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x},\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Auf den ersten Term wenden wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (4.17) und auf die zweiten und dritten Terme den Mittelwertsatz der Integralrechnung (4.45) an. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)-\Phi(\boldsymbol{x})}{h_1} &= \int_{a(\boldsymbol{x})}^{b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}+\eta\boldsymbol{e}_1,\xi)}{\partial x_1}\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{h_1}\left(a(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1)\right) f(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1,\xi_0) \\ &\quad - \frac{1}{h_1}(b(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{x}+h_1\boldsymbol{e}_1) f(\boldsymbol{x},\xi_1), \end{aligned}$$

wobei $0 \leq \eta \leq h_1$, $a(\boldsymbol{x}) \leq \xi_0 \leq a(\boldsymbol{x} + h_1\boldsymbol{e}_1)$, $b(\boldsymbol{x}) \leq \xi_1 \leq b(\boldsymbol{x} + h_1\boldsymbol{e}_1)$ sind. Für $h_1 \to 0$ folgt auf Grund der Voraussetzungen die Behauptung (4.106). $\square$

Normalbereiche

Wir betrachten folgende zylinderartige Bereiche, die vom ein- bis zum n-dimensionalen Fall schrittweise aufgebaut werden (siehe Abbildung 4.18):

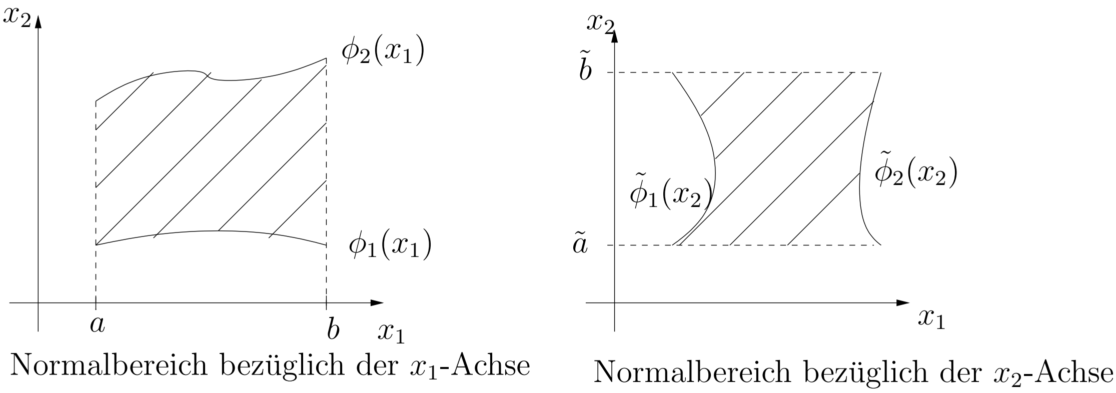


Abbildung 4.18: Normalbereiche

Definition 4.94.

- Sei $B_1 := [a, b]$ ein Intervall im $\mathbb{R}^1$.
  Auf B_1 seien stetige Funktionen ϕ_1, ψ_1 mit $\phi_1(x_1) \leq \psi_1(x_1)$ für alle $x_1 \in B_1$ gegeben.
- Sei $B_2 := \{(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in B_1, \phi_1(x_1) \leq x_2 \leq \psi_1(x_1)\}$.
  Auf B_2 seien stetige Funktionen ϕ_2, ψ_2 mit $\phi_2(x_1, x_2) \leq \psi_2(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2)^\top \in B_2$ gegeben.
- Sei $B_3 := \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2)^\top \in B_2, \phi_2(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \psi_2(x_1, x_2)\}$.
  $\vdots$
- Sei $B_n := \{(x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_{n-1})^\top \in B_{n-1}, \phi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \leq x_n \leq \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$.

Dann heißt B_n Normalbereich oder kanonischer Bereich bezüglich $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})^\top$.

Beispiel

1° In der Ebene können Normalbereiche bezüglich der x_1-Achse:

$$B_2 = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, \phi(x_1) \leq x_2 \leq \phi_2(x_1)\}$$

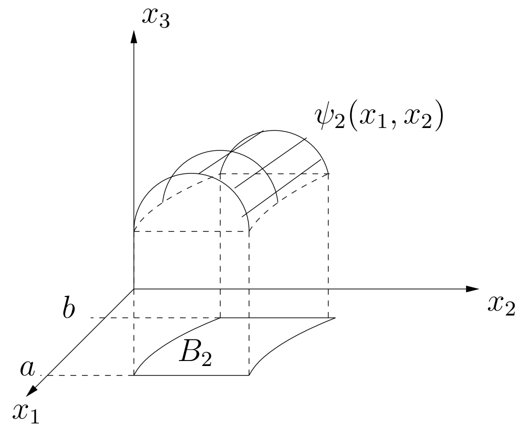


Abbildung 4.19: Normalbereich im $\mathbb{R}^3$

und bezüglich der x_2-Achse gebildet werden:

$$\tilde{B}_2 = \{(x_1, x_2) : \tilde{a} \leq x_2 \leq \tilde{b}, \tilde{\phi}_1(x_2) \leq x_1 \leq \tilde{\phi}_2(x_2)\}.$$

Siehe dazu Abbildung 4.18.

2° Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir einen Normalbereich, der durch einen Bereich in der x_1-x_2–Ebene und durch eine Fläche $x_3 = \psi_2(x_1, x_2)$ gegeben ist (siehe Abbildung 4.19).

$$B_3 = \{(x_1, x_2, x_3) : a \leq x_1 \leq b, \phi_1(x_1) \leq x_2 \leq \psi_1(x_1), 0 \leq x_3 \leq \psi_2(x_1, x_2)\}.$$

Mehrfach iterierte Integrale

Definition 4.95. Sei $f : B_n \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion über dem Normalbereich B_n. Dann heißt

$$\begin{aligned}&\int_{B_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n dx_{n-1} \ldots dx_1 \\ &= \int_a^b \int_{\phi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} \cdots \int_{\phi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \ldots dx_1\end{aligned}$$

das n-fach iterierte Integral von f über B_n. Man bezeichnet f als Integrand und B_n als Integrationsbereich.

Definition 4.96. Sei $B_n \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich

$$V(B_n) = \int_{B_n} dx_n \ldots dx_1 = \int_{B_n} dV_n(\boldsymbol{x})$$

heißt n-dimensionales Volumen von B_n.

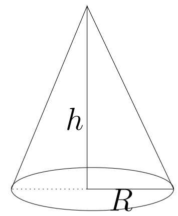


Abbildung 4.20: Kreiskegel mit Höhe h und Radius R.

Beispiel
Das Volumen eines Kreiskegels vom Radius R und der Höhe h ist zu berechnen. Der Kreiskegel ist ein Normalbereich (siehe Abbildung 4.20)

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{x_1 \in \mathbb{R} : \ -R \leq x_1 \leq R\}, \\
\phi_1(x_1) &= -\sqrt{R^2 - x_1^2}, \quad \psi_1(x_1) = \sqrt{R^2 - x_1^2}, \\
B_2 &= \{(x_1, x_2) : \ -R \leq x_1 \leq R, \ -\sqrt{R^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2}\}, \\
\phi_2(x_1, x_2) &= 0, \quad \psi_2(x_1, x_2) = h - \frac{h}{R}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \\
B_3 &= \Bigg\{(x_1, x_2, x_3) : \ -R \leq x_1 \leq R, \ -\sqrt{R^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{R^2 - x_1^2}\,, \\
&\qquad 0 \leq x_3 \leq h - \frac{h}{R}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
V(B_3) &= \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \int_0^{h-\frac{h}{R}\sqrt{x_1^2+x_2^2}} dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_{-R}^{+R} \int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \left(h - \frac{h}{R}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) dx_2 dx_1 \\
&= \int_{-R}^{+R} \left(hx_2 - \frac{h}{R}\left(\frac{x_2}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \frac{x_1^2}{2}\ln(x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})\right) \Bigg|_{x_2=-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{x_2=\sqrt{R^2-x_1^2}} \right) dx_1 \\
&= h\int_{-R}^{+R} \Bigg(2\sqrt{R^2 - x_1^2} - \frac{1}{R}\Bigg(\frac{2}{2}\sqrt{R^2 - x_1^2}R + \frac{x_1^2}{2}\ln(\sqrt{R^2 - x_1^2} + R) \\
&\qquad -\frac{x_1^2}{2}\ln(-\sqrt{R^2 - x_1^2} + R)\Bigg)\Bigg) dx_1 \\
&= h\int_{-R}^{+R} \left(2\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - x_1^2} - \frac{x_1^2}{2R}\ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - x_1^2}}{R - \sqrt{R^2 - x_1^2}}\right)\right) dx_1 \\
&= 2h\int_0^{+R} \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} - \frac{x_1^2}{2R}\ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - x_1^2}}{R - \sqrt{R^2 - x_1^2}}\right)\right) dx_1.
\end{aligned}$$

Mit der Variablentransformation $x_1 = R\sin\phi$ erhalten wir nach (4.50)

$$\begin{aligned}
V(B_3) &= 2h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(R\cos\phi - \frac{R^2\sin\phi}{2R} \ln\left(\frac{R+R\cos\phi}{R-R\cos\phi}\right)\right) R\cos\phi\, d\phi \\
&= 2hR^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\phi - \frac{\sin^2\phi}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\cos\phi\right) d\phi \\
&= 2hR^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\sin^3\phi \ln\left(\frac{1+\cos\phi}{1-\cos\phi}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi\, d\phi \\
&= 2hR^2 \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h R^2.
\end{aligned}$$

Remark 4.97. Der Kreiskegel ist ein Rotationskörper. Die Anwendung der Formel (4.55) vereinfacht wesentlich die Volumenberechnung. Danach ist für eine Rotation von $f(x)$ um die x-Achse

$$V = \int_0^h \pi f^2(x)\, dx,$$

wobei

$$f(x) = R - \frac{R}{h}x$$

ist. Damit wird

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^h \left(R^2 - \frac{2R^2}{h}x + \frac{R^2}{h^2}x^2\right) dx \\
&= \pi\left(R^2h - R^2h + \frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi R^2 h}{3}.
\end{aligned}$$

Remark 4.98. Falls der Normalbereich ein Quader ist, d. h. die Funktionen ϕ_i und ψ_i sind Konstanten, dann kann man die Reihenfolge der Integration vertauschen.

Transformation mehrdimensionaler Integrale

Es ist nicht immer günstig, mehrfache Integrale mittels kartesischer Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ zu berechnen. So wird man für den Kreis oder einen Kreisausschnitt Polarkoordinaten wählen, für eine Kugel bzw. einen Kugelausschnitt Kugelkoordinaten heranziehen und für Kreiszylinder, Kreiskegel oder daraus zusammengesetzte Bereiche Zylinderkoordinaten benutzen. Wir müssen also eine Formel herleiten, die den Übergang von kartesischen in krummlinige Koordinaten beschreibt. Wir erinnern uns zunächst an den eindimensionalen Fall. Satz 4.54 besagt, dass

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\, dt.$$

Hierbei wurde vorausgesetzt, dass $g'(t) \neq 0$ in $[g^{-1}(a), g^{-1}(b)]$ ist, $x = g(t)$ d. h. $g : [g^{-1}(a), g^{-1}(b)] \to [a, b]$. Die Voraussetzung $g'(t) \neq 0$ garantiert, dass $g^{-1}(x) = t$ existiert. Im Fall $n > 1$ erwarten wir eine Formel der Gestalt mit der Black-Box $\Box$

$$\int_B f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{D=g^{-1}(B)} f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}))\Box\, d\boldsymbol{u}.$$

Hierbei soll $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})$ eine Transformation sein, d. h. $\boldsymbol{g} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der Wertebereich $W(\boldsymbol{g}) \subset B$, $\boldsymbol{g}$ ist stetig differenzierbar und $\det \nabla \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) > 0$ für alle $\boldsymbol{u}$ aus Ω.

