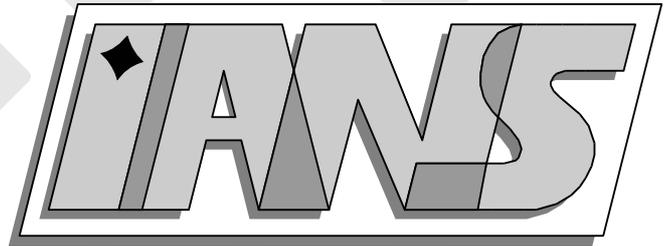


**Universität  
Stuttgart**



---

Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen  
auf partielle Differentialgleichungen  
Vorlesung im Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**



**Universität Stuttgart**

---

Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen  
auf partielle Differentialgleichungen  
Vorlesung im Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

---

**Berichte aus dem Institut für  
Angewandte Analysis und Numerische Simulation**

Vorlesungsskript 2009/001

Institut für Angewandte Analysis und Numerische Simulation (IANS)  
Fakultät Mathematik und Physik  
Fachbereich Mathematik  
Pfaffenwaldring 57  
D-70 569 Stuttgart

**E-Mail:** [ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:ians-preprints@mathematik.uni-stuttgart.de)

**WWW:** <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

ISSN 1611-4176

© Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck nur mit Genehmigung des Autors.  
IANS-Logo: Andreas Klimke.  $\LaTeX$ -Style: Winfried Geis, Thomas Merkle.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Fixpunktsätze</b>	<b>9</b>
1.1 Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	10
1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder . . . . .	20
1.3 Schäferscher Fixpunktsatz (Leray-Schauder Prinzip) . . . . .	34
<b>2 Theorie monotoner Operatoren</b>	<b>39</b>
2.1 Monotonie und Stetigkeit . . . . .	39
2.2 Der Satz von Browder und Minty . . . . .	44
2.3 Der Nemyckii-Operator . . . . .	50
2.4 Pseudomonotone Operatoren und der Satz von Brézis . . . . .	56
2.5 Maximal monotone Operatoren . . . . .	66
2.6 Variationsungleichungen . . . . .	79
<b>3 Zeitabhängige Probleme</b>	<b>87</b>
3.1 Zeitableitungen . . . . .	87
3.2 Anwendung der Theorie maximal monotoner Operatoren . . . . .	90



## Einleitung

Zahlreiche Probleme in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, in der Ökonomie und Medizin werden als nichtlineare mathematische Aufgaben formuliert. Als Beispiel seien genannt:

- in der Festkörpermechanik: Deformation elastischer Körper, Kontakt- und Bruchprobleme, Verhalten von elasto-plastischen und plastischen Materialien;
- in der Strömungsmechanik: Flüsse um Hindernisse, Schockwellen in Gasen, Bewegung viskoser Fluide, Turbulenzen, Oberflächenwellen;
- in der Chemie, Physik und Biologie: nichtlineare Evolutionsgleichungen, Schmelzprozesse, chemische Reaktionen, Wärmeausbreitung, Verhalten von elastischen und magnetischen Feldern, Prozesse in Kernreaktoren, Diffusionsprozesse, dynamische Systeme;
- in der Ökonomie: Optimierungsprobleme, inverse Probleme.

In vielen Fällen führt die mathematische Modellierung auf nichtlineare Differential- und Integralgleichungen, auf die Minimierung nichtlinearer Funktionale oder auf Variationsungleichungen.

Wir untersuchen nichtlineare Operatorgleichungen im Rahmen der Funktionalanalysis:

$$Ax = y, \quad A : X \rightarrow Y .$$

Hierbei sind  $X$  und  $Y$  topologische Räume, z.B. können sie Teilmengen von Banachräumen sein. Die abstrakten Methoden der Funktionalanalysis führen zu Aussagen über die Lösbarkeit, Existenz und Eindeutigkeit, zu Abschätzungen und zur Charakterisierung des Verhaltens der Lösungen.

Es werden folgende Schwerpunkte gesetzt:

- Fixpunktsätze (z.B. Banach, Brouwer, Schauder) und Anwendungen
- Monotone und pseudomonotone Operatoren mit Anwendungen
- Maximal monotone Operatoren und Variationsungleichungen
- Zeitabhängige Probleme

Als Literatur wird empfohlen: [6], [10].



# Kapitel 1

## Fixpunktsätze

In diesem Kapitel gehen wir auf eine der wichtigsten Methoden zur Behandlung nichtlinearer Probleme ein: die Formulierung als Fixpunktgleichung und Anwenden von Fixpunktsätzen.

Es sei

$$T : M \subset X \rightarrow M$$

eine „Selbstabbildung“ einer Teilmenge eines metrischen, normierten oder topologischen Raumes  $X$  in sich. Die Gleichung

$$Tx = x$$

heißt Fixpunktgleichung, jede Lösung  $x$  wird Fixpunkt genannt.

Nicht jede Abbildung besitzt einen Fixpunkt. Man betrachte z.B. die Translation

$$Tx = x + x_0, x_0 \neq 0.$$

Wir demonstrieren an Beispielen, wie nichtlineare Probleme auf die Lösung von Fixpunktgleichungen zurückgeführt werden können

- (i) Bestimmung des Kerns (Nullraumes) einer Abbildung

$$Ax = 0.$$

Diese Gleichung kann in äquivalente Fixpunktgleichungen überführt werden

$$Tx = x \pm Ax = x$$

$$Tx = x \pm \lambda Ax = x, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, (\text{lineare Relaxation})$$

$$Tx = x - \lambda F(Ax) = x, 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}, F(Ax) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$$

(nichtlineare Relaxation)

$$Tx = x - (A'(x))^{-1}Ax = x,$$

vorausgesetzt  $(A'(x))^{-1}$  existiert, Newton-Verfahren

- (ii) Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

$$x(0) = x_0,$$

wobei  $f$  eine Abbildung

$$f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

ist. Das Anfangswertproblem kann als äquivalente Integralgleichung geschrieben werden:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) \, ds = Tx(t).$$

(iii) Dirichletproblem für eine nichtlineare Poissongleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Formal kann dieses Problem als Fixpunktgleichung mit Hilfe des inversen Operators  $(\Delta)^{-1}$  geschrieben werden:

$$u = (-\Delta)^{-1} f(u) = Tu.$$

## 1.1 Banachscher Fixpunktsatz

Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert die Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten. Der Beweis ist konstruktiv, da ein Iterationsverfahren benutzt wird, das zu numerischen Berechnungen von Näherungslösungen mit entsprechenden a-priori und a-posteriori Fehlerabschätzungen führt. Er wird zumeist in der Analysis benutzt, um den Satz von Picard-Lindelöf über die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen zu beweisen.

Wir formulieren den Banachschen Fixpunktsatz in metrischen Räumen  $X$  mit der Metrik  $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Wir beginnen mit folgender Definition:

**Definition 1** Es sei  $T : M \subseteq X \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein metrischer Raum ist.

- $T$  ist  $k$ -kontrahierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq k\varrho(x, y) \tag{1.1}$$

$\forall x, y \in M$  und für ein festes  $k, 0 \leq k < 1$ , ist.

- $T$  ist kontrahierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M, x \neq y.$$

- $T$  ist nicht expandierend, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq \varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M \text{ (d.h. } k = 1).$$

- $T$  ist Lipschitz-stetig, falls

$$\varrho(Tx, Ty) \leq k\varrho(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

und für ein  $k$  mit  $0 \leq k < \infty$  ist.

**Bemerkungen:**

Es gilt:  $k$ -kontrahierend  $\Rightarrow$  kontrahierend  $\Rightarrow$  nicht expandierend  $\Rightarrow$  Lipschitz-stetig.

Ist  $X$  ein normierter Raum und  $T$  eine lineare und stetige Abbildung, dann ist  $T$  stets Lipschitz-stetig mit  $k = \|T\|$ .

**Satz 1 (Banachscher Fixpunktsatz, 1922)**

Es sei

- $M$  eine abgeschlossene, nichtleere Menge in einem vollständigen metrischen Raum  $X$ .
- $T : M \subseteq X \rightarrow M$
- $T$  ist  $k$ -kontrahierend

Dann gilt

- **Eindeutigkeit:**  $x = Tx$  besitzt genau eine Lösung  $x \in M$ .
- **Konvergenz:** die Folge  $(x_n = Tx_{n-1})$  konvergiert gegen den Fixpunkt  $x$  für einen beliebigen Anfangspunkt  $x_0 \in M$ .
- **Fehlerabschätzung a-priori:** für  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\rho(x_n, x) \leq k^n (1 - k)^{-1} \rho(x_0, x_1)$$

- **Fehlerabschätzung a-posteriori:**

$$\rho(x_{n+1}, x) \leq k(1 - k)^{-1} \rho(x_n, x_{n+1})$$

- **Konvergenzgeschwindigkeit:** für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $\rho(x_{n+1}, x) \leq k\rho(x_n, x)$ .

**Beweis:**

**1.Schritt:** Wir zeigen  $(x_n = Tx_{n-1})$  ist eine Cauchy-Folge,  $x_n \rightarrow x$  und  $Tx = x$ .

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) &= \rho(Tx_{n-1}, Tx_n) \\ &\leq k\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq k^n\rho(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung liefert für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+m}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1})\rho(x_0, x_1) \\ &\leq k^n(1 - k)^{-1}\rho(x_0, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

für genügend großes  $n$ . Da  $M$  abgeschlossen ist, konvergiert die Folge  $(x_n = Tx_{n-1})$  zu einem Grenzwert  $x \in M$ . Für diesen Grenzwert gilt:

$$\begin{aligned} \rho(x, Tx) &\leq \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tx) = \rho(x, x_{n+1}) + \rho(Tx_n, Tx) \\ &\stackrel{(1.1)}{<} \rho(x, x_{n+1}) + \rho(x, x_n) < 2\varepsilon \quad \text{für genügend großes } n. \end{aligned}$$

Damit ist  $x = Tx$ .

**2.Schritt:** a-priori und a-posteriori Abschätzungen

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) &\leq \rho(x_n, x_{n+m}) + \rho(x_{n+m}, x) \\ &< k^n(1-k)^{-1}\rho(x_0, x_1) + \varepsilon \quad \text{für genügend großes } m.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\rho(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}\rho(x_0, x_1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Für  $x_0 = x_n$  erhalten wir

$$\rho(x_{n+1}, x) \leq k(1-k)^{-1}\rho(x_n, x_{n+1}).$$

Außerdem ist

$$\rho(x_{n+1}, x) = \rho(Tx_n, Tx) \leq k\rho(x_n, x).$$

**3.Schritt:** Eindeutigkeit

Es sei

$$x = Tx \text{ und } y = Ty.$$

Dann ist

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) < \rho(x, y) \quad \text{für } x \neq y,$$

was nicht sein kann. ■

**Bemerkung:**

Alle Voraussetzungen des Satzes 1 sind wesentlich, d.h. falls eine Voraussetzung verletzt wird, braucht kein Fixpunkt in  $M$  zu existieren (Übung).

Um weitere Versionen des Banachschen Fixpunktsatzes formulieren zu können, wiederholen wir den Begriff der Kompaktheit.

**Definition 2** Sei  $X$  ein metrischer Raum.  $M \subset X$  heißt kompakt, wenn jede Folge eine Teilfolge enthält, die zu einem bestimmten Element der Menge  $M$  konvergiert.  $M$  ist relativ kompakt, falls die Abschließung  $\overline{M}$  kompakt ist.

**Bemerkungen:**

- (i) Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist beschränkt und abgeschlossen. In endlichdimensionalen normierten Räumen sind diese Eigenschaften notwendig und hinreichend für die Kompaktheit.
- (ii) Eine stetige Abbildung  $F : M \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M$  kompakt ist, nimmt ihr Extremum auf  $M$  an.

**Satz 2** Es sei  $T$  eine kontrahierende Abbildung, die eine abgeschlossene Teilmenge  $M$  eines vollständigen metrischen Raumes  $X$  in sich abbildet. Das Bild  $T(M) = M_0 \subset M$  sei relativ kompakt. Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt in  $\overline{M_0} \subset M$ .

**Beweis:**

Wir betrachten den Ausdruck  $\rho(x, Tx) = F(x)$  als Abbildung von  $\overline{M}_0$  in  $\mathbb{R}$ . Da  $\rho$  und  $T$  stetige Abbildungen sind, ist auch  $F$  stetig und nimmt daher ihr Minimum auf  $\overline{M}_0$  (kompakte Menge) an. Sei  $\rho(x_0, Tx_0) = \min_{x \in \overline{M}_0} \rho(x, Tx)$ . Wir zeigen indirekt, dass  $x_0$  ein Fixpunkt ist.