Theorem 4.99 (Transformationsformel)**.** *Es sei $f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\boldsymbol{g} : \Omega \in \mathbb{R}^n \to B \in \mathbb{R}^n$ eine Transformation. Dann ist*

$$\begin{aligned} \int_B f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} &= \int_D f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})) \det D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})\, d\mathbf{u} \\ &= \int_{g^{-1}(B)} f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})) \det D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u})\, d\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{4.107}$$

Bemerkungen zum Beweis

Der Beweis erfordert einigen Aufwand und ist in [1, S.100] zu finden. Wir geben hier nur eine Plausibilitätserklärung. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und $\bigcup_{i=1}^N B_i = B$ eine Zerlegung von B in kleine Bereiche. Dann kann man ein Mehrfachintegral näherungsweise darstellen als

$$\int_B f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \approx \sum_{i=1}^N f(\boldsymbol{x}_i) \operatorname{vol} B_i, \quad \boldsymbol{x}_i \in B_i. \tag{4.108}$$

Setzen wir $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_i)$; stellen wir $B_i \subset B$ als Bild von $\Omega_i \subset \Omega$ unter der Abbildung $\boldsymbol{g}$ dar, $B_i = \boldsymbol{g}(\Omega_i)$ und beachten wir die Relation (4.100), die besagt, dass

$$\operatorname{vol}(B_i) = \operatorname{vol} \boldsymbol{g}(\Omega_i) \approx \det D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_i}) \operatorname{vol} \Omega_i$$

ist, erhalten wir aus (4.108)

$$\int_B f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \approx \sum_{i=1}^N f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}_i)) \det D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u_i}) \operatorname{vol} \Omega_i.$$

Durch Grenzübergang zu unendlich kleinen Verfeinerungen und Übergang von $\operatorname{vol} \Omega_i$ zu $d\boldsymbol{u}$, folgt die Transformationsformel (4.107).

Beispiele

1° Wir berechnen noch einmal das Volumen des Kreiskegels mit dem Radius R und der Höhe h, indem wir Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) einführen ($x_1 = r \cos \phi$, $x_2 = r \sin \phi$, $x_3 = z$). Es ist nach (4.107)

$$V = \int_B d\boldsymbol{x} = \int_\Omega r\, dr\, d\phi\, dz,$$

wobei Ω folgender Normalbereich im $r - \phi - z$ Raum ist (siehe Abbildung 4.21):

$$0 \le z \le h,$$
$$0 \le r \le \frac{R(h-z)}{h}.$$

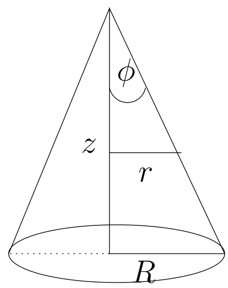


Abbildung 4.21: Kreiskegel

Damit ist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^{\frac{R(h-z)}{h}} r\,dr\,dz\,d\phi \\ &= \frac{2\pi}{2} \int_0^h \frac{R^2}{h^2}(h-z)^2\,dz \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h (h^2 - 2hz + z^2)\,dz \\ &= \frac{\pi R^2}{h^2}\left(h^3 - h^3 + \frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h R^2. \end{aligned}$$

2° Man berechne den geometrischen Schwerpunkt einer Halbkugel vom Radius R.
Aus Symmetriegründen muss der Schwerpunkt s auf der x_3-Achse liegen. Es ist daher $s = (0,0,0,s_3)$ mit

$$s_3 = \frac{1}{V} \iiint\limits_{\text{Halbkugel}} x_3\,d\boldsymbol{x}.$$

Wir führen Kugelkoordinaten ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\phi\sin\theta, \\ x_2 &= r\sin\phi\sin\theta, \\ x_3 &= r\cos\theta. \end{aligned}$$

Kurz: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{g}(r, \theta, \phi)$. Es ist

$$\det(\nabla \boldsymbol{g}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \theta} & \frac{\partial g_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$
$$= r^2\cos^2\phi\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^2\phi\sin^3\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta\sin\theta + r^2\cos^2\phi\sin^3\theta$$
$$= r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta.$$

Formel (4.107) liefert uns

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R r\cos\theta r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi \\ &= \frac{3\cdot 2\pi}{2\pi R^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^4}{4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{4}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{4}R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{3}{4}R\frac{1}{4}\left(-\cos(2\theta)\right)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{4}R\frac{1}{2} = \frac{3}{8}R. \end{aligned}$$

Remark 4.100. Man steht häufig vor dem Problem, ebene oder räumliche Gebiete B in solchen Koordinaten $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^\top$ oder $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ aus Ω darzustellen, dass die entsprechenden Integrale über diesen Gebieten *einfach* zu berechnen sind. Man spricht in diesem Zusammenhang von einer Parametrisierung des Gebietes $B = g(\Omega)$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.1
Skizzieren Sie die Integrationsgebiete der folgenden Integrale und berechnen Sie den Wert der Integrale.

$$a) \quad \int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,dx\,dy, \qquad b) \quad \int_0^2\int_{\max\{0,4x-4\}}^{x^2} 2xy\,dy\,dx.$$

Aufgabe 19.2
Seien

$$F_1(x) = \int_{2x}^{7x} e^{xy}\,dy \quad \text{und} \quad F_2(x) = \int_{2x}^{7x}\frac{1}{y}e^{xy}\,dy.$$

Man berechne $F_1'(x)$ und $F_2'(x)$.

Aufgabe 19.3
Skizzieren Sie die folgenden Bereiche $B \subset \mathbb{R}^2$, und berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt.

1. $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4}x^2 - 1 \le y \le 2 - x \right\}$
2. $B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y \ge 0,\ y^2 \le x \le 4 - y^2 \right\}$

Aufgabe 19.4
Sei $0 < r_0 < R$. Die Menge

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r, \phi, \theta) := \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ r\sin\theta \end{pmatrix} : 0 \le r \le r_0, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

wird Torus genannt. Man skizziere T sowie die Mengen $g(S_1)$ und $g(S_2)$ mit

$$S_1 = \{(r_0, \phi, 0) : 0 \le \phi \le 2\pi\}, \quad S_2 = \{(r_0, \phi, \pi/2) : 0 \le \phi \le 2\pi\},$$

und berechne das Volumen $|T|$ von T.

Aufgabe 19.5
Sei V das (eindeutige) Viereck, dessen Seiten durch Geradenstücke der Geraden $g_1 : y = a_1 x$, $g_2 : y = a_2 x$, $h_1 : y = 1 - b_1 x$ und $h_2 : y = 1 - b_2 x$ gegeben sind, wobei $0 < b_1 < b_2$ und $0 < a_1 < a_2$.

a) Man skizziere V.
b) Man finde eine Parametrisierung von V in der Form

$$\left\{ (x, y) = \left(\frac{1}{u + v}, \frac{v}{u + v} \right) : (u, v) \in B \right\}$$

mit geeignetem B und bestimme damit den Flächeninhalt $|V|$ von V.

Aufgabe 19.6
Man bestimme Masse M und Schwerpunkt S eines homogenen Kugelsektors K_θ mit Radius R, Öffnungswinkel θ und Massendichte 1. Dabei sei oBdA der Ursprung in $(x, y, z) = 0$, und der Öffnungswinkel werde mit der z–Achse gebildet.

Kapitel 5

Differentialgleichungen

Unter einer Differentialgleichung versteht man eine Gleichung in der eine gesuchte Funktion und ihre Ableitungen auftreten. Sind die gesuchten Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : x \to y(x)$ skalare Funktionen einer reellen Variablen x, so spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Beispiele wären

$$y' + 2xy = 0, \qquad y = y(x) \text{ ist gesucht,} \tag{5.1}$$

$$\frac{dp}{dt} = p(t)r(t, p(t)), \quad p = p(t) \text{ ist gesucht,} \tag{5.2}$$

$$y''(t) + my(t) = f(t), \qquad y = y(t) \text{ ist gesucht.} \tag{5.3}$$

Ist $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion einer reellen Variablen, so treten Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf, z. B.

$$\begin{matrix} y_1'(t) = f_1(t) \\ y_2'(t) + y_1'(t) = 0 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ ist gesucht.} \tag{5.4}$$

Ist $\boldsymbol{y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion von n Variablen, $n > 1$, dann erscheinen partielle Ableitungen in der Differentialgleichung. In diesem Fall spricht man von partiellen Differentialgleichungen, z. B. ist die Laplace-Gleichung gegeben durch

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad u = u(x_1, x_2) \text{ ist gesucht.} \tag{5.5}$$

Systeme von partiellen Differentialgleichungen treten auf, falls die vektorwertige Abbildung $\boldsymbol{y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gesucht ist, z. B.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist gleich der höchsten auftretenden Ableitung. So haben (5.1) und (5.2) die Ordnung 1, die Differentialgleichungen (5.3) und (5.5) sind von 2. Ordnung. Wir werden uns in dieser Vorlesung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschäftigen. Als Literatur wird das Buch [8] empfohlen.

5.1 Elementar lösbare gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung lautet:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{für } x \in (a, b). \tag{5.6}$$

x ist die unabhängig Variable, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y : x \to y(x)$ ist die abhängige Variable. $y = y(x)$ ist Lösung im Intervall (a, b), falls y differenzierbar ist und

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0 \quad \text{für } x \in (a, b).$$

Die Differentialgleichung (5.5) wird implizit genannt. Wenn sie nach y' auflösbar ist, spricht man von einer expliziten Differentialgleichung:

$$y' = f(x, y). \tag{5.7}$$

Geometrische Interpretation, Richtungsfelder

In jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wird durch (5.7) eine Richtung vorgeschrieben

$$\tan \alpha = y' = f(x, y).$$

Heftet man an den Punkt (x, y) ein kleines Geradenstück mit dem Winkel α, so erhält man ein Linienelement, das Tangente an die Lösungskurve $y = y(x)$ ist. Die Gesamtheit aller Linienelemente heißt Richtungsfeld. Der Verlauf der Lösungskurven kann aus den Tangentenstücken rekonstruiert werden.

Beispiel

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Die Linienelemente sind $\tan \alpha = -\frac{x}{y}$. Auf den Geraden $y = ax$ ist $\tan \alpha = -\frac{1}{a} = \text{const}$.
Wir vermuten, dass Kreise um den Nullpunkt Lösungskurven bilden (siehe Abbildung 5.1):

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{5.8}$$

Wir überprüfen diese Vermutung, indem wir die Kreisgleichung (5.8) nach x differenzieren:

$$2x + 2y'y = 0.$$

Daraus folgt $y' = -\frac{x}{y}$.
Wir sehen, dass die Lösungskurven nicht eindeutig bestimmt sind. Fordert man zusätzlich, dass eine Lösungskurve durch den Punkt (x_0, y_0) verläuft und damit $y(x_0) = y_0$ ist, kann man unter gewissen Voraussetzungen an $f(x, y)$ garantieren, dass Eindeutigkeit vorliegt. Dies werden wir später diskutieren. Wir sehen uns jetzt einige Typen von Differentialgleichungen erster Ordnung an, die wir „einfach“ lösen können.

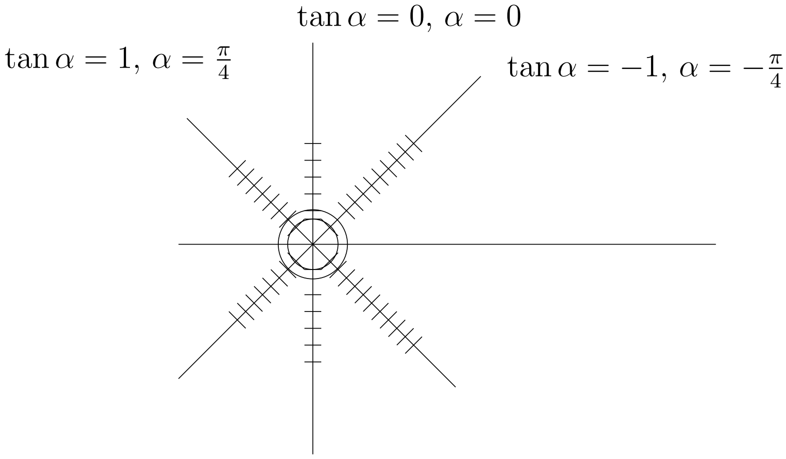


Abbildung 5.1: Richtungsfeld: $\tan\alpha = -\frac{x}{y}$

Elementare Lösungsmethoden

Typ I

Wir beginnen mit einer Differentialgleichung, deren Lösung ablesbar ist

$$y' = f(x), \quad x \in (a,b), \quad f \text{ stetig in } (a,b).$$

Durch Integrieren der Gleichung erhalten wir

$$y = y(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi + c, \tag{5.9}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Ist $y(x_0) = y_0$ vorgeschrieben, so folgt

$$y(x_0) = \int_a^{x_0} f(\xi)\,d\xi + c = y_0 \tag{5.10}$$

und c ist eindeutig bestimmt. Die Lösung (5.9) wird allgemeine Lösung genannt, $y(x) = \int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi + y_0$ wird Lösung des Anfangswertproblem $y'(x) = f(x)$, $y(x_0) = y_0$ genannt.

Typ II

Als nächstes sehen wir uns eine Differentialgleichung an, in der $f(x,y) = g(x)h(y)$ in Produktform gegeben ist:

$$y' = g(x)h(y), \quad x \in (a,b). \tag{5.11}$$

Differentialgleichungen vom Typ (5.11) kann man mit der Methode „Trennung der Variablen“ elementar lösen. Dazu nehmen wir an, dass $h(y) \neq 0$ ist und „sortieren“ nach

Variablen

$$\frac{y'}{h(y)} = \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x). \tag{5.12}$$

Wir integrieren (5.12) über dem Intervall (a, x):

$$\int_a^x \frac{y'(\xi)}{h(y(\xi))}\, d\xi = \int_a^x g(\xi)\, d\xi.$$

Die linke Seite können wir umschreiben, indem wir Formel (4.49) benutzen. Damit wird

$$\int_a^x \frac{y'(\xi)}{h(y(\xi))}\, d\xi = \int_{y(a)}^{y(x)} \frac{1}{h(\eta)}\, d\eta = \int_a^x g(\xi)\, d\xi, \tag{5.13}$$

kurz geschrieben

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx + \text{const}\,. \tag{5.14}$$

Die Lösung y, die wir aus (5.14) gewinnen können, ist eine allgemeine Lösung. Die Differentialgleichung besitzt auch dann eine Lösung, wenn $h(y)$ eine isolierte Nullstelle $y = y_0$ besitzt, d. h. $h(y_0) = 0$. In diesem Fall ist

$$y = y(x) = y_0 = \text{const}$$

Lösung der Differentialgleichung (5.11). Wir sehen uns ein Beispiel an.

Beispiel [8, S.25]

Hypothesen zum Bevölkerungswachstum. Es sei $p = p(t)$ die Bevölkerungszahl der Erde zur Zeit t, $c = c(t, p)$ die Differenz zwischen Geburts- und Sterberate. Die Änderung von $p(t)$ ist durch die Wachstumsgleichung beschreibbar

$$p' = c(t, p)p. \tag{5.15}$$

Wir nehmen an, dass nur eine Höchstzahl N von Menschen auf der Erde leben können. Die Hypothese ist nun

$$c(t, p) = c(p) = \alpha(N - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

d. h. $c(t, p)$ wird verschwinden für $p = N$, $k = 1, 2$. Die Differentialgleichung (5.15) lautet

$$p' = \alpha(N - p)^k p = h(p).$$

Wir nehmen an, dass $h(p) \neq 0$ sei. Dann wird die Lösung p aus der Gleichung (5.14) bestimmt

$$\int \frac{1}{\alpha(N - p)^k p}\, dp = \int 1\, dt = t + \text{const}\,.$$

Für $k = 0$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{\alpha p}\, dp = \frac{1}{\alpha} \ln |p| = t + \text{const},$$
$$p(t) = e^{\alpha t} c,$$

wobei c eine beliebige Konstante ist. Ist $p(t)$ zum Zeitpunkt t_0 bekannt, so wird $p(t_0) = e^{\alpha t_0} c$, $c = p(t_0) e^{-\alpha t_0}$ und damit

$$p(t) = e^{\alpha(t-t_0)} p(t_0).$$

Für $k = 1$ erhalten wir

$$\int \frac{1}{\alpha(N-p)p}\, dp = \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{(N-p)p}\, dp = \frac{1}{\alpha N} \int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p} \right) dp$$
$$= \frac{1}{\alpha N} \left(\ln |p| - \ln |N-p| \right) = t + \text{const}\,.$$

Folglich ist

$$\ln \frac{p}{N-p} = \alpha N (t + \text{const}),$$
$$\frac{p}{N-p} = e^{\alpha N t} c.$$

Ist $p(t_0)$ bekannt, dann wird

$$c = \frac{p(t_0)}{N - p(t_0)} e^{-\alpha N t_0}$$

und schließlich

$$p(t) = \frac{N p(t_0)}{p(t_0) + (N - p(t_0)) e^{-\alpha N (t-t_0)}} = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{p(t_0)} - 1 \right) e^{-\alpha N (t-t_0)}}.$$

Für $k = 2$ erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{(N-p)^2 p}\, dp = -\frac{1}{\alpha N^2} \left(\ln \left(\frac{p-N}{p} \right) + \frac{N}{p-N} \right) = t + \text{const}$$

woraus p zu berechnen ist.

Remark 5.1. Im März 2004 war $p = p(2004) \approx 6.372$ Milliarden $\approx 6.372 \cdot 10^9$ Menschen. Wir wählen $N = 10^{12}$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-2} (N - p(2004))^{-k}$. Im Juni 2007 ist $p = \tilde{p}(2007) \approx 6.627 \cdot 10^9$. Wir prüfen, ob die Lösungen unserer Modelle für $k = 0, 1$ mit dem Anfangswert $p(t_0 = 2004)$ tatsächlich zum Wert $p(2007)$ führen.

1.Fall: $k = 0$
Es ist

$$p(t) = e^{\alpha(t-t_0)}p(t_0).$$

Für $t = 2007, t_0 = 2004$ erhalten wir

$$p(2007) = e^{\frac{6}{100}}p(t_0) \approx 1.061 \cdot 6.372 \cdot 10^9 \approx 6.761.$$

2.Fall: $k = 1$
Wir haben

$$\begin{aligned} p(2007) &= \frac{N}{1 + (\frac{N}{p(t_0)} - 1)e^{-\alpha N 3}} \\ &\approx \frac{10^{12}}{1 + (\frac{10^{12}}{6.3 \cdot 10^9} - 1)e^{-0.06}} \\ &\approx 10^9(\frac{10^3 \cdot 1.06}{1.06 + 159}) \\ &\approx 6.62 \cdot 10^9. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das Modell für $k = 1$ bereits eine sehr gute Näherung liefert.

Typ III

Die folgenden Differentialgleichungen lassen sich auf solche zurückführen, die mit der Methode „Trennung der Variablen“, gelöst werden können:

$$y' = f(ax + by + c), \quad b \neq 0. \tag{5.16}$$

Wir betrachten anstatt der unbekannten Funktion y die Funktion $u = u(x) = ax + by + c$. Ist $y = y(x)$ eine Lösung von (5.16), dann gilt für u:

$$\frac{du}{dx} = a + by'(x) = a + bf(u) = h(u).$$

Ist u bekannt, dann ist $y = \frac{1}{b}(u(x) - ax - c)$.

Beispiel

$$y' = (x + y)^2.$$

Für $u(x) = x + y(x)$ gilt

$$\frac{du}{dx} = u' = 1 + y' = 1 + u^2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + u^2}\, du &= x + c, \\ \arctan u &= x + c, \\ u &= \tan(x + c) \end{aligned}$$

und schließlich

$$y = \tan(x + c) - x.$$

Typ IV: Ähnlichkeits-Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir setzen $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, $x \neq 0$. Dann ist

$$y'(x) = u(x) + xu'(x) = f(u),$$

also

$$u'(x) = \frac{f(u) - u}{x} = g(x)h(u).$$

Beispiel
Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist zu lösen. Wir erhalten für $u = \frac{y}{x}$,

$$u'(x) = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{u - \frac{1}{u^2} - u}{x} = -\frac{1}{xu^2}.$$

Wir wenden die Methode der Trennung der Variablen an:

$$\begin{aligned}
\int u^2\,du &= \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln x + c,\\
\frac{u^3}{3} &= -\ln x + c,\\
\frac{y^3}{x^3} &= -3\ln x + \tilde{c},\\
y &= x\sqrt[3]{\tilde{c} - 3\ln x}.
\end{aligned}$$

Typ V: Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Im Abschnitt 2.2 [7] haben wir lineare Abbildungen von Vektorräumen folgendermaßen eingeführt (Definition 2.17): Seien V und W K- Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, falls gilt

$$\begin{aligned}
f(x + y) &= f(x) + f(y) &&\text{für alle } x, y \in V,\\
f(\alpha x) &= \alpha f(x) &&\text{für alle } \alpha \in K, x \in V.
\end{aligned}$$

Sei jetzt $V := \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y$ ist stetig differenzierbar in $(a, b)\}$. Dieser Raum ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum; ebenso $W = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y$ ist stetig auf $(a, b)\}$. Wir betrachten jetzt die Abbildung $L : V \to W$

$$Ly = y' + g(x)y,$$

wobei $g(x)$ eine stetige Funktion ist. L ist eine lineare Abbildung von V in W und die Differentialgleichung

$$y'(x) + g(x)y(x) = k(x), \quad x \in (a, b) \tag{5.17}$$

wird lineare Differentialgleichung genannt. Um über die Lösungsstruktur dieser Differentialgleichung etwas aussagen zu können, greifen wir auf die Überlegungen zurück, die wir zur Beschreibung von vollständigen Lösungen linearer Gleichungssystem ausgeführt haben (Satz 2.38, [7]).

Theorem 5.2. *Sei $y_p \in V$ eine spezielle (partikuläre) Lösung von $Ly = k$. Dann hat jede Lösung y von $Ly = k$ die Gestalt*

$$y = y_p + y_h, \tag{5.18}$$

wobei $y_h \in \ker(L) = \{y \in V : Ly = 0\}$ ist.