Sei  $\rho(x_0, Tx_0) > 0$ , d.h.  $x_0 \neq Tx_0$ . Da  $T$  kontrahierend ist, gilt:

$$\rho(Tx_0, T^2x_0) < \rho(x_0, Tx_0).$$

Da  $Tx_0 \in M_0 \subset \overline{M}_0$  ist, wäre  $Tx_0$  Minimum von  $F(x)$  in  $\overline{M}_0$  und nicht  $x_0$ . Aus diesem Widerspruch folgt, dass  $x_0 = Tx_0$  ist.

Wir zeigen die Eindeutigkeit:

Wir nehmen an, es gäbe ein weiteres  $y_0, y_0 \neq x_0$ , mit  $Ty_0 = y_0$ . Dies führt auf

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(Tx_0, Ty_0) < \rho(x_0, y_0)$$

und damit zum Widerspruch. ■

Eine weitere Variante von Satz 2 ist folgender:

**Satz 3** *Es sei  $T$  eine kontrahierende Abbildung, die einen kompakten, metrischen Raum  $M$  in sich abbildet. Dann besitzt  $T$  genau einen Fixpunkt  $x \in M$ , der Grenzwert einer Folge  $x_n = Tx_{n-1}$  für einen beliebigen Startwert  $x_0 \in M$  ist.*

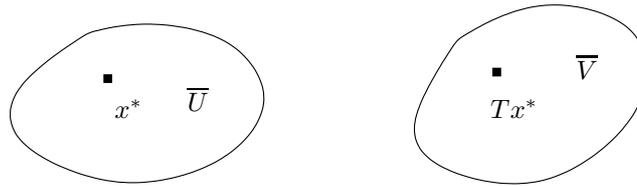


Abbildung 1.1: Disjunkte Umgebungen

**Beweis:**

Die Elemente  $x_n = T^n x_0$  befinden sich in der kompakten Menge  $M$ . Daher existiert eine konvergente Teilfolge  $(T^{n_i} x_0)_i$ , deren Grenzwert wir mit  $x^*$  bezeichnen. Da  $T$  eine stetige Abbildung ist, konvergiert die Bildfolge  $(T^{n_i+1} x_0)_i$  zum Grenzwert  $Tx^*$ .

Wir zeigen, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $T$  ist, also  $x^* = Tx^*$ . Wir nehmen indirekt an, dass  $x^* \neq Tx^*$  sei. Folglich existieren abgeschlossene disjunkte Umgebungen  $\overline{U}$  von  $x^*$  und  $\overline{V}$  von  $Tx^*$  in  $M$  (siehe Abbildung 1.1).

Die Produktmenge  $\overline{U} \times \overline{V}$  ist kompakt und daher nimmt die Abbildung

$$d(u, v) = \frac{\rho(Tu, Tv)}{\rho(u, v)}$$

ihr Maximum auf  $\overline{U} \times \overline{V}$  an. Wegen der Kontraktionseigenschaft erhalten wir

$$\rho(Tu, Tv) \leq k_0 \rho(u, v), \quad \forall u, v \in \overline{U} \times \overline{V},$$

wobei  $k_0 = \max_{u, v \in \overline{U} \times \overline{V}} d(u, v) < 1$  ist. Wir wählen nun einen Index  $i_0$  so, dass  $T^{n_i} x_0 \in \overline{U}$  und  $T^{n_i+1} x_0 \in \overline{V}$  für alle  $i \geq i_0$  ist. Es gilt für  $j > i_0$ , dass

$$\rho(T^{n_j} x_0, T^{n_j+1} x_0) \leq \dots \leq k_0^{j-i_0} \rho(T^{n_{i_0}} x_0, T^{n_{i_0}+1} x_0)$$

ist, und daher erhalten wir

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(T^{n_j} x_0, T^{n_j+1} x_0) = \rho(x^*, T x^*) = 0. \quad (\text{Widerspruch})$$

Wir zeigen, dass der Fixpunkt  $x^*$  auch Grenzelement der Ausgangsfolge  $T^n x_0$  ist. Ist  $n$  genügend groß, so können wir  $n = n_i + j$  schreiben. Damit wird

$$\begin{aligned} \rho(x^*, T^n x_0) &= \rho(x^*, T^{n_i+j} x_0) = \rho(T^j x^*, T^{n_i+j} x_0) \\ &< \rho(x^*, T^{n_i} x_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x^*, T^n x_0) = 0. \quad \blacksquare$$

## Anwendungen

Wir sehen uns jetzt Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes an. Zunächst betrachten wir

### Iterationsmethoden zur Lösung linearer Operatorgleichungen.

Sei  $A : X \rightarrow X$  ein linearer stetiger Operator mit  $Ax = b$ , der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet. Durch Einführung des Operators  $B = I - A$  erhalten wir die Fixpunktgleichung

$$Bx + b = Tx = x,$$

die äquivalent zu  $Ax = b$  ist.

Da

$$\|Tx - Ty\| = \|Bx - By\| \leq \|B\| \|x - y\|$$

erhalten wir sofort: Ist  $\|B\| = \|I - A\| < 1$  dann existiert eine eindeutige Lösung. Etwas genauere Aussagen erhält man mit Hilfe des Spektralradius von  $B$ :

$$r(B) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}.$$

Der Banachsche Fixpunktsatz lautet dann

**Satz 4** Sei  $B = I - A$  ein linearer stetiger Operator, der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet.

a) Falls  $r(B) < 1$  ist, dann konvergiert die Folge

$$x_n = Bx_{n-1} + b$$

für jedes  $b \in X$  und für ein beliebiges Anfangselement  $x_0 \in X$  zu einer eindeutig bestimmten Lösung von

$$Bx + b = x.$$

b) Falls  $r(B) > 1$  ist, dann existiert ein Element  $b \in X$ , so dass die Folge  $(x_n)$  mit dem Anfangselement  $x_0 = 0$  divergiert.

**Beweis von a):**

Zunächst zeigt man, dass  $(x_n)$  eine Cauchy-Folge ist. Die Elemente der Folge lauten:

$$\begin{aligned} x_0 & \text{ beliebig} \\ x_1 & = b + Bx_0 \\ x_2 & = b + Bb + B^2x_0 \\ & \vdots \\ x_n & = b + Bb + \cdots + B^{n-1}b + B^n x_0 \\ x_{n+1} & = b + Bb + \cdots + B^{n-1}b + B^n x_1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+1}) & = \|x_n - Tx_n\| = \|B^n x_0 - B^n x_1\| \\ & \leq \|B^n\| \|x_0 - x_1\|, \end{aligned}$$

und

$$\rho(x_n, x_m) \leq (\|B^n\| + \cdots + \|B^{m-1}\|) \|x_0 - x_1\| \quad \text{für } m > n$$

ist. Die Zahlenreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\|$  konvergiert, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} = r(B) < 1.$$

Bezeichnen wir mit  $S_m = \sum_{n=0}^m \|B^n\|$  die Partialsumme, dann ist

$$\rho(x_n, x_m) \leq (S_{m-1} - S_{n-1}) \|x_0 - x_1\| < \varepsilon \quad \text{für } m > n > n_0(\varepsilon),$$

und  $(x_n)_n$  ist Cauchy-Folge mit dem Grenzwert  $x^*$ .

Wir zeigen, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $T$  ist:

$$\begin{aligned} \rho(x^*, Tx^*) & \leq \rho(x^*, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tx^*) = \rho(x^*, x_{n+1}) + \rho(Tx_n, Tx^*) \\ & < \varepsilon + \|B(x_n - x^*)\| \leq \varepsilon + \|B\| \|x_n - x^*\| < (1 + \|B\|)\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \end{aligned}$$

für genügend großes  $n$ .

Wir zeigen nun indirekt, dass der Fixpunkt eindeutig bestimmt ist.

Sei  $x = Tx$  und  $Ty = y$ ,  $x \neq y$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} < 1$  ist, existiert ein  $n_0$  so dass  $\|B^{n_0}\| < 1$ . Für dieses  $n_0$  gilt

$$\|x - y\| = \|T^{n_0}x - T^{n_0}y\| = \|B^{n_0}(x - y)\| \leq \|B^{n_0}\| \|x - y\| < \|x - y\| \quad \text{für } n > n_0.$$

(Widerspruch!)

Der Beweis von **b)** wird als Übung empfohlen. Hinweis: Man nutze das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. ■

### Ein semilineares Problem

Gesucht ist eine skalare Funktion  $u$ , die in einem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  definiert ist, so dass

$$\begin{aligned} -\mu \Delta u &= f(u) && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Der Parameter  $\mu$  sei eine positive reelle Zahl. Die schwache Formulierung von (1.2) lautet: Finde ein  $u \in W^{1,2}(\Omega) = V$ , so dass

$$a(u, v) = \mu \int \nabla u \nabla v \, dx = \langle f(u), v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (1.3)$$

Hier ist  $f : V \rightarrow V'$ .

Wir führen die Menge  $M$  ein:

$$M = \{u \in V : \|u\|_V \leq R\},$$

wobei  $R$  eine positive reelle Zahl ist. Wir nehmen an, dass

$$\|f(u_1) - f(u_2)\|_{V'} \leq c_f \|u_1 - u_2\|_V \quad (1.4)$$

für alle  $u_1, u_2 \in M$ . Die Konstante  $c_f$  sei beschränkt durch die Konstante  $\alpha$  aus der Ungleichung

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

genauer,

$$c_f \leq \alpha - \delta, \quad (1.5)$$

wobei  $\delta$  eine kleine positive Zahl ist. Weiterhin sei  $f$  folgendermaßen beschränkt auf  $M$

$$\|f(u)\|_{V'} \leq \alpha R \quad \forall u \in M. \quad (1.6)$$

Wir linearisieren (1.3) im Punkt  $u_0 \in M$ :

$$a(u, v) = \langle f(u_0), v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (1.7)$$

Wir zeigen nun, dass die Abbildung  $T$ , die  $u_0 \in M$  die eindeutig bestimmte Lösung von (1.7) zuordnet,  $Tu_0 = u$ , eine lineare Abbildung von  $M$  in  $M$  und  $k$ -kontrahierend ist.

**Satz 5** *Es sei  $f : V \rightarrow V'$  eine Abbildung, die den Voraussetzungen (1.4), (1.5) und (1.6) genügt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in M$  des Problems (1.3), die durch ein iteratives Verfahren gewonnen werden kann.*

### Beweis

Die oben definierte Abbildung  $T$  hat folgende Eigenschaften:

1°  $T : M \rightarrow M$ .

$$\|Tu_0\|_V = \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0)\|_{V'} \leq R.$$

2°  $T$  ist  $k$ -kontrahierend auf  $M$ :

Es seien  $T(u_0) = u, T(w_0) = w$  Lösungen von (1.7). Dann ist

$$\begin{aligned} a(u - w, v) &= \langle f(u_0) - f(w_0), v \rangle, \\ \|Tu_0 - Tw_0\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0) - f(w_0)\|_{V'} \leq \frac{c_f}{\alpha} \|u_0 - w_0\|_V. \end{aligned}$$

Die Voraussetzung (1.5) führt zur Behauptung. ■

**Bemerkungen:**

- Die Konstante  $\alpha = \frac{\mu}{1+d(\Omega)^2}$ ,  $d(\Omega) = \min\{\text{diam}(\Omega \cap x_i - \text{Achse}), 1 \leq i \leq n\}$ , liefert eine obere Schranke von  $c_f$ , die vom Parameter  $\mu$  abhängt. Dadurch wird der Radius  $R$  der Menge beeinflusst. Außerdem spielt die Flachheit von  $f$  im Nullpunkt eine Rolle, was sich auf  $c_f$  und  $R$  auswirkt.
- Gilt  $\|f(u)\|_{V'} \leq r$  für alle  $u \in V$ , dann kann  $R = \frac{r}{\alpha}$  gewählt werden.

**Existenz und Eindeutigkeit für schwache Lösungen des Dirichletproblems für die stationären Navier-Stokes Gleichungen**

Es sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Gesucht werden das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u} = \vec{u}(x)$  und das Druckfeld  $p = p(x)$ , die folgendem Randwertproblem genügen:

$$-\nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \text{ in } \Omega, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1.9)$$

$$\vec{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.10)$$

Durch skalare Multiplikation der Gleichung (1.8) mit einem genügend glatten Vektorfeld  $\vec{v}$  und der Gleichung (1.9) mit einer genügend glatten Funktion  $q$  sowie partieller Integration erhalten wir:

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx \quad (1.11)$$

$$- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx + \int_{\partial\Omega} \left( -\nu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \cdot \vec{v} + p n \cdot \vec{v} \right) d\sigma = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} q \, dx = 0. \quad (1.13)$$

Führen wir die Abkürzungen

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx$$

$$c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx$$

$$b(\vec{v}, p) = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} p \, dx$$

ein, dann erhalten wir unter Beachtung der Randbedingungen (1.10) mit Hilfe von (1.11) und (1.12) eine **schwache Formulierung** des Dirichlet Problems für die stationären Navier-Stokes Gleichungen:

Gesucht sind die Felder  $(\vec{u}, p) \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \times L_2(\Omega)$ , die den Gleichungen

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{v}) + c(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{v}, p) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \\ b(\vec{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

für alle  $(\vec{v}, q) \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \times L_2(\Omega)$  und für alle  $\vec{f} \in \left( [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \right)'$  genügen.