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 2.41 und wird als Übung empfohlen.
Der Satz 5.2 besagt: um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $Ly = k$ zu erhalten, müssen wir die allgemeine Gestalt von y_h als Lösung der **homogenen** Differentialgleichung

$$Ly = 0 \tag{5.19}$$

kennen. Weiterhin müssen wir eine Methode entwickeln, um eine spezielle Lösung y_p der **inhomogenen** Differentialgleichung konstruieren zu können.

Homogene Gleichung $Ly = 0$

Theorem 5.3. *Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet*

$$y_h(x) = y_h(x, c) = c \exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right) \equiv ce^{-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi}, \tag{5.20}$$

wobei $a_0 \in (a, b)$ beliebig ist.

Beweis.

a) Wir überprüfen zunächst, dass $Ly_h(x) = 0$ ist. Aus der Kettenregel folgt

$$y_h'(x) = c \exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)(-g(x)) = -y_h(x)g(x).$$

b) Wir wenden die Methode der Trennung der Variablen an, um y_h zu berechnen:

$$\begin{aligned}
y' + g(x)y &= 0, \\
\frac{y'}{y} &= -g(x), \quad y > 0, \\
\ln y &= -\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi + \text{const}, \\
y &= c \exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right).
\end{aligned}$$

Die Konstante c ist beliebig und kann auch negativ sein, wie im Punkt a) nachgerechnet wurde.

c) Es tritt die Frage auf, ob noch weitere Lösungen existieren, die nicht die Gestalt (5.20) besitzen.
Sei ϕ eine Lösung, d. h. $L\phi = 0$. Dann gilt für $u(x) = \exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)\phi(x)$:

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)\phi'(x) + g(x)\exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)\phi(x) \\
&= \exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)(\phi' + g\phi) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $u(x) \equiv \text{const} = c_0$ und

$$c_0 = \exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)\phi(x),$$

woraus

$$\phi(x) = c_0 \exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right)$$

folgt.

□

Inhomogene Gleichung $Ly = k$

Kennt man die allgemeine Gestalt der Lösungen der homogenen Gleichung, dann kann man mit Hilfe der **Methode der Variation der Konstanten**, die auf Lagrange (1736 - 1813) zurückgeht, eine partikuläre Lösung konstruieren. Dazu machen wir einen Ansatz

$$y(x) = c(x) \exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\, d\xi\right) \tag{5.21}$$

und versuchen $c(x)$ so zu bestimmen, dass $Ly = k$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} y' + g(x)y &= c'(x)\exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right) - c(x)g(x)\exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right) \\ &\quad + c(x)g(x)\exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right) \\ &= c'(x)\exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right). \end{aligned}$$

Damit ist $Ly = k$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} c'(x) &= k(x)\exp\left(\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right), \\ c(x) &= \int_{a_0}^{x} k(t)\exp\left(\int_{a_0}^{t} g(\xi)\,d\xi\right)\,dt + c_0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Theorem 5.4. *Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung erster Ordnung $y'(x) + y(x) = k(x)$, $x \in (a, b)$ hat die Gestalt*

$$y = y_h + y_p = \left(c + \int_{a}^{x} k(t)\exp\left(\int_{a_0}^{t} g(\xi)\,d\xi\right)\,dt\right)\exp\left(-\int_{a_0}^{x} g(\xi)\,d\xi\right), \tag{5.23}$$

wobei c eine beliebige Konstante ist.

Remark 5.5. Das Ergebnis hängt nicht von der Wahl der unteren Grenze a_0 ab.

Beispiel

Es ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + x^2 y = 2x^2$$

gesucht. Wir berechnen die Lösung, indem wir die Formel (5.23) benutzen und $a_0 = 0$ setzen. Es ist

$$\begin{aligned} y &= \left(c + \int_{0}^{x} 2t^2\exp\left(\int_{0}^{t} \xi^2\,d\xi\right)\,dt\right)\exp\left(-\int_{0}^{x} \xi^2\,d\xi\right) \\ &= \left(c + \int_{0}^{x} 2t^2 e^{\frac{1}{3}t^3}\,dt\right)e^{-\frac{1}{3}x^3} \\ &= \left(c + 2e^{\frac{1}{3}x^3} - 2\right)e^{-\frac{1}{3}x^3} = \tilde{c}e^{-\frac{1}{3}x^3} + 2. \end{aligned}$$

Remark 5.6. In diesem Beispiel kann die partikuläre Lösung $y \equiv 2$ auch direkt „erraten“ werden.

Wir betrachten jetzt Differentialgleichungen, die auf lineare Differentialgleichungen zurückgeführt werden können.

Typ VI: Die Bernoulli-Differentialgleichung

Die folgende Differentialgleichung wurde nach dem schweizer Mathematiker Jakob Bernoulli (1654-1705) benannt:

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0, \quad \alpha \neq 1. \tag{5.24}$$

Hier ist α eine reelle Zahl. Wir werden nach solchen Lösungen y suchen für die y^{α} wohldefiniert ist (z. B. $y > 0$ für $\alpha < 0$) und für die $u = y^{1-\alpha}$ und $y = (u)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ existieren. Wir multiplizieren (5.24) mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ und erhalten:

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)g(x)y^{1-\alpha} + (1-\alpha)h(x) = 0. \tag{5.25}$$

Durch die Einführung einer neuen unbekannten Funktion

$$u = y^{1-\alpha} \quad \text{mit } u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$$

geht (5.25) in eine lineare Differentialgleichung über:

$$u' + (1-\alpha)g(x)u + (1-\alpha)h(x) = 0. \tag{5.26}$$

Durch Berechnen von $u = u_h + u_p$ erhalten wir schließlich

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Beispiel [8, S.31]

Die Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{1+x} + (1+x)y^4 = 0$$

ist zu lösen. Setzen wir $u = y^{-3}$, erhalten wir (5.26)

$$u' - \frac{3u}{1+x} - 3(1+x) = 0. \tag{5.27}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (5.27)

$$u' - \frac{3u}{1+x} = 0$$

lautet

$$u_h = c(1+x)^3.$$

Um eine partikuläre Lösung von (5.27) zu erhalten, wenden wir die Methode „Variation der Konstanten“ an

$$u_p = c(x)(1+x)^3.$$

Aus Formel (5.22) folgt, dass $c(x) = \frac{-3}{1+x}$ ist und daher

$$u = u_h + u_p = c(1+x)^3 - 3(1+x)^2 = (c(1+x) - 3)(1+x)^2.$$

Daraus ergibt sich für die Lösung y der Ausgangsgleichung

$$y(x) = \frac{\operatorname{sgn}(cx + c - 3)}{\sqrt[3]{(1 + x)^2 |cx + c - 3|}} \quad .$$

Hierbei ist sgn die Vorzeichenfunktion,

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Suchen wir die Lösung y, die durch den Punkt $(0, -1)$ verläuft, dann erhalten wir $c = 2$ und

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(1 + x)^2 (1 - 2x)}} \quad \text{für } -1 < x < \frac{1}{2}. \tag{5.28}$$

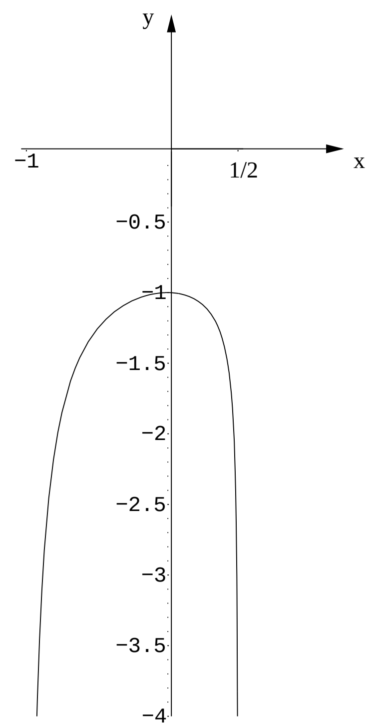


Abbildung 5.2: Graph der Funktion $y(x)$ aus Formel (5.28).

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1
Man löse das Anfangswertproblem

$$xy(1+x^2)y' = 1+y^2, \ y(1) = 2.$$

Aufgabe 20.2
Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

und gebe die Lösung an, die der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ genügt.

Aufgabe 20.3 Man berechne alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = 1 + y/x$ auf $(0, \infty)$.

Aufgabe 20.4
Man löse das Anfangswertproblem

$$y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0\,, \quad y(0) = \sqrt{2}.$$

Aufgabe 20.5
a) Eine gesunde Leber baut pro Minute ca 4% eines Farbstoffs A ab. Man formuliere dies als DGL für $A(t)$. Ein Proband habe zu Beginn 0.3 Gramm des Farbstoffs im Blut, und nach 30 Minuten noch 0.1 Gramm. Ist die Leber (in dieser Hinsicht) gesund?

b) Der "typische Galaxienabstand" $R(t)$ in gewissen Universen wird durch die sogenannte Friedmann Gleichung

$$R'^2(t) = H_0^2\left(\Omega_m R_0^3/R(t) + \Omega_r R_0^4/R^2(t) + \Omega_v R^2(t)\right)$$

beschrieben, mit Hubble–Konstante $H_0 > 0$ und *heutiger* Ausdehnung $R_0 := R(0) > 0$ und Masse/Strahlungs/Vakuumdichten $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_v$. Löse die Friedmann–Gleichung für $\Omega_m > 0$ und $\Omega_r, \Omega_v = 0$, wobei "heute" das Universum bekanntlich expandiert, d.h. $R'(0) > 0$. Bestimme den Zeitpunkt $t_u < 0$ des Urknalls. Können solche Universen auch wieder schrumpfen?

5.2 Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen

Explizite Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten das Anfangswertproblem: Gesucht ist eine differenzierbar Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$y' = f(x,y), \quad x \in (\alpha, \beta), \tag{5.29}$$
$$y(x_0) = y_0. \tag{5.30}$$

Die Bedingung (5.30) wird Anfangsbedingung genannt (setzt für x die Zeit t ein). Es treten folgende Fragen auf:

- Existiert eine Lösung?
- Ist die Lösung eindeutig?

Die ersten beiden Fragen werden durch den Satz von Picard (1890) und Lindelöf (1894) beantwortet.

Theorem 5.7 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz (Satz von Picard/Lindelöf))**.**
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sei stetig in* $B = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ *und* $M = \max_{(x,y)\in B} |f(x,y)|$. *Weiterhin erfülle sie dort eine Lipschitzbedingung (Lipschitz 1832-1903) bezüglich* y*, d. h. es gelte:*

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq c_L |y - \tilde{y}| \quad \forall\, (x,y), (x,\tilde{y}) \in B. \tag{5.31}$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (5.29), (5.30) in $[x_0 - h, x_0 + h]$ *mit* $h := \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

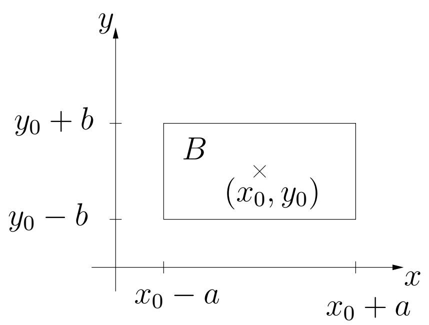


Abbildung 5.3: Der Bereich B

Beweisskizze:

1.Schritt:

Das Anfangswertproblem kann in Form einer äquivalenten Integralgleichung geschrieben werden

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{5.32}$$

2.Schritt:

Wir approximieren die Lösung y von (5.32) durch eine Folge

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi, \\ &\vdots \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_n(\xi))\, d\xi, \\ &\vdots \end{aligned}$$

3.Schritt:

Wir zeigen, dass die obige Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[x_0 - h, x_0 + h]$ zu einer stetigen Funktion $y \overset{\text{gl.}}{=} \lim_{n\to\infty} y_n$ konvergiert.