$\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$  ist der Sobolevraum, welcher der Abschluss der beliebig oft differenzierbaren Funktionen aus  $C_0^\infty(\Omega)$ , die ihren Träger in  $\Omega$  haben, bezüglich folgender Norm ist:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

$W = [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n = \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \times \dots \times \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$  ist der  $n$ -fache Produktraum.

Mit  $\left( [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n \right)' = W'$  wird der Dualraum bezeichnet.

Wir betrachten weiterhin eine zu (1.14) äquivalente schwache Formulierung:

Für  $\vec{f} \in W'$  suche ein  $\vec{z} \in V = \left\{ \vec{v} \in [\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n : \nabla \cdot v = 0 \right\}$ , so dass

$$a(\vec{z}, \vec{v}) + c(\vec{z}, \vec{z}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (1.15)$$

Die Lösbarkeit des Problems (1.14) bzw. (1.15) wird durch Zurückführen auf das lineare Stokes Problem untersucht. Dabei spielen insbesondere bei (1.15) folgende Abschätzungen eine zentrale Rolle

$$|a(\vec{u}, \vec{v})| \leq C_a \|\vec{u}\|_W \|\vec{v}\|_W \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in W, C_a \leq 4\nu, \quad (1.16)$$

$$a(\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \|\vec{u}\|_W^2 \quad \forall \vec{u} \in W, \alpha = \nu C(\Omega), \quad (1.17)$$

$$c(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \leq \gamma \|\vec{u}\|_W \|\vec{v}\|_W \|\vec{w}\|_W, \gamma = \gamma(\text{diam } \Omega). \quad (1.18)$$

**Satz 6** Es sei  $\|f\|_{W'} \leq \frac{\alpha^2}{4\gamma} - \gamma\varepsilon^2$ , wobei  $\varepsilon > 0$  eine reelle Zahl ist. Dann existiert eine Lösung  $(\vec{u}, p)$  von (1.14).  $\vec{u}$  ist in der Kugel

$$M = \{ \vec{w} \in V : \|\vec{w}\|_W \leq \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \}$$

eindeutig bestimmt.

## Beweis

Wir gehen von der schwachen Formulierung (1.15) aus. Es sei  $z_0$  ein beliebiges, festes Element aus  $V$ . Wir betrachten die Gleichung

$$a(\vec{z}, \vec{v}) = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) = \langle \vec{F}, \vec{v} \rangle \quad \forall \vec{v} \in V. \quad (1.19)$$

$\vec{F}$  befindet sich in  $W' \subset V'$ . Durch die Ungleichungen (1.16) und (1.17) sind die Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram für die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $V \times V$  erfüllt. Daher existiert zu jedem  $\vec{z}_0 \in V$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{z} \in V$  des schwachen Problems (1.19). Diese genügt der Abschätzung

$$\|\vec{z}\|_V = \|\vec{z}\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|\vec{F}\|_{W'} \leq \frac{1}{\alpha} \left( \|\vec{f}\|_{W'} + \gamma \|\vec{z}_0\|_W^2 \right). \quad (1.20)$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $T : V \rightarrow V$ , die durch  $T\vec{z}_0 = \vec{z}$  definiert ist.

Wir zeigen, dass  $T$  den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

1.  $T$  bildet  $M$  in  $M$  ab:

Aus der Ungleichung (1.20) und der Voraussetzung an  $\vec{f}$  folgt, dass

$$\|T\vec{z}_0\|_W = \|\vec{z}\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \left[ \|\vec{f}\|_{W'} + \gamma \left( \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \right)^2 \right] \leq \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \quad (1.21)$$

ist.

2.  $T$  ist  $k$ -kontrahierend in  $M$ :

Es seien  $\vec{z}_0$  und  $\tilde{\vec{z}}_0$  Elemente aus  $M$  und  $\vec{z} = T\vec{z}_0$ ,  $\tilde{\vec{z}} = T\tilde{\vec{z}}_0$  die entsprechenden Lösungen von (1.19). Damit ist

$$\begin{aligned} a(\vec{z}, \vec{v}) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) . \\ a(\tilde{\vec{z}}, \vec{v}) &= \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle - c(\tilde{\vec{z}}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) . \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(\vec{z} - \tilde{\vec{z}}, \vec{v}) &= -c(\vec{z}_0, \vec{z}_0, \vec{v}) + c(\tilde{\vec{z}}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) \\ &= c(\tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0, \tilde{\vec{z}}_0, \vec{v}) + c(\vec{z}_0, \tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0, \vec{v}) . \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Ungleichungen (1.17), (1.18) und (1.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\vec{z} - \tilde{\vec{z}}\|_W &\leq \frac{1}{\alpha} \left[ \gamma \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W \|\tilde{\vec{z}}_0\|_W + \gamma \|\vec{z}_0\|_W \|\tilde{\vec{z}}_0 - \vec{z}_0\|_W \right] \\ &\leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W (\|\tilde{\vec{z}}_0\|_W + \|\vec{z}_0\|_W) \\ &\leq \frac{\gamma}{\alpha} \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W 2 \left( \frac{\alpha}{2\gamma} - \varepsilon \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\|T\vec{z}_0 - T\tilde{\vec{z}}_0\|_W \leq k \|\vec{z}_0 - \tilde{\vec{z}}_0\|_W$$

für

$$k = \frac{\gamma}{\alpha} \left( \frac{\alpha}{\gamma} - 2\varepsilon \right) < 1 .$$

■

### Bemerkung:

1. Die Lösung  $(\vec{u}, p)$  von (1.14) ist nicht eindeutig. Das Druckfeld ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Durch die Normierung  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$  wird  $p$  eindeutig.
2. Ist die Reynoldszahl  $Re = \frac{1}{\nu}$  klein, dann wird durch diesen Satz eine Lösung garantiert (zähe Flüsse).

## 1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Beim Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes werden keine tiefliegenden Sätze aus der Theorie der metrischen Räume benutzt. Der Preis dafür ist, dass eine starke Eigenschaft, nämlich die  $k$ -Kontraktivität bzw. Kontraktivität des Operators, gefordert wurde. Möchte man diese Eigenschaft abschwächen, muss man an die Räume  $M$  mehr Forderungen stellen.

Der Fixpunktsatz von Brouwer wird für eine abgeschlossene Kugel im  $\mathbb{R}^n$  formuliert, der Satz von Schauder (1930) gilt in unendlich-dimensionalen Räumen. Beide sichern die Existenz (nicht die Eindeutigkeit) von Fixpunkten.

**Satz 7 (Fixpunktsatz von Brouwer (1912))** *Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen, beschränkten Kugel des  $\mathbb{R}^n$  in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

**Satz 8 (Fixpunktsatz von Schauder)** *Sei  $M$  eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge eines Banachraumes  $X$ . Eine stetige Abbildung  $T : M \subset X \rightarrow M$  besitzt einen Fixpunkt.*

Wir beweisen zunächst den Brouwerschen Fixpunktsatz im  $n$ -dimensionalen Raum und übertragen dann mit Hilfe eines Approximationssatzes für kompakte Operatoren dieses Resultat auf unendlichdimensionale Räume.

### Der Brouwersche Fixpunktsatz

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel im  $\mathbb{R}^1$ .

#### Beispiel:

Sei  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Dann besitzt  $f$  einen Fixpunkt.

Setzen  $g(x) = f(x) - x$ . Da  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  abbildet, ist

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \geq 0 \\ g(b) &= f(b) - b \leq 0 \end{aligned}$$

Aus dem Zwischenwertsatz von Bolzano folgt, dass mindestens ein  $x_0$  existiert mit  $g(x_0) = 0$ , d.h.  $f(x_0) = x_0$ .

Der Satz von Brouwer kann mit verschiedenen Methoden bewiesen werden, z.B. mit topologischen Methoden (Retraktionssatz) oder mit Variationsmethoden (Minimierung von Energiefunktionalen, Lösungen der homogenen Euler-Lagrange Gleichungen) [4, S.439],[6, S.11 ff.]. Wir wählen den 2. Weg. Zunächst führen wir kurz die entsprechenden Begriffe ein (siehe [7]).

### Lagrange Funktionen und Euler-Lagrange Gleichungen

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte offene Teilmenge mit glattem Rand  $\partial\Omega$  und  $\vec{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{w} = \vec{w}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (w_1(x), \dots, w_m(x))^T$ . Weiterhin sei  $\mathbb{R}^{m \times n}$  der Raum aller  $(m \times n)$ -Matrizen mit reellen Einträgen.

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{\vec{w} \in [C^2(\bar{\Omega})]^m : \vec{w} = \vec{g} \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Das Funktional  $I$  auf  $\mathcal{M}$  besitze die Form

$$I[\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D\vec{w}(x), \vec{w}(x), x) dx, \quad (1.22)$$

wobei  $D\vec{w}$  die Fréchetableitung (Jacobi-Matrix) des Vektorfeldes  $\vec{w}$  ist:

$$D\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Die Abbildung  $L : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst Lagrange-Funktion. Um die Variablen von  $L$  zu kennzeichnen, führen wir die Schreibweise  $L = L(P, \vec{z}, x)$  ein, wobei  $D\vec{w} = P = (p_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq n}}$ ,  $\vec{w} = \vec{z}$  sind.

Weiterhin seien

$$D_P L = \begin{pmatrix} L_{p_{11}} & \cdots & L_{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{p_{m1}} & \cdots & L_{p_{mn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial p_{11}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial p_{m1}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial p_{mn}} \end{pmatrix}$$

und

$$D_{\vec{z}} L = \begin{pmatrix} L_{z_1} \\ \vdots \\ L_{z_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial z_m} \end{pmatrix}$$

wohl definiert.

Folgender Satz verbindet das Funktional  $I$  mit einem System partieller Differentialgleichungen.

**Satz 9** *Besitzt das Funktional (1.22) einen Minimierer  $\vec{u}$  in  $\mathcal{M}$ , dann ist  $\vec{u}$  Lösung eines nicht-linearen Systems von partiellen Differentialgleichungen (System der Euler-Lagrange Gleichungen)*

$$-\operatorname{div} D_P L(D\vec{u}, \vec{u}, x) + D_{\vec{z}} L(D\vec{u}, \vec{u}, x) = \vec{0} \quad \text{in } \Omega.$$

Hierbei ist

$$-\operatorname{div} D_P L = \begin{pmatrix} \partial_1 L_{p_{11}} + \partial_2 L_{p_{12}} + \cdots + \partial_n L_{p_{1n}} \\ \vdots \\ \partial_1 L_{p_{m1}} + \partial_2 L_{p_{m2}} + \cdots + \partial_n L_{p_{mn}} \end{pmatrix}$$

ein Vektor aus  $\mathbb{R}^m$ .

### Beweis

Wir betrachten ein  $\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$  und führen die reelle Funktion  $i$  einer reellen Variablen  $\tau$  ein

$$i(\tau) := I[\vec{u} + \tau\vec{v}].$$

Die Elemente  $\vec{u} + \tau\vec{v}$  sind aus  $\mathcal{M}$  und  $i(\tau)$  ist wohl definiert. Da  $\vec{u}$  Minimierer ist, muss  $i'(0) = 0$  sein.

Nach der Kettenregel ist

$$i'(\tau) = \int_{\Omega} L_P(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\vec{z}}(D\vec{u} + \tau D\vec{v}, \vec{u} + \tau\vec{v}, x) \cdot \vec{v} \, dx,$$

wobei  $A : B = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ik}$  ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} i'(0) &= \int_{\Omega} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) : D\vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\bar{z}} D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} - \int_{\Omega} \operatorname{div} L_P(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} L_{\bar{z}}(D\vec{u}, \vec{u}, x) \cdot \vec{v} \, dx = 0. \end{aligned}$$

für alle  $\vec{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Die Behauptung folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. ■

Es gibt Lagrange-Funktionen, für die jedes Vektorfeld  $\vec{w} \in [C^2(\bar{\Omega})]^m$  Lösung der homogenen Euler-Lagrange Gleichung ist. Diese Lagrange-Funktionen heißen Null-Lagrange-Funktionen.

### Beispiel:

Es sei  $L = L(D\vec{w}) = \det(D\vec{w})$ , wobei  $\vec{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Für  $L = L(P) = \det P$  gilt

$$D_P L(P) = \operatorname{Cof} P. \quad (1.23)$$

Hierbei ist die Cofaktor-Matrix einer Matrix  $A$  wie folgt definiert.

**Definition 3** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Für jedes Indexpaar  $(i, j)$  sei  $A'_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  die Matrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte erhält. Sei

$$d_{ij} := (-1)^{i+j} \det A'_{ij}. \quad (1.24)$$

Die Cofaktor-Matrix von  $A$  ist

$$\operatorname{Cof} A = (d_{ij})_{i,j}. \quad (1.25)$$

Es gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile}), \quad (1.26)$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} d_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}), \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

und damit

$$A(\operatorname{Cof} A)^\top = (\operatorname{Cof} A)^\top A = \det A I. \quad (1.29)$$

Falls  $A$  invertierbar ist, erhalten wir

$$\operatorname{Cof} A = \det A A^{-\top}.$$

Weiterhin gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \operatorname{Cof}(AB) &= \operatorname{Cof} A \operatorname{Cof} B, \\ \operatorname{Cof}(A^\top) &= (\operatorname{Cof} A)^\top. \end{aligned}$$

Aus (1.26) folgt

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ks}} = (\operatorname{Cof} A)_{ks} \quad \text{für } k, s = 1, 2, \dots, n$$

und damit erhalten wir die Frechét-Ableitung

$$D(\det A) = \text{Cof } A.$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen lauten für  $P = A = D\vec{w}$

$$\text{div } D_P L(P) = \text{div } \text{Cof } P = \text{div } \text{Cof } (D\vec{w}) = \vec{0}. \quad (1.30)$$

Dies ist die aus der Mechanik bekannte Piola-Identität.

Wir zeigen sie durch direktes Nachrechnen im Fall  $n = 3$ . Für allgemeineres  $n$  ist der Beweis in [4, S.440] und [6, S.14] zu finden.

**Lemma 1** Sei  $\vec{w} \in (C^2(\bar{\Omega}))^3$ . Es gilt die Piola-Identität

$$\text{div } \text{Cof } (D\vec{w}) = \vec{0}.$$

### Beweis

Es ist

$$\text{Cof } (D\vec{w}) = (d_{ij})_{i,j=1,2,3}$$

mit

$$d_{ij} = \partial_{j+1} w_{i+1} \partial_{j+2} w_{i+2} - \partial_{j+2} w_{i+1} \partial_{j+1} w_{i+2},$$

wobei die Indizes modulo 3 zu nehmen sind. Für  $i = 1, 2, 3$  erhalten wir

$$\begin{aligned} (\text{div } \text{Cof } D\vec{w})_i &= \sum_{j=1}^3 \partial_j d_{ij} = \partial_1 [\partial_2 w_{i+1} \partial_3 w_{i+2} - \partial_3 w_{i+1} \partial_2 w_{i+2}] \\ &\quad + \partial_2 [\partial_3 w_{i+1} \partial_1 w_{i+2} - \partial_1 w_{i+1} \partial_3 w_{i+2}] \\ &\quad + \partial_3 [\partial_1 w_{i+1} \partial_2 w_{i+2} - \partial_2 w_{i+1} \partial_1 w_{i+2}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

### Bemerkung:

Man kann zeigen, dass  $L(P) = L(D\vec{w})$  genau dann eine Null-Lagrange-Funktion ist, wenn es Matrizen  $B$  und  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und Konstanten  $a$  und  $d \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$L(P) = a + B : P + C : \text{Cof } P + d \det P$$

ist. Die Bedeutung der Null-Lagrange-Funktionen liegt darin, dass das Energiefunktional  $I(\vec{w}) = \int_{\Omega} L(D\vec{w}, \vec{w}, x) dx$  nur von den Randdaten von  $\vec{w}$  abhängt.

**Satz 10** Sei  $L = L(D\vec{w}, \vec{w}, x)$  eine Null-Lagrange-Funktion. Seien  $\vec{w}$  und  $\vec{u}$  zwei Funktionen aus  $[C^2(\bar{\Omega})]^m$  mit  $\vec{w} = \vec{u}$  auf  $\partial\Omega$ . Dann ist

$$I[\vec{w}] = I[\vec{u}]. \quad (1.31)$$

### Beweis

Sei

$$i(\tau) = I[\tau\vec{u} + (1-\tau)\vec{w}] = \int_{\Omega} L(D(\tau\vec{u} + (1-\tau)\vec{w}), \tau\vec{u} + (1-\tau)\vec{w}, x) \, dx, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} i'(\tau) &= \int_{\Omega} L_P(\tau D\vec{u} + (1-\tau)D\vec{w}) : (D\vec{u} - D\vec{w}) + L_{\vec{z}}(\tau D\vec{u} + (1-\tau)D\vec{w}) \cdot (\vec{u} - \vec{w}) \, dx \\ &\stackrel{\text{part. Int}}{=} \int_{\Omega} [-\text{div} L_P(\tau D\vec{u} + (1-\tau)D\vec{w}) + L_{\vec{z}}(\tau D\vec{u} + (1-\tau)D\vec{w})] \cdot (\vec{u} - \vec{w}) \, dx. \end{aligned}$$

Da  $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$  auf dem Rand verschwindet, entfällt der Randterm. Weiterhin ist  $\tau\vec{u} + (1-\tau)\vec{w}$  Lösung der homogenen Euler-Lagrange Gleichungen, da  $L$  eine Null-Lagrange-Funktion ist. Daher ist  $i'(\tau) = 0$ , woraus  $i(\tau) = \text{const}$  für  $0 \leq \tau \leq 1$  folgt. Wir erhalten unmittelbar (1.31), da sich für  $\tau = 0$  das Funktional  $I[\vec{w}]$  und für  $\tau = 1$  das Funktional  $I[\vec{u}]$  ergibt. ■

Wir sind jetzt in der Lage, den Fixpunktsatz von Brouwer zu beweisen.

**Satz 11** Jede stetige Abbildung  $T$  einer abgeschlossenen Kugel des  $\mathbb{R}^n$  in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.

### Beweis:

Wir betrachten o.B.d.A. die abgeschlossene Einheitskugel

$$T : \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)} = B.$$

#### 1.Schritt:

Wir zeigen, dass es keine Funktion  $\vec{w}$  aus  $[C^2(\bar{\Omega})]^n$  gibt

$$\vec{w} : B \rightarrow \partial B, \quad (1.32)$$

so dass für alle  $x \in \partial B$

$$\vec{w}(x) = x. \quad (1.33)$$

Wir nehmen an, dass eine solche Funktion  $\vec{w}$  existiert. Sei  $\vec{id}$  die identische Abbildung  $\vec{id}(x) = x$  für alle  $x \in B$ . Dann gilt  $\vec{w}(x) = \vec{id}(x)$  auf  $\partial B$ . Nach Satz 10 ist

$$\int_B \det D\vec{w} \, dx = \int_B \det D\vec{id} \, dx = \text{vol } B \neq 0. \quad (1.34)$$

Andererseits ist  $\vec{w}(x) \in \partial B$  und deshalb  $|\vec{w}| = |\vec{w}|^2 = 1$ . Differentiation von  $|\vec{w}|^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2(x) = 1$  liefert

$$\text{grad } |\vec{w}|^2 = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^n w_i(x) \partial_1 w_i \\ \vdots \\ 2 \sum_{i=1}^n w_i(x) \partial_n w_i \end{pmatrix} = 2(D\vec{w})^\top \vec{w} = \vec{0}.$$

Damit ist die Zahl 0 ein Eigenwert von  $(D\vec{w})^\top$  für alle  $x \in B$ . Man beachte, dass  $\vec{w}(x) \neq \vec{0}$  ist. Folglich ist  $\det(D\vec{w})^\top = \det(D\vec{w}) = 0$  und nach (1.34) ist  $\text{vol } B = 0$  (Widerspruch!).

**2. Schritt:** Wir zeigen, dass es keine stetige Funktion gibt für die (1.32) und (1.33) gelten. Angenommen es gäbe eine. Wir setzen sie stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus B$  fort, indem wir definieren

$$\vec{w}(x) = x \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \setminus B.$$

Es ist  $|\vec{w}(x)| \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Wir glätten die fortgesetzte Funktion  $w(x)$  so, dass die Glättung  $\vec{w}_\varepsilon(x) = x$  für  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$  und  $|\vec{w}_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist.

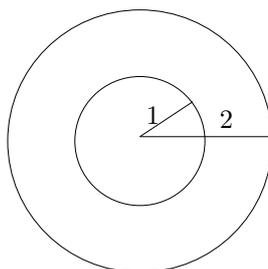


Abbildung 1.2:  $w_\varepsilon(x) = x$

Dann ist

$$\vec{w}(x) = \frac{2\vec{w}_\varepsilon(x)}{|\vec{w}_\varepsilon(x)|}$$

wohl definiert, glatt und

$$\begin{aligned} \vec{w} &: B_2(0) \rightarrow \partial B_2(0) \\ \vec{w}(x) &= x \text{ für } x \in \partial B_2(0). \end{aligned}$$

Wir wiederholen den Beweis von Schritt 1 für  $\vec{w}$  und erhalten einen Widerspruch.

### 3. Schritt:

Sei  $T : B \rightarrow B$  eine stetige Funktion, die keinen Fixpunkt besitzt. Wir konstruieren eine Vektorfunktion  $\vec{w}$ , die stetig ist und die Eigenschaften (1.32) und (1.33) besitzt:

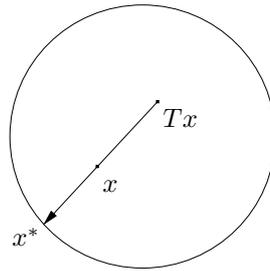
Wir legen durch die verschiedenen Punkte  $x$  und  $T(x)$  einen Strahl, der von  $T(x)$  startet und einen eindeutigen Schnittpunkt  $x^*$  mit  $\partial B$  besitzt. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \vec{w} &: x \rightarrow x^* \\ \vec{w} &: B \rightarrow \partial B. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist  $\vec{w}(x) = x = x^*$  falls  $x \in \partial B$  ist.  $\vec{w}$  ist stetig, da  $T$  stetig ist. Eine solche Funktion kann nicht existieren. ■

### Folgerung:

Sei  $M$  eine zu einer abgeschlossenen Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  homöomorphe Menge, d.h. es existiert eine stetige, eineindeutige und surjektive Abbildung  $f$  von  $B$  auf  $M$ ,  $f : B \rightarrow M$ . Jede stetige Abbildung  $T : M \rightarrow M$  besitzt einen Fixpunkt.

Abbildung 1.3: Konstruktion des Schnittpunktes  $x^*$ **Beweis der Folgerung:**

Die Abbildung  $A = f^{-1} \circ T \circ f : B \rightarrow B$  ist stetig. Daher besitzt  $A$  einen Fixpunkt  $x_0$ :

$$Ax_0 = f^{-1} \circ T \circ f(x_0) = x_0.$$

Folglich ist

$$T \circ f(x_0) = f(x_0),$$

d.h.  $f(x_0) \in M$  ist Fixpunkt von  $T$ . ■

Als eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes formulieren wir einen Satz über die Existenz von Lösungen von nichtlinearen Gleichungssystemen.

Die nichtlinearen Gleichungen

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

oder kurz

$$g(x) = 0$$

seien gegeben.  $g$  wird als Abbildung von  $\overline{K}_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  aufgefasst. Wir untersuchen die Frage, ob Nullstellen des Gleichungssystems in der Kugel  $\overline{K}_r(0)$  existieren.

**Satz 12**  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  sei ein normierter Raum und  $g$  eine stetige Abbildung von  $\overline{K}_r(0) \subset X \rightarrow X$ . Falls

$$(g(x), x)_{E^n} \geq 0 \quad \forall x \text{ mit } \|x\| = r$$

ist, dann besitzt das System  $g(x) = 0$  eine Lösung in  $\overline{K}_r(0)$ .

$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{E^n}$  bezeichnet das Skalarprodukt im euklidischen Raum  $E^n$ .