4.Schritt:

Die Grenzfunktion y ist Lösung des Anfangswertproblems und eindeutig bestimmt. □

Beispiele

1° Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2 = f(x, y) \quad \text{in } (-h, h), \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x, y)$ ist in jedem endlichen Rechteck stetig und genügt dort einer Lipschitzbedingung. Dies folgt aus der Existenz der stetigen partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Es gilt nämlich nach dem Mittelwertsatz: Für ein $\eta \in (y_1, y_2)$ ist

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)(y_1 - y_2) \right| = |2\eta||y_1 - y_2| \\ &\le c|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Die Näherungsfolge lautet

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0,\\
y_1 &= \int_0^x f(\xi,0)\,d\xi = \int_0^x \xi^2\,d\xi = \frac{x^3}{3},\\
y_2 &= \int_0^x f\left(\xi,\frac{\xi^3}{3}\right)\,d\xi = \int_0^x \left(\xi^2+\frac{\xi^6}{9}\right)\,d\xi = \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63},\\
y_3 &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59535}x^{15},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sie konvergiert für $|x| < h = |\min\{a, \frac{b}{a^2+b^2}\}|$.

2° Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
y' &= |y-1|^{\frac{1}{2}} = f(x,y),\\
y(2) &= 1.
\end{aligned}$$

An der Stelle $y_1 = 1$ ist f nicht Lipschitz-stetig. Der Ausdruck

$$\frac{|f(x,1)-f(x,y_2)|}{|1-y_2|} = \frac{1}{\sqrt{|1-y_2|}} \to \infty \quad \text{für } y_2 \to 1.$$

Der Hauptsatz ist nicht anwendbar und wir müssen klären, ob eine Lösung existiert und ob diese eindeutig ist. Wir wenden die Methode „Trennung der Variablen“, zur Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y-1|} = g(x)h(y)$$

mit $g(x) \equiv 1, h(y) = \sqrt{|y-1|}$ an.

1. Fall $y = 1$:

$h(1) = 0$, d. h. $y \equiv 1$ ist eine Lösung.

2. Fall $y > 1$:

In diesem Fall ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = 2\sqrt{y-1} = x + c > 0$$

und

$$y(x) = 1 + \frac{1}{4}(x+c)^2, \quad x > -c.$$

3. Fall $y < 1$:

Es ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = -2\sqrt{1-y} = x + c < 0$$

und

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2, \quad x < -c.$$

Damit gilt für ein $c \in \mathbb{R}$, dass

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}(x+c)^2 & \text{für } x \geq -c, \\ 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2 & \text{für } x < -c \end{cases} \tag{5.33}$$

eine stetig differenzierbare Lösung ist. Weiterhin ist $y(x) \equiv 1$ eine Lösung.
Wir betrachten jetzt die Anfangsbedingung

$$y(2) = 1.$$

Dann ist c in der ersten Zeile der Formel (5.33) so zu wählen, dass

$$y(2) = 1 + \frac{1}{4}(2+c)^2 = 1$$

ist, d. h. $c = -2$. Die Funktionen

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}(x-2)^2 & \text{für } x \geq 2, \\ 1 - \frac{1}{4}(x-2)^2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

und $y(x) \equiv 1$ sind zwei stetig differenzierbare Lösungen.

Conclusion 5.8. Wird die Lipschitzbedingung (5.31) für $f = f(x,y)$ nicht gefordert, kann man i. Allg. nicht erwarten, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

Es gilt jedoch folgender Satz:

Theorem 5.9 (Existenzsatz von Peano (1858-1932))**.** *Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig in $B = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ und $M = \max_{(x,y)\in B} |f(x,y)|$. Dann existiert eine stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $h := \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Remark 5.10. In der Beweisskizze des Satzes von Picard/Lindelöf haben wir eine approximierende Folge betrachtet, die dann auch im Beispiel 1° zur Berechnung einer Näherungslösung benutzt wurde.
Praktisch relevanter sind numerische Methoden, wie das explizite und implizite Eulerverfahren, Crank-Nicolson-Verfahren sowie Runge-Kutta-Verfahren. Wir skizzieren hier nur das explizite Eulerverfahren (Polygonzugverfahren). Unser Ziel ist, $y(x)$ zu berechnen, so dass in $[x_0 - h, x_0 + h]$ gilt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi.$$

Dazu unterteilen wir das Intervall $[x_0, x_0 + h]$ in n äquidistante Teilintervalle mit den Zerlegungspunkten $x_0 = x_0, x_0 + \delta = x_1, \ldots, x_n = x_0 + h$ wobei $\delta = \frac{h}{n}$ ist.

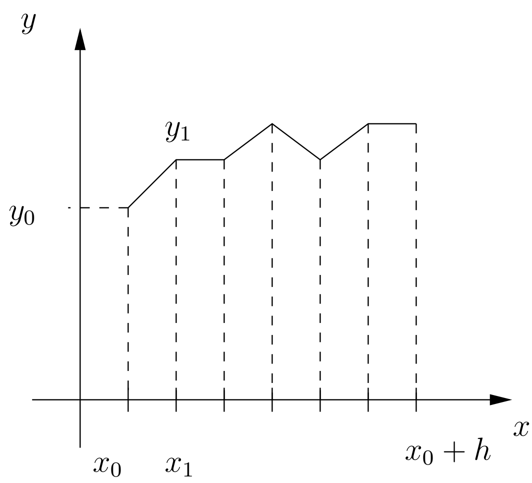


Abbildung 5.4: Polygonzug $\tilde{y}$

Der Punkt (x_0, y_0) ist Startwert. Wir bestimmen die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),\\
y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + \delta f(x_{n-1}, y_{n-1}).
\end{aligned}$$

Durch die Punkte (x_i, y_i) legen wir ein Polygon $\tilde{y}$. Es gilt

$$|y_i(x_i) - \tilde{y}_i(x_i)| = O(\delta).$$

Diese Abschätzung ist nicht befriedigend, deshalb werden bessere Verfahren bevorzugt.

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob kleine Änderungen der Anfangsdaten kleine Änderungen der Lösung ergeben.

Theorem 5.11. *Seien y und $\tilde{y}$ Lösungen der Anfangswertprobleme*

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \\ \tilde{y}' &= f(x,\tilde{y}), \quad \tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0, \end{aligned}$$

wobei f stetig ist und einer Lipschitzbedingung genügt:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq c_L |y_1 - y_2| \quad \textit{für alle } (x,y_1),(x,y_2) \in B.$$

Dann ist

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y_0 - \tilde{y}_0| e^{c_L |x-x_0|} \qquad \textit{für alle } x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Der Beweis von Satz 5.11 beruht auf einem Gronwallschen Lemma:
Sei $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ stetig und es gebe Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$\gamma(t) \leq c_1 + c_2 \int_0^t \gamma(s)\, ds \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Dann gilt

$$\gamma(t) \leq c_1 e^{c_2 t} \quad \text{für alle } t \in [0,T].$$

Beispiel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= y = f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Die rechte Seite $f(x,y)$ genügt einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten $c_2 = 1$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|.$$

Daher muss für eine Lösung $\tilde{y}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= \tilde{y}, \\ \tilde{y}(x_0) &= \tilde{y}_0 \end{aligned}$$

gelten

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq |y - \tilde{y}_0| e^{|x-x_0|}. \tag{5.34}$$

Wir überprüfen, ob die Abschätzung (5.34) optimal ist.

Die Lösungen y und $\tilde{y}$ sind analytisch berechenbar:

$$y(x) = y_0 e^{x-x_0}, \quad \tilde{y}(x) = \tilde{y}_0 e^{x-x_0}.$$

Damit ist

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0| e^{x-x_0}.$$

Für $x \geq x_0$ ist damit die Abschätzung (5.34) optimal.

Die Sätze von Picard-Lindelöf und Peano können auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen werden.

Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten das Anfangswertproblem: Gesucht ist ein Feld $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \tag{5.35}$$

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0. \tag{5.36}$$

Ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \quad & y_1(x_0) &= y_1^0,\\
y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \quad & y_2(x_0) &= y_2^0,\\
&\vdots & &\vdots\\
y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \quad & y_n(x_0) &= y_n^0.
\end{aligned}$$

Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell von Lotka-Volterra [8, S.44].

Dieses Modell wurde von A. Lotka (amerikanischer Biophysiker, 1880-1949), V. Volterra (italienischer Mathematiker, 1860-1940) vorgeschlagen. Es beschreibt die Wechselwirkung zweier Populationen, der der Räuber und der der Beute. Die Beute-Population sei $y_1(t)$, die Räuber-Population sei $y_2(t)$. Das Differentialgleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1(a - by_2) = f_1(y_1, y_2),\\
\dot{y}_2 &= y_2(-c + dy_1) = f_2(y_1, y_2),
\end{aligned}$$

wobei a, b, c, d positive Konstanten sind.
Sind keine Räuber vorhanden ($y_2 = 0$), dann erhalten wir

$$\dot{y}_1 = ay_1.$$

Sind Räuber vorhanden, fällt die Wachstumsrate von a auf $(a-by_2)$ und kann sogar negativ werden. Ist die Beutepopulation gleich Null, dann ist

$$\dot{y}_2 = y_2(-c),$$

d. h. die Wachstumsrate der Räuberpopulation ist negativ. Wächst der Beutevorrat, dann steigt die Wachstumsrate der Räuber. Gehen wir noch von einem Anfangszustand aus:

$$\begin{aligned}
y_1(t_0) &= y_1^0,\\
y_2(t_0) &= y_2^0,
\end{aligned}$$

dann liegt ein Anfangswertproblem im obigen Sinn vor. Auch für Systeme gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard/Lindelöf.

Theorem 5.12. *Betrachtet wird das Anfangswertproblem*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \tag{5.38}$$

wobei $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *eine stetige Funktion ist und einer Lipschitzbedingung im zylindrischen Gebiet* $B = \{(x, y) : |x - x_0| < a, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < b\}$ *bezüglich* $\boldsymbol{y}$ *genügt*

$$|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)| \leq c_L |\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (5.37), (5.38) in $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, *wobei* $|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})| \leq M$ *in* B *ist. Diese Lösung kann durch sukzessive Approximation*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0(x) &\equiv \boldsymbol{y}_0, \\
\boldsymbol{y}_1(x) &= \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_0)\, dx, \\
&\vdots \\
\boldsymbol{y}_n(x) &= \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_{n-1})\, dx, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

erhalten werden.

Beispiel

Wir betrachten wieder das Räuber-Beute-Modell

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_1(a - by_2) = f_1(y_1, y_2), \\
\dot{y}_2 &= y_2(-c + dy_1) = f_2(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Wir überlegen, dass $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^\top$ stetig ist und einer Lipschitzbedingung genügt. Da alle partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{f}$ stetige Funktionen sind, existiert die totale Ableitung (Vektorgradient) $D\boldsymbol{f}$ und es gilt nach dem Mittelwertsatz 4.69

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{y}}) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}),$$

wobei $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y} + t(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}), t \in [0, 1]$ ist. Damit gilt

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{y}})| \leq \max_{i,j} \left| \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\eta})}{\partial y_j} \right| |\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}|.$$

Wir haben erhalten: Ist $\boldsymbol{f}$ stetig differenzierbar nach $\boldsymbol{y}$ und $D_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ beschränkt, dann genügt $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung.