**Beweis:**

Wir nehmen an, dass  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \overline{K}_r(0)$  sei. Die Abbildung

$$f(x) = -r \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$$

ist dann eine stetige Abbildung von  $\overline{K}_r(0)$  in  $\overline{K}_r(0)$  und es ist  $\|f(x)\| = r$  für alle  $x \in \overline{K}_r(0)$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein  $x_0 \in \overline{K}_r(0)$  mit

$$x_0 = f(x_0).$$

Da  $\|x_0\| = \|f(x_0)\| = r$  ist, liegt  $x_0$  auf dem Rand von  $\overline{K}_r(0)$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}(g(x_0), x_0) &= \left( -\frac{1}{r} f(x_0) \|g(x_0)\|, x_0 \right) \\ &= -\frac{1}{r} \|g(x_0)\| (f(x_0), x_0) \\ &= -\frac{1}{r} \|g(x_0)\| (x_0, x_0) < 0.\end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung des Satzes verletzt und es muss eine Nullstelle des Gleichungssystems in  $\overline{K}_r(0)$  existieren. ■

### Der Schaudersche Fixpunktsatz [Julius Schauder(1899-1943)]

Der Schaudersche Fixpunktsatz ist eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Mengen  $M$  aus unendlich-dimensionalen Räumen.

Man kann anhand eines Gegenbeispiels zeigen, dass der Brouwersche Fixpunktsatz nicht ohne weiteres auf unendlich-dimensionale Räume übertragen werden kann und sogar in separablen unendlich-dimensionalen Hilberträumen nicht gilt.

**Satz 13 (Kakutani 1943)** Sei  $H$  ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann gibt es eine stetige Abbildung  $T : H \rightarrow H$ , die die abgeschlossene Einheitskugel in sich selbst abbildet und keinen Fixpunkt besitzt.

#### Beweis

In  $H$  sei das Skalarprodukt  $(x, y)$  für  $x, y \in H$  definiert. Da  $H$  separabel ist, existiert eine Orthonormalbasis  $(y_n)_{-\infty < n < \infty}$ , so dass jedes  $x \in H$  die Darstellung

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i, \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$$

besitzt. Wir betrachten die Abbildung  $A$ , indem wir die Wirkung auf die Basisfunktionen angeben

$$A : H \rightarrow H, \quad y_n \rightarrow y_{n+1}.$$

Dann wird

$$Ax = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

$A$  ist linear und beschränkt:

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \left( \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j y_{j+1} \right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \|x\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist  $A$  auch stetig und bildet die Sphäre  $S_r = \{x \in H : \|x\| = r\}$  in sich ab. Für den Basisvektor  $y_0$  (beachte  $\|y_0\| = 1$ ) definieren wir

$$Tx := \frac{1}{2}(1 - \|x\|)y_0 + Ax. \quad (1.35)$$

Die Abbildung  $T$  ist stetig und bildet  $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$  in sich selbst ab:

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leq \frac{1}{2}(1 - \|x\|)\|y_0\| + \|Ax\| = \frac{1}{2}(1 - \|x\|) + \|x\| \\ &= \frac{1}{2}(1 + \|x\|) \leq 1.\end{aligned}$$

Wir nehmen nun an,  $T$  besitze einen Fixpunkt  $x_0 \in B$ ,  $Tx_0 = x_0$ . (1.35) liefert uns

$$x_0 - Ax_0 = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0. \quad (1.36)$$

**1.Fall:**

$x_0 = 0$ . Dann ist  $\frac{1}{2}y_0 = 0$ , was nicht sein kann.

**2.Fall:**

$\|x_0\| = 1$ . Dann ist  $x_0 = Ax_0$  und

$$x_0 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}.$$

Es folgt  $\alpha_i = \alpha_{i+1}$  für alle  $i$  und  $\|x_0\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i^2 \neq 1$ , Widerspruch.

**3.Fall:**

$0 < \|x_0\| < 1$ . Wir erhalten aus (1.36)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (\alpha_i - \alpha_{i-1})y_i = \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|)y_0.$$

Durch Koeffizientenvergleich wird

$$\begin{aligned}\alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0 \quad \text{für } i = 0, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1} \quad \text{für } i \neq 0.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$\dots \alpha_{-3} = \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \dots$$

und  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \infty$ . Widerspruch! ■

Im Schauderschen Fixpunktsatz wird von der Teilmenge  $M$  gefordert, dass sie kompakt und konvex sei, oder, dass der stetige Operator  $T$  zusätzlich kompakt sei. Diese unterschiedlichen Voraussetzungen führen zu zwei äquivalenten Fassungen des Schauderschen Fixpunktsatzes.

**Definition 4 (kompakter (vollstetiger) Operator)** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ .  $T$  ist kompakt, wenn

1.  $T$  ist stetig.
2.  $T$  bildet beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab.

**Lemma 2** Es sei  $T$  eine stetige Abbildung eines metrischen Raumes  $X$  in einen metrischen Raum  $Y$  und  $X_0 \subset X$  eine kompakte Teilmenge. Dann ist das Bild  $T(X_0)$  kompakt.

**Beweis:**

Wir betrachten eine offene Überdeckung  $(V_\alpha)_\alpha$  der Bildmenge  $T(X_0)$ . Da  $T$  stetig ist, sind die Urbilder  $T^{-1}(V_\alpha)$  offen und bilden eine Überdeckung von  $X_0$ . Da  $X_0$  kompakt ist, reichen endlich viele Urbilder  $T^{-1}(V_{\alpha_i}), i = 1, \dots, n$  aus, deren Vereinigung  $X_0$  überdeckt. Damit ist auch  $T(X_0) \subset \cup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$ . ■

Beispiele für kompakte Operatoren sind u.a. lineare und nichtlineare Integraloperatoren

$$T(x) = y(t) = \int_a^b K(t, s, x(s)) ds$$

$$S(x) = y(t) = \int_a^t K(t, s, x(s)) ds$$

und Einbettungsoperatoren in entsprechenden Banachräumen.

Kompakte Operatoren spielen eine zentrale Rolle in der nichtlinearen Funktionalanalysis. Aussagen für stetige Operatoren in endlichdimensionalen Räumen lassen sich häufig auf „vollstetige“ Operatoren in unendlich-dimensionalen Räumen übertragen. Eine Grundlage für diese Übertragung bildet der folgende Satz:

**Satz 14 (Approximationssatz für kompakte Operatoren)** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $T : M \subset X \rightarrow Y$ , wobei  $M$  eine nichtleere beschränkte Teilmenge ist.  $T$  ist kompakt genau dann, wenn zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein kompakter Operator  $P_n : M \rightarrow Y$  existiert, so dass  $\dim(\text{span } P_n(M)) < \infty$  und*

$$\sup_{x \in M} \|T(x) - P_n(x)\|_Y \leq \frac{1}{n} \quad (1.37)$$

ist.

**Beweis:**

- a) Wir nehmen an, dass  $T$  kompakt ist. Dann ist  $T(M)$  relativ kompakt, d.h. für jedes  $n$  gibt es Elemente  $y_i \in T(M), i = 1, \dots, N$ , so dass

$$\min_i \|Tx - y_i\| < \frac{1}{n} \quad \forall x \in M.$$

Die Elemente  $\{y_i\}$  bilden ein endliches  $\frac{1}{n}$ -Netz für  $T(M)$ .

Wir führen den Schauderoperator  $P_n$  ein:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} = \sum_{i=1}^N \lambda_i(x) y_i,$$

wobei  $a_i(x) = \max\{\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|, 0\}$  eine stetige reellwertige Abbildung von  $M$  in  $\mathbb{R}$  ist. Da

$$a_i(x) = 0 \quad \text{ist, falls} \quad \|Tx - y_i\| \geq \frac{1}{n} \quad (1.38)$$

$$\text{und} \quad a_i(x) \neq 0 \quad \text{ist, falls} \quad \|Tx - y_i\| < \frac{1}{n},$$

ist  $P_n(x)$  wohldefiniert und eine stetige Abbildung von  $M$  in  $M_n$ , wobei  $M_n = \text{co}(y_1, \dots, y_N) \subseteq \text{span}(y_1, \dots, y_N)$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \|P_n(x) - T(x)\| &= \left\| \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x)(y_i - T(x))}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} \right\| \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^N a_i(x) \|y_i - T(x)\|}{\sum_{i=1}^N a_i(x)} \stackrel{(1.38)}{<} \frac{1}{n} \quad \forall x \in M. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Weiterhin sind die Operatoren  $P_n$  kompakt. Da nämlich  $T(M)$  beschränkt ist, ist nach (1.39) auch das Bild  $P_n(M)$  beschränkt und als Teilmenge des endlichdimensionalen Raumes  $\text{span}(y_1, \dots, y_N)$  relativ kompakt.

b) Die Voraussetzung (1.37) gelte.

Es gilt für die Elemente  $x, y \in M$ :

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &= \|T(x) - P_n(x) + P_n(x) - P_n(y) + P_n(y) - T(y)\| \\ &< \frac{2}{n} + \|P_n(x) - P_n(y)\| < \frac{3}{n} \quad \text{für } \|x - y\| < \delta(n), \end{aligned}$$

und damit ist  $T$  eine stetige Abbildung.

$T(M)$  ist außerdem relativ kompakt. Sei nämlich  $\{z_1, \dots, z_N\}$  ein endliches  $\frac{1}{n}$ -Netz für  $P_n(M)$ . Dann gilt für ein  $y = T(x) \in T(M)$

$$\begin{aligned} \|y - z_i\| = \|T(x) - z_i\| &= \|T(x) - P_n(x) + P_n(x) - z_i\| \\ &< \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

falls  $z_i$  so gewählt wird, dass  $\|P_n(x) - z_i\| < \frac{1}{n}$  ist. Daher ist  $\{z_1, \dots, z_N\}$  ein endliches  $\frac{2}{n}$ -Netz für  $T(M)$  und  $T(M)$  ist relativ kompakt. ■

Wir beweisen jetzt den Schauderschen Fixpunktsatz.

**Satz 15** Sei  $T : M \subseteq X \rightarrow M$  stetig, wobei  $X$  ein Banachraum und  $M$  eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge ist. Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

**Beweis:**

Der Operator  $T = T|_M$  ist kompakt, da  $\overline{T(M)} \subset M$  als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ebenfalls kompakt ist. Aus dem Beweis des Approximationssatzes folgt, dass kompakte Operatoren  $P_n : M \rightarrow M_n = \text{co}(y_1, \dots, y_N) \subseteq M$  existieren mit

$$\|P_n(x) - T(x)\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in M. \quad (1.40)$$

Wir setzen

$$\tilde{P}_n = P_n|_{M_n} : M_n \rightarrow M_n.$$

Die Menge  $M_n$  ist abgeschlossen und homöomorph zur abgeschlossenen Kugel  $\overline{B_1(0)}$  im  $\mathbb{R}^{\tilde{N}}$ ,  $\tilde{N} \leq N$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert ein Fixpunkt  $x_n \in M_n$  von  $\tilde{P}_n$ . Wir betrachten die Folge der Fixpunkte  $(x_n)_n, x_n \in M_n \subseteq M$ . Diese ist nach (1.40) beschränkt. Da  $M$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_i})_{n_i}, x_{n_i} \rightarrow x \in M$  für

$n_l \rightarrow \infty$ . Wir zeigen, dass dieser Grenzwert  $x$  der gesuchte Fixpunkt ist. Es ist

$$\|T(x) - x_{n_l}\| = \|T(x) - P_{n_l}x_{n_l}\| \leq \|T(x) - T(x_{n_l})\| + \|T(x_{n_l}) - P_{n_l}x_{n_l}\|.$$

Die rechte Seite konvergiert für  $n_l \rightarrow \infty$  zu Null, da  $T$  stetig ist und (1.40) gilt. Die Abschätzung

$$\|T(x) - x\| \leq \|T(x) - x_{n_l}\| + \|x - x_{n_l}\|$$

zeigt, dass  $T(x) = x$  ist. ■

Wir beweisen eine äquivalente Fassung des Schauderschen Fixpunktsatzes, die häufig benutzt wird. Sie lautet

**Satz 16** Sei  $T : M \subset X \rightarrow M$  ein kompakter Operator,  $X$  ein Banachraum und  $M$  eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von  $X$ . Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.

Im Beweis wird folgendes Lemma von Mazur benutzt:

**Lemma 3** Sei  $X$  ein Banachraum und  $M \subseteq X$  relativ kompakt. Dann ist auch  $\text{co } M$  relativ kompakt.

### Beweis des Lemmas von Mazur:

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Zu  $M$  existiert ein endliches  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz, d.h. es existieren Elemente  $z_1, \dots, z_n \in M$ , so dass für jedes  $x$  ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  existiert mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.41)$$

Dadurch können wir eine Abbildung  $v : M \rightarrow \{1, \dots, n\}$  definieren:

$v(x) = j$ ,  $j$  ist der kleinste Index, so dass (1.41) gilt.

Wir wollen für  $\text{co}(M)$  ein endliches  $\varepsilon$ -Netz konstruieren.

Sei

$$y \in \text{co}(M), \quad y = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i, \quad m = m(y) \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in [0, 1].$$

Wir erhalten

$$\|y - \sum_{i=1}^m \lambda_i z_{v(y_i)}\| = \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i (y_i - z_{v(y_i)}) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da  $\sum_{i=1}^m \lambda_i z_{v(y_i)} \in K = \text{co}(z_1, \dots, z_n)$  ist, gilt

$$\text{co}(M) \subset \cup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x). \quad (1.42)$$

Wir überlegen nun, dass es endlich viele Elemente  $K_1, \dots, K_N \in K$  gibt, so dass

$$K \subset \cup_{i=1}^N B_{\frac{\varepsilon}{2}}(K_i). \quad (1.43)$$

Dazu müssen wir zeigen, dass  $K := \text{co}(z_1, \dots, z_n)$  relativ kompakt ist. Da  $\text{co}(z_1, \dots, z_n)$  als Teilmenge eines endlich dimensionalen Raumes beschränkt ist, ist das offensichtlich.

Da  $K$  ein  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für  $\text{co}(M)$  und  $\{K_1, \dots, K_N\}$  ein  $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz für  $K$  ist, folgt  $\{K_1, \dots, K_N\}$  ist endliches  $\varepsilon$ -Netz für  $\text{co}(M)$ . ■

Wir sind jetzt in der Lage, die 2.Fassung des Satzes von Schauder zu beweisen.

**Beweis von Satz 16:**

Sei  $N = \overline{\text{co}(T(M))} \subseteq M$ . Nach dem Lemma von Mazur ist  $N$  kompakt, konvex und nicht leer.  $T$  ist stetig und bildet  $N$  in sich ab:

$$N \subseteq M \Rightarrow T(N) \subseteq T(M) \Rightarrow T(N) \subseteq \overline{\text{co}(T(N))} \subset \overline{\text{co}(T(M))} = N.$$

Nach der ersten Fassung des Schauderschen Fixpunktsatzes existiert ein Fixpunkt von  $T$ . ■

**Anwendungen:****1° Ein semilineares Problem**

Wir hatten bereits das semilineare Dirichletproblem

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad (1.44)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (1.45)$$

mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes untersucht. Dabei waren an  $f$  gewisse Voraussetzungen gestellt worden. Wir wollen jetzt den Schauderschen Fixpunktsatz (Satz 16) anwenden, um unter Beschränktheitsvoraussetzungen an  $f$  die Existenz einer Lösung zu garantieren.

**Lemma 4** Sei  $V = H^1(\Omega)$  und  $f : L_2(\Omega) \rightarrow V'$  eine beschränkte Abbildung, d.h.  $\|f(u)\|_{V'} \leq k_f$  für alle  $u \in L_2(\Omega)$ . Dann besitzt das Problem (1.44), (1.45) eine schwache Lösung in  $V$ .

**Beweis:**

Eine Funktion  $u \in V$  ist schwache Lösung von (1.44), (1.45) falls

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f(u), v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Wir vorn in Formel (1.7) betrachten wir ein  $u_0 \in L_2(\Omega)$  und die entsprechenden schwachen Probleme

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f(u_0), v \rangle \quad \forall v \in V, u_0 \in V.$$

Nach dem Lemma von Lax-Milgram existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in V$  zu jedem  $u_0 \in L_2(\Omega)$ , beschrieben durch den Operator  $B$

$$B : u_0 \rightarrow u,$$

und

$$\|Bu_0\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f(u_0)\|_{V'} \leq \frac{k_f}{\alpha} = R,$$

d.h.  $B$  bildet jede Teilmenge von  $L_2(\Omega)$  in eine beschränkte konvexe Menge  $M_R = \{u \in V, \|u\| \leq R\}$  ab. Sei  $T = i \circ B$ , wobei  $i$  der Einbettungsoperator von  $V$  in  $L_2(\Omega)$  ist. Da

$$\|Tu_0\|_{L_2(\Omega)} \leq \|Bu_0\|_V \leq R$$

bildet  $T = i \circ B : \overline{i(M_R)} \subset L_2(\Omega) \rightarrow \overline{i(M_R)} \subset L_2(\Omega)$  ab. Da die Einbettung  $i$  ein kompakter stetiger Operator ist und  $\overline{i(M_R)}$  beschränkt, abgeschlossen und konvex ist, muss  $T$  einen Fixpunkt  $u \in L_2(\Omega)$  besitzen. Da aber  $Tu = i \circ Bu = u$  ist, muss  $u \in V$  sein. ■

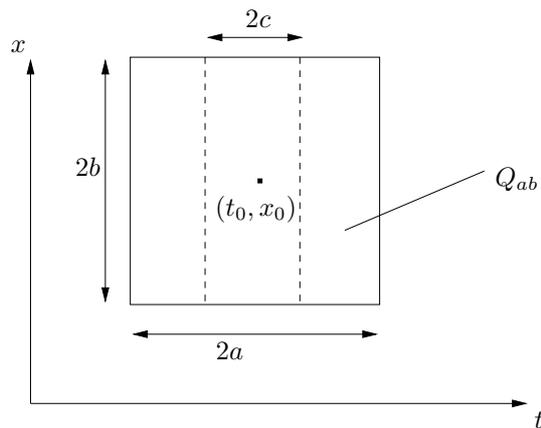
2° **Der Satz von Peano**

Als weitere Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes beweisen wir den Satz von Peano:

**Satz 17 (Satz von Peano)** Das Anfangswertproblem  $x'(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$  besitzt eine stetig differenzierbare Lösung im Intervall  $[t_0 - c, t_0 + c]$ , falls die Funktion

$$f : Q_{ab} \rightarrow \mathbb{R}$$

im Rechteck  $Q_{ab} = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  stetig ist. Dabei ist  $c = \min\{a, \frac{b}{k}\}$  und  $|f(t, x)| \leq k, \forall (t, x) \in Q_{ab}$ .

Abbildung 1.4: Rechteck  $Q_{ab}$ **Beweis:**

Wir schreiben das Anfangswertproblem in Form einer äquivalenten Integralgleichung auf:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = Tx.$$

Es sei  $X = C([t_0 - c, t_0 + c])$  der Raum der stetigen Funktionen über dem Intervall  $(t_0 - c, t_0 + c)$  mit der Maximum-Norm und

$$M = \{x \in X : \|x - x_0\|_{C([t_0 - c, t_0 + c])} \leq b\}.$$

Wir zeigen, dass  $T : M \subseteq X \rightarrow M$  eine Selbstabbildung ist:

$$\begin{aligned} \|Tx - x_0\| &= \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \\ &\leq c \cdot k \leq \frac{b}{k} \cdot k = b. \end{aligned}$$

$M$  ist beschränkt, abgeschlossen und konvex und  $T$  ist kompakt. Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz existiert daher ein Element  $x \in M$  mit  $Tx = x$ , das stetig differenzierbar ist. ■

Weitere Anwendungen des Schauderschen Fixpunktsatzes treten bei der Untersuchung von Anfangswertproblemen für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}(t) &= A\vec{x}(t) + \vec{f}(t, \vec{x}(t)), \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0\end{aligned}$$

auf. Insbesondere werden Stabilitätsuntersuchungen und die Existenz periodischer Lösungen behandelt [10].

### 1.3 Schäferscher Fixpunktsatz (Leray-Schauder Prinzip)

Aus Schauders Fixpunktsatz folgt ein weiterer Fixpunktsatz, auch Schäferscher Fixpunktsatz genannt. Der Vorteil ist, dass keine vorgegebene abgeschlossene konvexe Teilmenge  $M$  betrachtet wird. Man geht von a-priori Abschätzungen für Eigenlösungen aus und zeigt dann, dass tatsächlich Fixpunkte existieren.

**Satz 18 (Schäferscher Fixpunktsatz)**  *$T$  sei ein kompakter Operator, der einen Banachraum  $X$  in sich abbildet. Die Mengen*

$$M(\lambda) = \{u \in X : u = \lambda Tu \text{ für } \lambda \in (0, 1)\} \quad (1.46)$$

*seien gleichmäßig beschränkt. Dann besitzt  $T$  einen Fixpunkt.*

#### Beweis:

Sei  $\|u\| < R$  für Elemente  $u \in M(\lambda)$ , d.h.  $u = \lambda Tu$  mit einem  $\lambda \in (0, 1)$ .

#### 1.Schritt:

Wir setzen

$$\tilde{T}u := \begin{cases} Tu & \text{falls } \|Tu\| \leq R \\ \frac{RTu}{\|Tu\|} & \text{falls } \|Tu\| > R, \end{cases} \quad (1.47)$$

$\tilde{T} : \overline{B_R(0)} \subset X \rightarrow \overline{B_R(0)} \subset X$ . Sei  $K = \overline{\text{co}(\tilde{T}(B_R(0)))}$ . Aus der Kompaktheit von  $T$  folgt die Kompaktheit von  $\tilde{T} : K \rightarrow K$  (Übung).

#### 2.Schritt:

Aus dem Schauderschen Fixpunktsatz folgt, dass  $\tilde{T}$  einen Fixpunkt in  $K$  besitzt, d.h.  $\tilde{T}u = u$ .

Wir zeigen, dass  $u$  auch Fixpunkt von  $T$  ist. Dazu nehmen wir an,  $u$  sei kein Fixpunkt von  $T$ . Daher muss  $\|Tu\| > R$  nach (1.47) sein und

$$\tilde{T}u = \frac{RTu}{\|Tu\|} = \lambda Tu = u,$$

mit  $\lambda = \frac{R}{\|Tu\|} < 1$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\|u\| < R$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $\|\tilde{T}u\| = \|u\| = R$  ist. ■

### Ein semilineares elliptisches Randwertproblem

Wir betrachten das folgende Randwertproblem im glatten beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  für eine skalare Funktion  $u$  [4, S.505]

$$-\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (1.48)$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad (1.49)$$

wobei  $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lipschitz-stetige Funktion ist.  $b$  genügt dann folgender Wachstumsbedingung: (setze  $\vec{p} = Du$ )

$$|b(\vec{p})| \leq C(|\vec{p}| + 1) \quad \forall \vec{p} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.50)$$

**Satz 19** Sei  $\mu > 0$  genügend groß und  $b$  sei Lipschitz-stetig. Dann existiert eine Funktion  $u \in H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$ , die schwache Lösung von (1.48), (1.49) ist.

#### Beweis:

##### 1.Schritt:

Sei  $u_0 \in \mathring{H}^1(\Omega)$  beliebig. Wir setzen  $f_0 = b(Du_0)$ . Aus (1.50) folgt, dass  $f_0 \in L_2(\Omega)$  ist. Sei  $u = u(u_0)$  aus  $\mathring{H}^1(\Omega) = V$  die eindeutig bestimmte schwache Lösung von (1.48), (1.49) zu  $f_0$ , d.h.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \mu uv \, dx = - \int_{\Omega} f_0 v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (1.51)$$

Da  $\Omega$  glatt ist, kann man zusätzlich zeigen, dass  $u \in H^2(\Omega)$  ist und der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f_0\|_{L_2(\Omega)} \quad (1.52)$$

genügt (siehe [4, § 6.3]). Sei  $B : V \rightarrow H^2(\Omega) \cap V$  die Abbildung, die  $u_0 \in V$  die Lösung  $u \in V \cap H^2(\Omega)$  zuordnet. Aus (1.52) und (1.50) folgt

$$\begin{aligned} \|Bu_0\|_{H^2(\Omega)} &\leq c \|b(Du_0)\|_{L_2(\Omega)} \stackrel{(1.50)}{\leq} \hat{c} \left[ \int_{\Omega} (|Du_0|^2 + 1) \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \hat{c} (\|u_0\|_V + 1) \quad \forall u_0 \in V. \end{aligned} \quad (1.53)$$

##### 2.Schritt:

Wir setzen  $T = i \circ B : V \rightarrow H^2(\Omega) \cap V \rightarrow V$ , wobei  $i$  der Einbettungsoperator von  $H^2(\Omega) \cap V$  in  $V$  ist. Wir zeigen,  $T$  ist kompakt.