Systeme von Differentialgleichungen und skalare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Der Existenz-und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme von Systemen kann benutzt werden, um Anfangswertprobleme für Differentialgleichungen höherer Ordnung zu lösen. Die explizite Form einer Differentialgleichung höherer Ordnung hat die Gestalt:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Beispiel

1° Schwingungsgleichung:

$$m\ddot{y}(t) = f(t) - ky(t) - r\dot{y}(t).$$

Hierbei ist $y = y(t)$ die Auslenkung eines Körpers der Masse m zur Zeit t, $f(t)$ die äußere einwirkende Kraft, $ky(t)$ die rücktreibende Federkraft (elastische Kraft) und $r\dot{y}(t)$ die Reibungskraft (siehe Abbildung 5.5).

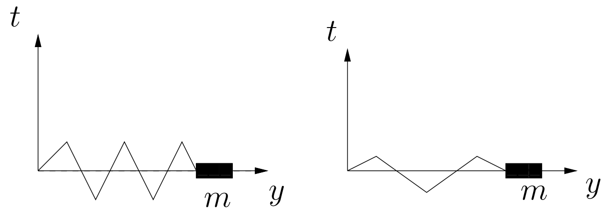


Abbildung 5.5: Auslenkung eines Masseteilchens m

2° Differentialgleichung der Kettenlinie (siehe Abbildung 5.6)

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

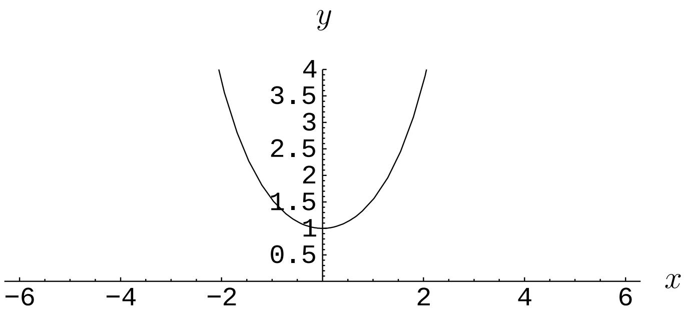


Abbildung 5.6: $y = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

Das Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung höherer Ordnung lautet: Finde eine Funktion $y = y(x)$, so dass

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= y_1, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Setzen wir $u_1 := y, u_2 := y', \dots, u_n = y^{(n-1)}$ können wir das Anfangswertproblem (5.39) als Anfangswertproblem für folgendes System von Differentialgleichungen schreiben:

$$\begin{array}{ll} u_1' = u_2 & u_1(x_0) = y_0, \\ u_2' = u_3 & u_2(x_0) = y_1, \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ u_n' = f(x, u_1, \dots, u_n) & u_n(x_0) = y_{n-1}. \end{array}$$

Kurz:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{u})' &= \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ f(x, u_1, \dots, u_n) \end{pmatrix} = F(x, \boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{u}(x_0) = \boldsymbol{u}_0(x_0) &= \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Beispiel

Wir sehen uns noch einmal die Differentialgleichung der Kettenlinie an: $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$. Setzen wir $u_1 = y, u_2 = y'$ erhalten wir das System

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2, \\ u_2' &= \sqrt{1 + u_2^2}. \end{aligned}$$

Lemma 5.13. *Die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lösung von (5.39), wenn $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lösung von (5.40) ist.*

Remark 5.14. Jede Differentialgleichung höherer Ordnung und jedes System höherer Ordnung ist als System 1. Ordnung darstellbar. Aber nicht jedes System 1. Ordnung kann in eine Differentialgleichung höherer Ordnung überführt werden.

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1
Man betrachte die Folge (y_n) der Picard-Iteration für das Anfangswertproblem

$$y' = (1+y)\cos x\,, \qquad y(0) = 1.$$

1. Man berechne y_n für $n = 0, 1, 2, 3, 4$.
2. Aus a) gewinnt man eine Vermutung für y_n für $n \in \mathbb{N}$ beliebig, die Sie mittels vollständiger Induktion beweisen können aber nicht müssen. Verwenden Sie jedoch diese Vermutung, um zu zeigen dass die Folge (y_n) punktweise konvergiert und dass die Grenzfunktion eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

Aufgabe 21.2 Die Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} 2\big(x - y/\sqrt{|y|}\,\big)\,, & y \neq 0\,, \\ 2x\,, & y = 0\,. \end{cases}$$

1. Man zeige, dass die Folge (y_n) der Picard-Iteration zum Anfangswertproblem $y' = g(x,y),\ y(0) = 0$ nicht konvergiert. Welche Vorausetzung der Picard–Iteration ist verletzt?
2. Bestimmen Sie eine Lösung dieses Anfangswertproblems auf dem Intervall $[0,\infty)$ mit dem Ansatz $y(x) = \alpha x^2$, wobei $\alpha > 0$.

5.3 Lineare Systeme 1. Ordnung und lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Lineare Systeme 1. Ordnung

Wir schreiben anstelle der unabhängigen Variablen x jetzt t, um die zeitlich ablaufenden Prozesse deutlicher zu kennzeichnen. Ein lineares System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung hat die Gestalt

$$\boldsymbol{y}'(t) = -A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \tag{5.41}$$

wobei $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$ eine Matrix mit Einträgen von stetigen Funktionen $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{b}(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t))^\top$ ein Spaltenvektor aus stetigen Funktionen $b_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, ist. Ausführlich geschrieben lautet (5.41)

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -a_{11}(t)y_1 - \dots - a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n'(t) &= -y_{n1}(t)y_n - \dots - a_{nn}(t)y_n + b_n(t). \end{aligned}$$

Wir wenden den Satz von Picard/Lindelöf für Systeme an, um zu zeigen, dass Anfangswertprobleme für lineare Systeme 1. Ordnung eindeutig lösbar sind.

Theorem 5.15. *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) &= -A(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \\ \boldsymbol{y}(t_0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{aligned} \tag{5.42}$$

genau eine Lösung im Intervall $I = [t_0 - h, t_0 + h] \subset \mathbb{R}$. Die Intervalllänge h ist durch Satz 5.12 gegeben.

Beweis. Wir zeigen, dass $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$ einer Lipschitzbedingung bezüglich $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ genügt:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \tilde{\boldsymbol{y}})| &= |A(t)(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}})| \\ &\le \max_{i,j,t\in J} |a_{ij}(t)||\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}})| = c_L|\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}|. \end{aligned}$$

Hierbei ist J ein beliebiges abgeschlossenes Intervall. □

Allgemeine Lösung des linearen Systems

Das System (5.41) kann analog zu den Ausführungen für eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (5.17) folgendermaßen geschrieben werden

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}'(t) + A(t)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{b}(t), \tag{5.43}$$

wobei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung ist. Hierbei sind $V = \{\boldsymbol{y} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, y_i$ stetig differenzierbar$\}$ und $W = \{\boldsymbol{w} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, w_i$ stetig$\}$ lineare Räume. Es gilt auch hier:
Die **allgemeine Lösung** von (5.43) hat die Gestalt

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_p,$$

wobei $\boldsymbol{y}_h \in \ker L$ Lösung der homogenen Gleichung

$$L\boldsymbol{y} = 0 \tag{5.44}$$

und $\boldsymbol{y}_p$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$$

sind.

Die homogene Gleichung $\boldsymbol{y}' + A(t)\boldsymbol{y} = 0$

Wir beschreiben die allgemeine Gestalt der Lösung $\boldsymbol{y}_h$:

Theorem 5.16. *Die Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems spannen einen n-dimensionalen Vektorraum auf, d. h.* $\dim(\ker L) = n$.

Beweis. Wir überlegen zunächst, was lineare Unabhängigkeit im Raum V bedeutet. Die Funktionen $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ sind linear unabhängig, falls

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{y}_i(t) = \boldsymbol{0} \quad \forall\, t \in I \;\Leftrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0. \tag{5.45}$$

Wir zeigen, dass n linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung existieren. Dazu betrachten wir ein $t_0 \in I$ und die n Anfangswertprobleme

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow i - \text{te Stelle} \;, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Lösungen dieser Anfangswertprobleme sind eindeutig bestimmt und werden mit $\boldsymbol{y}_i$ bezeichnet. Da

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{y}_i(t_0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow c_i = 0,$$

sind diese Lösungen linear unabhängig nach (5.45). Da für ein festes $t \in I$ die Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ Zahlenvektoren im $\mathbb{R}^n$ sind und es dort höchstens n linear unabhängige Vektoren gibt, kann es nicht mehr als n linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung geben. $\square$

Definition 5.17. Ein System von n linear unabhängigen Lösungen $\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1,\dots,n}$ der homogenen Differentialgleichung (5.44) wird **Fundamentalsystem** genannt.

Conclusion 5.18. Jede Lösung $\boldsymbol{y}_h$ lässt sich auf genau eine Weise als Linearkombination von Elementen eines Fundamentalsystems darstellen

$$\boldsymbol{y}_h = c_1\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n.$$

Wir geben jetzt ein Kriterium an, mit dem wir testen können, ob ein vorliegendes System von Lösungen der homogenen Gleichung ein Fundamentalsystem ist. Dazu schreiben wir

$$\boldsymbol{y}_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Lemma 5.19. *Das System $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n\}$ von Lösungen der homogenen Gleichung ist ein Fundamentalsystem genau dann, wenn*

(a)

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \dots & y_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \dots & y_{nn}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \textit{für alle } t \in I$$

oder

(b)

$$W(t_0) = \det \begin{pmatrix} y_{11}(t_0) & \dots & y_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t_0) & \dots & y_{nn}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \textit{für ein } t_0 \in I.$$

Remark 5.20. $W(t)$ heißt Wronski-Determinante.

Beweis. Wir erinnern an das Rechnen mit Determinanten (Abschnitt 2.5 [7]) Zahlenvektoren sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn die Determinante ungleich 0 ist. Somit ist die Aussage (a) äquivalent dazu, dass ein Fundamentalsystem vorliegt.
Wir nehmen an, dass (b) für ein $t_0 \in I$ erfüllt ist, d. h.

$$c_1\boldsymbol{y}_1(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(t_0) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; c_1 = \cdots = c_n = 0. \tag{5.46}$$

Die Vektorfunktionen $\boldsymbol{y}_i, i = 1, \dots, n$, können wir als Lösungen der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{y}_i &= 0, \\ \boldsymbol{y}_i(t_0) &= \boldsymbol{y}_i^0 \end{aligned}$$

interpretieren. Damit ist

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{y}_i(t)$$

Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} L\boldsymbol{y} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{y}(t_0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{y}_i(t_0). \end{aligned}$$

Es ist nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz 5.12.