Zunächst sehen wir uns die Stetigkeit an. Sei  $(u_{0_k})_k$  eine konvergente Folge in  $V$ ,  $u_{0_k} \rightarrow u_0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Folge  $(Bu_{0_k})_k$  ist nach (1.53) in  $H^2(\Omega)$  beschränkt, d.h.

$$\sup_k \|Bu_{0_k}\|_{H^2(\Omega)} < \infty.$$

Da  $H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$  kompakt in  $\mathring{H}^1(\Omega)$  eingebettet ist (siehe [1, S.144]), besitzt  $(Tu_{0_k})_k$  eine in  $V$  konvergente Teilfolge

$$Tu_{0_{k_l}} \rightarrow w. \quad (1.54)$$

Wir überlegen, dass  $w = Tu_0$  ist. Es ist

$$\int_{\Omega} (DTu_{0_{k_l}} \cdot Dv + \mu Tu_{0_{k_l}} v) \, dx = - \int_{\Omega} b(Du_{0_{k_l}}) v \, dx \quad \forall v \in V. \quad (1.55)$$

Wegen (1.54) konvergiert die linke Seite von (1.55)

$$\int_{\Omega} (DTu_{0_{k_l}} \cdot Dv + \mu Tu_{0_{k_l}} v) dx \rightarrow \int_{\Omega} (Dw \cdot Dv + \mu wv) dx. \quad (1.56)$$

Da  $u_{0_k} \rightarrow u_0$  in  $V$  konvergiert und damit auch  $u_{0_{k_l}} \rightarrow u_0$  in  $V$ , konvergiert die rechte Seite von (1.55) wegen (1.50):

$$-\int_{\Omega} b(Du_{0_{k_l}})v dx \rightarrow -\int_{\Omega} b(Du_0)v dx. \quad (1.57)$$

Da (1.56) mit (1.57) für alle  $v \in V$  übereinstimmt, muss wegen der Eindeutigkeit der schwachen Lösung  $w = Tu_0$  sein. Nun können wir schließen, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} Tu_{0_k} = Tu_0$  ist:

$$\|Tu_{0_k} - Tu_0\| \leq \|Tu_{0_k} - Tu_{0_{k_l}}\| + \|Tu_{0_{k_l}} - Tu_0\|. \quad (1.58)$$

Da

$$\int_{\Omega} (DTu_{0_k} - DTu_{0_{k_l}}) \cdot Dv + \mu(Tu_{0_k} - Tu_{0_{k_l}})v dx = -\int_{\Omega} [b(Du_{0_k}) - b(Du_{0_{k_l}})]v dx$$

ist, gilt die Abschätzung

$$\|Tu_{0_k} - Tu_{0_{k_l}}\|_V \leq \text{const} \|b(Du_{0_k}) - b(Du_{0_{k_l}})\|_{L_2(\Omega)} \leq L \text{const} \|Du_{0_k} - Du_{0_{k_l}}\|_{L_2(\Omega)},$$

wobei  $L$  die Lipschitzkonstante für  $b$  ist. Daher konvergiert die rechte Seite von (1.58) zu Null.

Wir überlegen nun, dass  $T$  beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.

Dazu betrachten wir eine beschränkte Teilfolge  $(u_{0_k})_k$  in  $V$ . Aus (1.53) folgt, dass  $(Bu_{0_k})_k$  in  $H^2(\Omega)$  beschränkt ist. Daher besitzt  $(Tu_{0_k})_k$  eine konvergente Teilfolge in  $V$ .

### 3.Schritt:

Wir müssen jetzt die Beschränktheit der Mengen (1.46) zeigen.

Es ist  $u \in M(\lambda) = \{u \in V : u = \lambda Tu\}$ ,  $0 < \lambda < 1$ , falls  $\frac{u}{\lambda} = Tu$  ist. Setzen wir  $u = v$  in (1.51) ein, dann ist

$$\int_{\Omega} (DTu \cdot Du + \mu(Tu)u) dx = -\int_{\Omega} b(Du)u dx$$

und mit  $Tu = \frac{u}{\lambda}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Du|^2 + \mu|u|^2 dx &= -\lambda \int_{\Omega} b(Du)u dx \\ &\leq \int_{\Omega} c(|Du| + 1)|u| dx. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Nach Anwendung der Ungleichung  $ab \leq \frac{1}{4\varepsilon}a^2 + \varepsilon b^2$  für ein  $\varepsilon > 0$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} |Du||u| &\leq \frac{1}{4\varepsilon}|u|^2 + \varepsilon|Du|^2, \\ 1|u| &\leq \frac{1}{2}(|u|^2 + 1) \quad \text{für } \varepsilon = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Eine mögliche Abschätzung von (1.59) lautet:

$$\int_{\Omega} (|Du|^2 + \mu u^2) dx \leq c \int_{\Omega} (\varepsilon |Du|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |u|^2 + \frac{1}{2}(|u|^2 + 1)) dx.$$

Für  $\varepsilon c < 1$  folgt

$$\int_{\Omega} (1 - c\varepsilon) |Du|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left( \frac{c}{4\varepsilon} + \frac{c}{2} - \mu \right) |u|^2 + c \int_{\Omega} \frac{1}{2} dx. \quad (1.60)$$

Für  $\mu \geq \frac{c}{4\varepsilon} + \frac{c}{2}$  ist der erste Term der rechten Seite von (1.60) nicht positiv und wir erhalten

$$\int_{\Omega} |Du|^2 dx \leq \frac{c}{1 - c\varepsilon} \frac{1}{2} \text{meas } \Omega.$$

Wegen der Normäquivalenz in  $V$  gilt

$$\|u\|_V \leq K$$

und die gleichmäßige Beschränktheit der Mengen  $M(\lambda)$  ist gezeigt. ■

Als weiteres Anwendungsbeispiel sei ein klassischer Satz zur Existenz von Lösungen von Randwertproblemen für nichtlineare partielle Differentialgleichungen genannt.

**Satz 20 (Bernstein 1906/10, Leray-Schauder 1934)** Gegeben sei die quasilineare Differentialgleichung 2.Ordnung, deren Lösungen einer Dirichlet-Randbedingung genügen:

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + 2A_{12}(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + A_{22}(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Es gelte:

1.  $\Omega$  sei ein beschränktes, konvexes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ ,  $\partial\Omega$  sei durch eine Randkurve aus  $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $0 < \alpha < 1$ , darstellbar, die in jedem Randpunkt eine positive Krümmung besitzt.
2. Es sei  $M = \Omega \times \mathbb{R}^3$  und  $A_{ij} \in C^\alpha(\overline{M})$ ,  $i, j = 1, 2$  und  $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ .
3. Es existiert ein  $c > 0$ , so dass

$$A_{11}(P)\xi^2 + 2A_{12}(P)\xi\eta + A_{22}(P)\eta^2 \geq c(\xi^2 + \eta^2) \forall P \in M; (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$$

ist. (gleichmäßige Elliptizität)

Dann besitzt das obige Randwertproblem eine Lösung  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

### Beweisskizze:

Das Randwertproblem wird in ein Fixpunktproblem überführt. Dazu werden die folgenden Schritte ausgeführt.

1. Durch Wahl eines festen Elementes  $u = z$  in den Koeffizienten  $A_{ij}$  erfolgt eine Linearisierung und das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} A_{11}(x, y, z, z_x, z_y) u_{xx} + 2A_{12}(x, y, z, z_x, z_y) u_{xy} + A_{22}(x, y, z, z_x, z_y) u_{yy} &= 0 \text{ in } \Omega \quad (1.61) \\ u &= \lambda g \text{ auf } \partial\Omega. \quad (1.62) \end{aligned}$$

wird betrachtet. Hierbei ist  $z \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ ,  $0 < \beta < 1$  und  $\lambda \in [0, 1]$  eine feste reelle Zahl. Für  $\gamma = \alpha \cdot \beta$  erhält man durch eine einfache Abschätzung, dass  $A_{ij}(x, y, z, z_x, z_y) = A_{ij}(x, y) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist. Außerdem ist offensichtlich  $g \in C^{2,\gamma}(\partial\Omega)$ .

2. Das lineare Problem (1.61) besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung  $u(\lambda)$  in  $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ , d.h. zu jedem  $z \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  wird eine Lösung  $u(\lambda, \cdot) \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  zugeordnet. Das sei durch den Operator  $T(\lambda) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$

$$T(\lambda)z = u(\lambda)$$

realisiert. Es gilt, dass  $T(\lambda) = \lambda T(1)$  ist. Unser Ausgangsproblem ist lösbar, falls  $T(1) = T$  einen Fixpunkt besitzt.

3.  $T$  bildet zunächst  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ab.  $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist kompakt in  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  eingebettet. Diese Eigenschaft führt zu der Aussage, dass  $T$  als Abbildung von  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  in  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  kompakt ist.
4. Für Lösungen der Gleichungen

$$u = \lambda Tu, 0 < \lambda < 1,$$

gilt die a-priori Abschätzung (siehe [5])

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq c.$$

Nach dem Schäferschen Fixpunktsatz besitzt  $T$  einen Fixpunkt  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ , der Lösung des Randwertproblems  $\mathcal{A}u = (f, g)$  ist.

5. Es muss noch gezeigt werden, dass die Lösung  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  sich in  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  befindet. Im 2.Schritt haben wir gesehen, dass  $u \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$  ist. Daher sind die Koeffizienten  $A_{ij}$  für dieses  $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ . Nach einem weiteren Satz von Schauder ist  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . ■

# Kapitel 2

## Theorie monotoner Operatoren

Wir sehen uns zunächst eine elementare Aussage für reelle Funktionen einer reellen Variablen an.

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

- $f$  ist monoton wachsend
- $f$  ist stetig
- $f$  ist koerziv, d.h.  $f(u) \rightarrow \pm\infty$ , falls  $u \rightarrow \pm\infty$ .

Dann besitzt die Gleichung

$$f(u) = b$$

für alle  $b \in \mathbb{R}$  eine Lösung  $u \in \mathbb{R}$ .

Falls  $f$  strikt monoton ist, dann ist die Lösung eindeutig.

### 2.1 Monotonie und Stetigkeit

Dieses Resultat wird auf Abbildungen in Banachräumen verallgemeinert. Hierbei geht man davon aus, dass für monoton wachsende Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Definition 5** Es sei  $V$  ein Banachraum,  $V'$  sein Dualraum und  $A : V \rightarrow V'$ .

- $A$  ist monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in V$ .
- $A$  ist strikt monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v$ .
- $A$  ist gleichmäßig monoton  $\Leftrightarrow \langle Au - Av, u - v \rangle \geq b(\|u - v\|)\|u - v\| \quad \forall u, v \in V$ , wobei  $b$  stetig monoton wachsend ist,  $b(0) = 0, b(t) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ .
- $A$  ist stark monoton  $\Leftrightarrow \exists c > 0$ , so dass  $\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in V$ .
- $A$  ist koerziv  $\Leftrightarrow \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \rightarrow \infty$  für  $\|u\| \rightarrow \infty$ .

**Satz 21**

$$d) \Rightarrow c) \Rightarrow \begin{matrix} b) \\ e) \end{matrix} \Rightarrow a)$$

**Beweis:**

$d) \Rightarrow c)$ : Man setze  $b(t) = ct$ .

$c) \Rightarrow e)$ : Es ist

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \langle Au - A0 + A0, u - 0 \rangle \\ &= \langle Au - A0, u - 0 \rangle + \langle A0, u - 0 \rangle \\ &\geq b(\|u\|)\|u\| - \|A0\|\|u\| \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} \geq b(\|u\|) - \|A0\| \rightarrow \infty \text{ f\"ur } \|u\| \rightarrow \infty.$$

Die Aussagen  $b) \Rightarrow a), c) \Rightarrow b)$  sind trivial. ■

**Beispiel:**

Die Abbildung  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , (siehe Abbildung 2.1)

$$A(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{f\"ur } u \neq 0 \\ 0 & \text{f\"ur } u = 0 \end{cases}$$

ist

- strikt monoton, falls  $p > 1$  ist,
- stark monoton, falls  $p = 2$  ist,
- gleichm\"a\ss;ig monoton, falls  $p \geq 2$  ist.

Es ist n\"amlich

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v).$$

Damit ist die Aussagen f\"ur  $p = 2$  offensichtlich.