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{y}_i(t) \equiv \mathbf{0} \text{ in } I \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y}(t_0) = \mathbf{0} \ \stackrel{(5.46)}{\Leftrightarrow} \ c_i = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n,$$

d. h. $\{\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n\}$ bilden ein Fundamentalsystem. $\square$

Beispiel

Für $t > 0$ betrachten wir das System

$$\boldsymbol{y}' - \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \mathbf{0},$$

das ausführlich geschrieben lautet:

$$y_1' - \frac{1}{t} y_1 - y_2 = 0, \tag{5.47}$$

$$y_2' - \frac{1}{t} y_2 = 0. \tag{5.48}$$

Die Gleichung (5.48) hat die Lösungen $y_2 = 0$ und $y_2 = t$. Durch Einsetzen in Gleichung (5.47) erhalten wir die entsprechenden Lösungen $y_1 = t$ und $y_1 = t^2$. Damit ist das System $\left\{ \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \right\}$ auf lineare Unabhängigkeit zu untersuchen. Die Wronski-Determinante lautet

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \quad \text{für } t > 0.$$

Somit ist

$$\boldsymbol{y}_h = c_1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die inhomogene Gleichung

Da die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}'(t) + A(t)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{b}(t) \quad \text{für } t \in I \tag{5.49}$$

lautet

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_p$$

müssen wir nur eine Lösung $\boldsymbol{y}_p$ von (5.49) bestimmen. Analog zum Fall einer linearen Differentialgleichung verwenden wir auch hier die Methode der Variation der Konstanten. Wir machen den Ansatz

$$\boldsymbol{y}_p = c_1(t)\boldsymbol{y}_1(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{y}_n(t), \tag{5.50}$$

wobei $\{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$ ein Fundamentalsystem ist. Einsetzen von (5.50) in (5.49) liefert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_p' + A(t)\boldsymbol{y}_p &= \sum_{i=1}^{n} (c_i'(t)\boldsymbol{y}_i + c_i(t)\boldsymbol{y}_i') + A(t)\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\boldsymbol{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{b}(t). \end{aligned} \tag{5.51}$$

Gleichung (5.51) können wir mit Hilfe der Wronski-Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & \ldots & y_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(t) & \ldots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

schreiben als

$$Y(t)\boldsymbol{c}'(t) = \boldsymbol{b}(t), \tag{5.52}$$

wobei $\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ ist. Da $\det Y \neq 0$ ist, existiert die inverse Matrix $Y^{-1}(t)$ und (5.52) kann geschrieben werden als

$$\boldsymbol{c}'(t) = Y^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t),$$

woraus

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\,d\tau$$

bzw. für $\boldsymbol{c}(t_0) = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{c}(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\,d\tau$$

folgt. Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Theorem 5.21.

- *Eine Partikulärlösung von (5.49) hat die Form*

$$\boldsymbol{y}_p = Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\, d\tau.$$

- *Die allgemeine Lösung von (5.49) lautet*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_p \\ &= Y(t)\boldsymbol{c} + Y(t) \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\, d\tau \\ &= Y(t) \left(\boldsymbol{c} + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\, d\tau \right), \end{aligned} \tag{5.53}$$

  wobei $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ *beliebig ist.*

- *Das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) + A(t)\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{b}(t), \\ \boldsymbol{y}(t_0) &= \boldsymbol{y}_0 \end{aligned}$$

  besitzt die eindeutig bestimmte Lösung

$$\boldsymbol{y}(t) = Y(t) \left(Y^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\boldsymbol{b}(\tau)\, d\tau \right). \tag{5.54}$$

Beweis. Wir überprüfen nur die Anfangsbedingung. Durch Einsetzen von $t = t_0$ in (5.54) folgt, dass

$$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$$

ist. Außerdem ist (5.54) ein Spezialfall von (5.53). Man setze $\boldsymbol{c} = Y^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}_0$. □

Remark 5.22. Wir haben durch die Konstruktion der Lösung (5.54) gezeigt, dass Anfangswertprobleme der Gestalt (5.42) in einem beliebigen beschränkten Intervall I eine eindeutig bestimmte Lösung besitzen.

Beispiel

Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:
Finde Funktionen y_1 und y_2, so dass

$$\begin{aligned} y_1' - \frac{1}{t}y_1 - y_2 &= t^2, \qquad (5.55) \\ y_2' - \frac{1}{t}y_2 &= t, \\ y_1(1) &= 1, \\ y_2(1) &= 0. \end{aligned}$$

Wir haben ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems bereits berechnet:

$$\left\{ \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Wronski-Matrix und ihre Inverse ([7, 2.4, S.113]) lauten

$$Y(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad Y^{-1}(t) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Formel (5.54) liefert uns

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(t) &= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_1^t \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} \tau & -\tau^2 \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau \end{pmatrix} d\tau \right) \\
&= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_1^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \right) \\
&= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} t + t^3 - t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{1 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{y}_p}.
\end{aligned}$$

Die Hauptschwierigkeit bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten $A = A(t)$ erster Ordnung besteht darin, ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems zu finden. Ist A eine konstante Matrix, dann kann man ein Fundamentalsystem berechnen.

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \tag{5.56}$$

wobei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ eine Matrix mit konstanten Koeffizienten ist, kann mit Hilfe eines Exponentialansatzes berechnet werden.

Exponentialansatz

Es sind Zahlenvektoren $\boldsymbol{c}$ mit komplexen Einträgen und komplexe Zahlen λ zu finden, so dass

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c}e^{\lambda t} \tag{5.57}$$

Lösungen des homogenen Systems (5.56) sind.

Remark 5.23. Komplexe Größen müssen betrachtet werden, da dieser Ansatz zu Eigenwertproblemen führt. Zerlegen der komplexen Lösung in Real-und Imaginärteil führt zu reellen Lösungen.

Einsetzen von (5.57) in (5.56) liefert

$$\lambda \boldsymbol{c} e^{\lambda t} = A \boldsymbol{c} e^{\lambda t}.$$

Wir erhalten die folgende Aussage:

Lemma 5.24. *Die Vektorfunktion $\boldsymbol{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{c} e^{\lambda t}$ ist genau dann Lösung des homogenen Systems, falls gilt*

$$A\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{c}, \tag{5.58}$$

d. h. $(\lambda, \boldsymbol{c})$ ist Eigenpaar von A (vergleiche Definition 2.51, [7]).

Wir erinnern an Ergebnisse aus der linearen Algebra ([7, Satz 2.54])

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

besitzt eine nichttriviale Lösung $\boldsymbol{c}$ genau, dann wenn

$$\det(A - \lambda E) = P(\lambda) = 0$$

ist. Weiterhin hatten wir bewiesen: ([7, Satz 2.58]): A ist diagonalisierbar, falls

$$\sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = n,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, k \leq n$, verschiedene Eigenwerte von A sind. In diesem Fall existieren n linear unabhängige Eigenvektoren von A aus denen wir ein Fundamentalsystem konstruieren können. Dabei unterscheiden wir zwischen reellen und komplexen Eigenwerten.

Theorem 5.25.

1. *A sei diagonalisierbar und besitze k_1 verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}$ mit der geometrischen Vielfachheit* 1 *(d. h.* $\dim E_{\lambda_i} = 1$*) und $n-k_1$ verschiedene komplexe Eigenwerte $\lambda_{k_1+1}, \ldots, \lambda_n$. Die Anzahl der komplexen Eigenwerte ist stets gerade und es treten jeweils Paare von konjugiert komplexen Eigenwerten auf*

   $$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad \lambda_j^* = \alpha_j - i\beta_j, \quad j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + \frac{n - k_1}{2}.$$

   Dann bilden die Vektorfunktionen

   $$\begin{aligned} \{&\boldsymbol{y}_1(t) = \boldsymbol{c}_1 e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{y}_2(t) = \boldsymbol{c}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \boldsymbol{y}_{k_1}(t) = \boldsymbol{c}_{k_1} e^{\lambda_{k_1} t}, \\ &\boldsymbol{y}_{k_1+1}(t) = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{c}_{k_1+1} e^{\lambda_{k_1+1} t}\right), \boldsymbol{y}^*_{k_1+1}(t) = \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{c}_{k_1+1} e^{\lambda_{k_1+1} t}\right), \ldots, \\ &\boldsymbol{y}_{k_1+\frac{n-k_1}{2}}(t) = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{c}_{k_1+\frac{n-k_1}{2}} e^{\lambda_{k_1+\frac{n-k_1}{2}} t}\right) \\ &\boldsymbol{y}^*_{k_1+\frac{n-k_1}{2}}(t) = \operatorname{Im}\left(\boldsymbol{c}_{k_1+\frac{n-k_1}{2}} e^{\lambda_{k_1+\frac{n-k_1}{2}} t}\right)\} \end{aligned} \tag{5.59}$$

   ein Fundamentalsystem.

2. *Ist A diagonalisierbar und es treten mehrfache reelle bzw. mehrfache Paare von komplexen Eigenwerten auf, dann gilt ein entsprechendes Resultat. In diesem Fall treten in der Darstellung (5.59) Vektorfunktionen mit gleichem Eigenwert λ_i und zugehörigen unterschiedlichen Eigenvektoren $\boldsymbol{c}_i$ auf, z. B. falls $\dim E_{\lambda_i} = r_i$ ist für einen reellen Eigenwert λ_i, dann betrachten wir die linear unabhängigen Lösungen*

$$\boldsymbol{y}_{i_1}(t) = \boldsymbol{c}_{i_1} e^{\lambda_i t}, \boldsymbol{y}_{i_2}(t) = \boldsymbol{c}_{i_2} e^{\lambda_i t}, \ldots, \boldsymbol{y}_{i_{r_i}} = \boldsymbol{c}_{i_{r_i}} e^{\lambda_i t}.$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass das Fundamentalsystem (5.59) tatsächlich aus linear unabhängigen Lösungen besteht. Dazu betrachten wir die Wronski-Determinante zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, deren Spalten die linear unabhängigen reellen bzw. komplexen Eigenvektoren $\boldsymbol{c}_i$, $i = 1, \ldots, n$, sind. Die zu den Paaren von komplexen und konjugiert komplexen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind ebenfalls konjugiert komplex. Durch Übergang zu den Real-und Imaginärteilen der komplexen Eigenvektoren erhalten wir ein System von n linear unabhängigen reellen Eigenvektoren. □

Remark 5.26. Ist A nicht diagonalisierbar, dann ist die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren kleiner als n. Fehlende Elemente des Fundamentalsystems können durch Ansätze der Form

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{pmatrix} p_1^0(t) \\ \vdots \\ p_n^0(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \quad \boldsymbol{y}_2(t) = \begin{pmatrix} p_1^1(t) \\ \vdots \\ p_n^1(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \ldots, \boldsymbol{y}_k(t) = \begin{pmatrix} p_1^{k-1}(t) \\ \vdots \\ p_n^{k-1}(t) \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

konstruiert werden, wobei λ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und $p_j^l(t)$ Polynome vom Grad $\leq l$, $l = 1, \ldots, k-1$, sind. Welche Polynomgrade auftreten, hängt von der Jordanschen Normalform ab.

Beispiel [8, S.187]

Wir betrachten das System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_3, \\ y_3' &= 4y_1 - 2y_2 - y_3. \end{aligned}$$

Es lautet in Matrix-Vektorschreibweise

$$\boldsymbol{y}'(t) = A\boldsymbol{y}(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 4 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) + 8 - 4(1+\lambda) - 2(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\alpha, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\alpha, \quad \lambda_3 = 1, \quad \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren sind Lösungen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_i E)\boldsymbol{c}_i = \mathbf{0}.$$

Wir erhalten

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\alpha \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - i\alpha \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die Vektorfunktionen eines Fundamentalsystems

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1(t) &= \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\alpha \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i\alpha)t}\right) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + i\alpha)(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \\ 2(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \\ 4(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \end{pmatrix}\right) e^{-\frac{1}{2}t} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos(\alpha t)e^{-\frac{1}{2}t} - \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\alpha t)e^{-\frac{1}{2}t}, \\
\boldsymbol{y}_2(t) &= \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + i\alpha)(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \\ 2(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \\ 4(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t)) \end{pmatrix}\right) e^{-\frac{1}{2}t} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\alpha t)e^{-\frac{1}{2}t} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin(\alpha t)e^{-\frac{1}{2}t}, \\
\boldsymbol{y}_3(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t.
\end{aligned}$$

Beispiel [8, S. 192]

Es ist die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems zu berechnen:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= 4y_1 - 3y_2 \end{aligned}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Wir bestimmen die Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} &= -(1-\lambda)(3+\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda = -1$ zweifache Nullstelle. Wir berechnen die Eigenvektoren $\boldsymbol{c}$ als Lösungen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_1)\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt nur eine linear unabhängige Lösung $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\boldsymbol{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Lösung von (5.60). Wir machen einen Polynomansatz, um eine zweite linear unabhängige Lösung zu berechnen:

$$\boldsymbol{y}_2(t) = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 t \\ b_0 + b_1 t \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} y_{12}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $\boldsymbol{y}_2$ in (5.60) liefert

$$\boldsymbol{y}_2'(t) = \begin{pmatrix} a_1 - a_0 - a_1 t \\ b_1 - b_0 - b_1 t \end{pmatrix} e^{-t} = \left[A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} t \right] e^{-t},$$

woraus

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ b_1 - b_0 \end{pmatrix}, \tag{5.61}$$

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

folgt. Wir lesen aus (5.62) ab, dass $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor ist und aus (5.61), dass $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine mögliche Wahl ist. Damit ist

$$\boldsymbol{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 + t \\ -1 + 2t \end{pmatrix} e^{-t}$$

eine weitere Lösung. Sie ist linear unabhängig von $\boldsymbol{y}_1(t)$, da

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

ist.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = f(t) \quad \text{in } \mathbb{R}, \tag{5.63}$$

wobei $a_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, n-1$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. I ist ein beliebiges abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$.
Die Abbildung $L : V \to W$, $V = \{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar in } I\}$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ stetig in } I\}$.

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y,$$

ist linear. Daher ist jede Lösung von $Ly = f$ darstellbar als

$$y = y_h + y_p.$$

Wie wir gesehen haben, können wir Gleichungen höherer Ordnung als System schreiben. Mit der Bezeichnung

$$u_1 = y, \ldots, u_n = y^{(n-1)}$$

erhalten wir das lineare System

$$\boldsymbol{u}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

Es gilt: $\boldsymbol{u}$ ist Lösung des Systems (5.64) genau dann, wenn $y := u_1$ Lösung von (5.63) ist. Damit ist die Lösungstheorie für lineare Systeme unmittelbar auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragbar.

Theorem 5.27.

1. *Die Menge*

$$V_0 = \{y :\ I \to \mathbb{R},\ y \textit{ ist } n\textit{-mal differenzierbar, } Ly = 0\} \subset V$$

ist ein Vektorraum der Dimension n. Eine Basis von V_0 heißt Fundamentalsystem.

2. *n Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ von $Ly = 0$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die Wronski-Determinante für ein $t_0 \in I$*

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & \ldots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Es gilt dann $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

3. *Jede Lösung y_h lässt sich als Linearkombination aus Basiselementen darstellen*

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t).$$

4. *Eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung kann durch Variation der Konstanten*

$$y_p = c_1(t)y_1 + \cdots + c_n(t)y_n$$

gewonnen werden. Dabei ist $\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ *Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{pmatrix}. \tag{5.65}$$

Beweis. Wir zeigen 4. . Es ist

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t), \\
y_p'(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1(t) + \cdots + c_n'(t)y_n(t)}_{=0,\ \text{erste Zeile} \times \text{Spalte in (5.65)}} + c_1(t)y_1'(t) + \cdots + c_n(t)y_n'(t), \\
y_p''(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1'(t) + \cdots + c_n'(t)y_n'(t)}_{=0,\ \text{zweite Zeile} \times \text{Spalte in (5.65)}} + c_1(t)y_1''(t) + \cdots + c_n(t)y_n''(t), \\
&\vdots \\
y_p^{(n)} &= \underbrace{c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t)}_{=f(t),\ \text{letzte Zeile} \times \text{Spalte in (5.65)}} + c_1(t)y_1^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t),
\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ableitungen in (5.63) liefert

$$y_p^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_p^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y_p = f(t).$$

□

Beispiel
Wir betrachten die inhomogene Gleichung

$$y'' - \frac{y'}{t} = t \quad \text{für } t > 0.$$

Die homogene Gleichung

$$y'' - \frac{y'}{t} = 0$$

hat die allgemeine Lösung $y = c_1 t^2 + c_2$. Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit Hilfe des Ansatzes:

$$y_p(t) = c_1(t)t^2 + c_2(t).$$

nach (5.65) werden $c_1(t)$ und $c_2(t)$ aus dem System

$$\begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ 2t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \tag{5.66}$$

bestimmt. Aus (5.66) folgt

$$c_1'(t) = \frac{1}{2},$$
$$c_2'(t) = -\frac{1}{2}t^2$$

und damit

$$c_1(t) = \frac{1}{2}t, \quad c_2(t) = -\frac{1}{6}t^3, \quad y_p = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^3 = \frac{t^3}{3}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y = c_1 t^2 + c_2 + \frac{t^3}{3}.$$

Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es sei jetzt

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = f(t),$$

wobei die Koeffizienten $a_i, i = 0, 1, \ldots, n-1$, konstant sind.

Homogene Gleichung

Wir konstruieren ein Fundamentalsystem indem wir den Ansatz

$$y = e^{\lambda t}$$

in die homogene Gleichung einsetzen. Es folgt

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)}_{P(\lambda)} e^{\lambda t} = 0,$$

was zu

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

führt. $P(\lambda)$ heißt auch in diesem Fall charakteristisches Polynom.

Remark 5.28. Wir können vom homogenen System (5.64) ausgehen und dort den Ansatz $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}e^{\lambda t}$ einsetzen. Dies führt ebenfalls (Entwicklung nach der letzten Zeile) zu

$$-P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & \dots & & \dots & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0).$$

Theorem 5.29. *Ist λ k-fache (reelle oder komplexe) Nullstelle des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ so entsprechen ihr k-Lösungen*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t} \tag{5.67}$$

der homogenen Differentialgleichung. Aus den n Nullstellen (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) werden durch (5.67) n linear unabhängige Lösungen geliefert. Man erhält ein Fundamentalsystem reeller Lösungen falls man die Lösungen, die zu einer komplexen Nullstelle $\lambda = \alpha + i\beta$ gehören, in Real-und Imaginärteil zerlegt:

$$t^q e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad t^q e^{\alpha t}\sin(\beta t), \quad q = 0, \dots, k-1.$$

In diesem Fall entfallen die k komplexen Lösungen, die zu $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ gehören.

Beispiel

Wir betrachten

$$y^{(8)} - 5y^{(7)} + 11y^{(6)} - 17y^{(5)} + 21y^{(4)} - 19y''' + 13y'' - 7y' + 2y = 0.$$

$$\lambda^8 - 5\lambda^7 + 11\lambda^6 - 17\lambda^5 + 21\lambda^4 - 19\lambda^3 + 13\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$$

ist das charakteristische Polynom mit den Nullstellen:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = i, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = -i.$$

Ein reelles Fundamentalsystem besteht aus den 8 linear unabhängigen Lösungen

$$\{e^t, te^t, t^2e^t, e^{2t}, \cos t, \sin t, t\cos t, t\sin t\}.$$

Inhomogene Gleichung

Durch Variation der Konstanten kann man wie im allgemeineren Fall eine partikuläre Lösung bestimmen. Hat die rechte Seite $f(t)$ eine gewisse Gestalt, dann führt ein Ansatzverfahren häufig schneller zum Ziel: Sei

$$f(t) = (f_k t^k + \dots + f_0)e^{rt}.$$

1.Fall

r ist eine reelle Zahl, r ist **keine** Nullstelle von $P(\lambda)$. Ansatz:

$$y = (A_k t^k + \cdots + A_0)e^{rt}.$$

2.Fall

r ist m-fache Wurzel von $P(\lambda)$. Ansatz

$$y = t^m (A_k t^k + \cdots + A_0)e^{rt}.$$

Ähnlich kann man vorgehen, wenn $r = r_1 + ir_2$ komplexwertig ist, und f die Gestalt besitzt

$$f(t) = (f_k t^k + \cdots + f_0)e^{r_1 t}\cos(r_2 t) + (g_k t^k + \cdots + g_0)e^{r_1 t}\sin(r_2 t).$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.1

Man bestimme die Lösung des Systems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Index

Literaturverzeichnis

[1] Beyer, Gottwald, Günther und Wünsch. *Grundkurs Analysis vol.1* Teubner Verlag, Leipzig, 1972.

[2] Brill, M. *Mathematik für Informatiker.* Hanser-Verlag, 2001.

[3] Hachenberger, D. *Mathematik für Informatiker* Pearson Studium 2005

[4] Hartmann, P. *Mathematik für Informatiker.* Vieweg Verlag, 2002.

[5] Burg, K., Haf, H. *Höhere Mathematik für Ingenieure,* vol. I und II. Teubner Verlag, 2001, 2002.

[6] Mayberg, K., Vachenauer, P. *Höhere Mathematik I.* Springer-Verlag, 2001.

[7] Sändig, A.-M. *Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker I, WS 2006/2007*, Bericht des IANS der Universität Stuttgart, Nr.2007/008, 2007.

[8] Walter,W. *Gewöhnliche Differentialgleichungen* 7.ed. Springer-Verlag, 2000.

[9] Wendland, W.L., Steinbach,O. *Analysis*, Teubner Verlag 2005.

Erschienene Preprints ab Nummer 2007/001

Komplette Liste: `http://preprints.ians.uni-stuttgart.de`

2007/001 *Lehrstuhl Rohde, Lehrstuhl Wohlmuth, AG Sändig*: Jahresbericht IANS 2006

2007/002 *Dechevski, L.T., Wendland, W.L.*: On the Bramble-Hilbert Lemma, II

2007/003 *Hager, C., Wohlmuth, B.I.*: Analysis of a modified mass lumping method for the stabilization of frictional contact problems

2007/004 *Sändig, A.-M.*: Variational methods for nonlinear boundary value problems in elasticity. Lectures at the Charles University Prague, Feb.07

2007/005 *Dressel, A., Rohde, C.*: Global existence and uniqueness of solutions for a viscoelastic two-phase model with nonlocal capillarity

2007/006 *Dressel, A., Rohde, C.*: Time-asymptotic behaviour of weak solutions for a viscoelastic two-phase model with nonlocal capillarity

2007/007 *Kohr, M., Wendland, W.L.*: Boundary integral equations for a three-dimensional Brinkman flow problem

2007/008 *Sändig, A.-M.*: Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker I, WS 2006/2007

2007/009 *Surulescu, C.*: On a Time-Dependent Fluid-Solid Coupling in 3D with Non-standard Boundary Conditions

2007/010 *Melnyk, T.*: Homogenization of a Boundary-Value Problem with a Nonlinear Boundary Condition in a Thick Junction of Type 3:2:1

2007/011 *Haink, J., Rohde, C.*: Local Discontinuous-Galerkin Schemes for Model Problems in Phase Transition Theory

2007/012 *Weiss, A., Wohlmuth, B.I.*: A posteriori error estimator and error control for contact problems

2007/013 *Sändig, A.-M.*: Vorlesung Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker II, SS 2007