Wir unterscheiden zwei F\"alle:

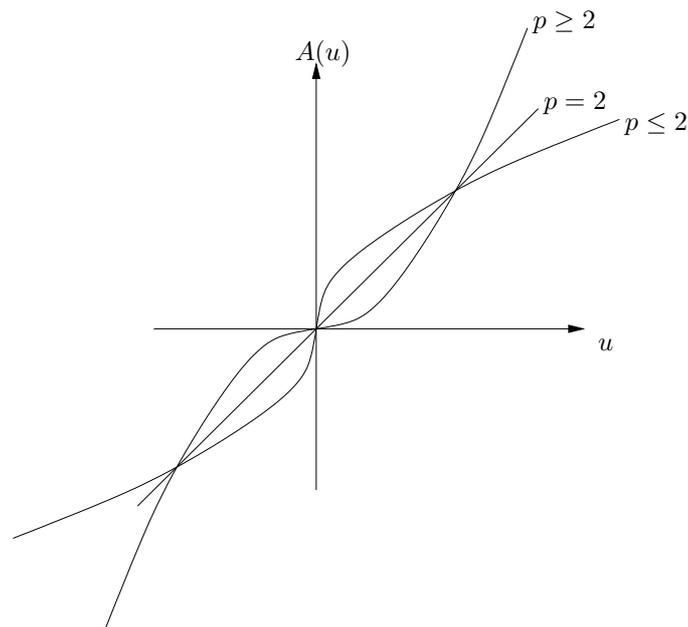
**1.Fall:**  $0 \leq v \leq u$

Dann ist f\"ur  $p \geq 2$

$$\begin{aligned} u^{p-1} - v^{p-1} &= \int_0^{u-v} (p-1)(t+v)^{p-2} dt = (t+v)^{p-1} \Big|_0^{u-v} \\ &\geq \int_0^{u-v} (p-1)t^{p-2} dt = (u-v)^{p-1} \end{aligned}$$

und

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-1} - v^{p-1})(u - v) \geq b(|u - v|)|u - v| \quad \text{f\"ur } b(t) = t^{p-1}.$$

Abbildung 2.1: Die Funktion  $A(u)$ 

Ist  $p > 1$ , dann gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-1} - v^{p-1})(u - v) > 0 \quad \text{für } u \neq v.$$

**2.Fall:**  $v \leq 0 \leq u$

Für  $p \geq 2$  gilt  $u^{p-1} + |v|^{p-1} \geq c(u + |v|)^{p-1}$  und daher

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u - v) \geq c(u + |v|)^{p-1}(u - v) \\ &= c|u - v|^{p-1}|u - v|. \end{aligned}$$

Für  $p > 1$  erhalten wir

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = (u^{p-1} + |v|^{p-1})(u + |v|) > 0 \quad \text{für } u \neq v.$$

Als nächste Eigenschaft sehen wir uns die Stetigkeit an.

**Definition 6** Sei  $V$  ein reeller reflexiver Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ .

(i)  $A$  ist demistetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(ii)  $A$  ist hemistetig, falls für alle  $u, v, w \in V$  die Funktion

$$t \rightarrow \langle A(u + tv), w \rangle_V$$

im Intervall  $[0, 1]$  stetig ist.

(iii)  $A$  ist stetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

(iv)  $A$  ist stark stetig, falls

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \Rightarrow Au_n \rightarrow Au \text{ in } V' \quad n \rightarrow \infty.$$

(v)  $A$  ist beschränkt, falls  $A$  beschränkte Mengen in  $V$  in beschränkte Mengen in  $V'$  abbildet.

(vi)  $A$  ist lokal beschränkt, falls jedes Element  $u \in V$  eine Umgebung besitzt, die durch  $A$  in eine beschränkte Menge in  $V'$  abgebildet wird.

### Bemerkung:

Es gilt:

$A$  ist stark stetig  $\Rightarrow A$  ist stetig  $\Rightarrow A$  ist demistetig  $\Rightarrow A$  ist hemistetig. (Übung)

Ist  $A$  ein linearer Operator, dann ist die Stetigkeit äquivalent zur Beschränktheit. Wir wollen nun untersuchen, wie Beschränktheit (bzw. Kompaktheit) und Stetigkeit im nichtlinearen Fall zusammenhängen.

**Lemma 5** Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ . Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Ist  $A$  stark stetig, dann ist  $A$  kompakt.
- (ii) Ist  $A$  demistetig, dann ist  $A$  lokal beschränkt.
- (iii) Ist  $A$  monoton, dann ist  $A$  lokal beschränkt.
- (iv) Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann ist  $A$  demistetig.

### Beweis:

- (i): Sei  $M \subset V$  beschränkt,  $A(M)$  sei das Bild von  $M$ . Wir betrachten eine beliebige Folge  $(Au_n)_n$  aus  $A(M)$ . Die Folge der Urbilder  $(u_n)_n$  ist beschränkt. Da  $V$  reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{n_k})_k$ ,  $u_{n_k} \rightarrow u$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Voraussetzung gilt  $Au_{n_k} \rightarrow Au$ , d.h. eine beliebige Folge  $(Au_n)_n$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(Au_{n_k})_k$ .
- (ii): Wir nehmen an,  $A$  sei nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein  $u \in V$  und eine Folge  $u_n \in V$  mit  $u_n \xrightarrow{V} u$ , so dass

$$\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Nach Voraussetzung gilt  $Au_n \rightarrow Au$ , d.h. wegen der Reflexivität gilt

$$\langle Au_n, v \rangle \rightarrow \langle Au, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Damit ist das System beschränkter linearer Operatoren  $B_n = Au_n \in V'$  punktweise beschränkt:

$$\sup_{n > n_0} |\langle B_n, v \rangle| < \infty.$$

Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt

$$\sup_{n > n_0} \|B_n\|_{V'} = \|Au_n\|_{V'} < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (2.1).

(iii) Auch in diesem Fall nehmen wir an, dass  $A$  nicht lokal beschränkt sei, d.h.  $u_n \xrightarrow{V} u$ , jedoch  $\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir setzen

$$a_n := \frac{1}{1 + \|Au_n\|_{V'} \|u - u_n\|_V}.$$

Aus der Monotonie von  $A$  folgt:

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n - Av, (u_n - u) + (u - v) \rangle$$

und damit

$$\langle Au_n, v - u \rangle \leq \langle Au_n, u_n - u \rangle - \langle Av, u_n - v \rangle.$$

Multiplikation mit  $a_n$  liefert

$$\begin{aligned} a_n \langle Au_n, v - u \rangle &\leq a_n \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V - a_n \langle Av, u_n - v \rangle \\ &\leq 1 + a_n \langle Av, v - u_n \rangle \\ &\leq 1 + \|Av\|_{V'} (\|v - u\|_V + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$a_n \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V \leq 1, a_n \leq 1$$

und

$$\|u_n - v\| \leq \|u - u_n\| + \|u - v\| \leq \frac{1}{2} + \|u - v\|$$

für genügend großes  $n$  ist. Ersetzen wir in dieser Abschätzung  $v$  durch  $2u - v$ , dann erhalten wir

$$-a_n \langle Au_n, v - u \rangle \leq 1 + \|A(2u - v)\|_{V'} (\|v - u\|_V + \frac{1}{2}). \quad (2.3)$$

Für  $w = v - u$  ergibt sich aus (2.2), (2.3)

$$|a_n \langle Au_n, w \rangle| \leq 1 + \max\{\|A(w + u)\|_{V'}, \|A(-w + u)\|_{V'}\} (\|w\|_V + \frac{1}{2}).$$

Daher sind die stetigen linearen Abbildungen

$$a_n Au_n : V \rightarrow \mathbb{R}$$

punktweise beschränkt.

Aus dem Prinzip über die gleichmäßige Beschränktheit folgt

$$\sup_n \|a_n Au_n\|_{V'} \leq \text{const}(u) = c(u).$$

Damit ist

$$\|Au_n\|_{V'} \leq \frac{c(u)}{a_n} = c(u)(1 + \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|),$$

also

$$\|Au_n\|_{V'} (1 - c(u) \|u_n - u\|) \leq c(u),$$

und somit

$$\|Au_n\|_{V'} \leq \frac{c(u)}{1 - c(u) \|u_n - u\|} \leq 2c(u) \quad \text{für } n > n_0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass  $\|Au_n\|_{V'} \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

(iv) Den Beweis von (iv) holen wir später im Anschluss an Lemma 6 nach.

## 2.2 Der Satz von Browder und Minty

Unser Ziel ist, den folgenden Hauptsatz von Browder und Minty für monotone Operatoren zu beweisen:

**Satz 22 (Browder, Minty, 1963)** Sei  $V$  ein reflexiver Banachraum mit abzählbarer Basis,  $A : V \rightarrow V'$ . Es gelte

- $A$  ist monoton, d.h.  $\langle Au - Av, u - v \rangle_V \geq 0, \forall u, v \in V$
- $A$  ist hemistetig, d.h. die Abbildung  $t : \langle A(u + tv), w \rangle_X$  ist stetig im Intervall  $[0, 1]$  für alle  $u, v, w \in X$ .
- $A$  ist koerzitiv, d.h.  $\lim_{\|u\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle_V}{\|u\|} = \infty$ .

Dann existiert für alle  $f \in V'$  ein  $u \in V$ , so dass

$$Au = f,$$

d.h.  $\langle Au, v \rangle = \langle f, v \rangle$  für alle  $v \in V$  ist.

**Beweisskizze:** Ohne auf technische Einzelheiten einzugehen, skizzieren wir zunächst den Beweis.

**1.Schritt:** Galerkin Approximation, Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes:

Da  $V$  eine abzählbare Basis  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  besitzt, gilt

$$V = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n},$$

$V_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ . Der Fixpunktsatz von Brouwer sichert die Existenz von Galerkinlösungen  $u_n$  mit  $\langle Au_n, v_n \rangle = \langle f, v_n \rangle \forall v_n \in V_n$ .

**2.Schritt:** A-priori Abschätzung

Es ist zu zeigen, dass die Folge der Galerkinlösungen beschränkt ist.

**3.Schritt:** Schwache Konvergenz

Da  $V$  reflexiv ist, besitzt die beschränkte Folge von Galerkinlösungen  $(u_n)_n$  eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{n_k})_k$

$$u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

Es ist zu zeigen, dass  $u$  eine Lösung von  $Au = f$  ist.

Beim Beweis des 3.Schrittes spielt ein Lemma von Minty eine entscheidende Rolle.

**Lemma 6 (Lemma von Minty (1962))** [6, S.57] Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $A : V \rightarrow V'$  ein hemistetiger und monotoner Operator. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i)  $A$  ist maximal monoton, d.h. seien  $u \in V, f \in V'$  und

$$\langle f - Av, u - v \rangle_V \geq 0 \quad \forall v \in V, \quad (2.4)$$

dann folgt  $Au = f$ .

(ii)  $A$  genügt der Bedingung (M), d.h. aus

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{in } V \quad (2.5)$$

$$Au_n \rightharpoonup f \quad \text{in } V' \quad (2.6)$$

$$\langle Au_n, u_n \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V \quad (2.7)$$

für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $Au = f$ .

(iii) Aus

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \quad (2.8)$$

$$Au_n \rightarrow f \text{ in } V' \quad (2.9)$$

bzw.

$$u_n \rightarrow u \text{ in } V \quad (2.10)$$

$$Au_n \rightarrow f \text{ in } V' \quad (2.11)$$

folgt  $Au = f$ .**Beweis des Lemmas von Minty:**(i) Sei  $w \in V$  beliebig. Wir setzen in (2.4)  $v = u - tw, t > 0$  ein. Wir erhalten

$$\langle f - A(u - tw), tw \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle f - A(u - tw), w \rangle \geq 0,$$

und damit für  $t \rightarrow 0$ 

$$\langle f - Au, w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in V.$$

Ersetzen wir  $w$  durch  $-w$ , so ergibt sich

$$\langle f - Au, w \rangle \leq 0 \quad \forall w \in V$$

und daher

$$\langle f - Au, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V.$$

(ii)  $A$  ist monoton, d.h.  $\forall v \in V, n \in \mathbb{N}$ , gilt

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle.$$

Aus (2.5) folgt  $\langle Av, u_n \rangle \rightarrow \langle Av, u \rangle$ , aus (2.7)  $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle f, u \rangle$ , aus (2.6) $\langle Au_n, v \rangle \rightarrow \langle f, v \rangle$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Daher gilt

$$0 \leq \langle f, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle f - Av, v \rangle = \langle f - Av, u - v \rangle.$$

Damit ist  $A$  maximal monoton und aus (i) folgt die Behauptung (ii).

(iii) Wir zeigen, dass (2.4) gilt:

$$\langle Au_n, u_n \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V. \quad (2.12)$$

Dann sind die Voraussetzungen von (ii) erfüllt und (iii) folgt. Wesentlich wird dabei die folgende Aussage sein:

Sei  $X$  ein Banachraum und  $x_n \rightarrow x$ . Dann gibt es eine Konstante  $c$ , so dass

$$\|x_n\|_X \leq c. \quad (2.13)$$

Wir nehmen jetzt an, (2.8) und (2.9) gelten.

Dann ist

$$\begin{aligned} |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| &\leq |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u_n \rangle| + |\langle f, u_n - u \rangle| \\ &= |\langle Au_n - f, u_n \rangle| + |\langle f, u_n - u \rangle| \\ &\leq \|Au_n - f\|_{V'} \|u_n\|_V + |\langle f, u_n - u \rangle|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null wegen (2.13), (2.8) und (2.9).  
Wir betrachten nun die Voraussetzungen (2.10) und (2.11) und schätzen folgendermaßen ab

$$\begin{aligned} |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u \rangle| &\leq |\langle Au_n, u_n \rangle - \langle Au_n, u \rangle| + |\langle Au_n, u \rangle - \langle f, u \rangle| \\ &= |\langle Au_n, u_n - u \rangle| + |\langle Au_n - f, u \rangle| \\ &\leq \|Au_n\|_{V'} \|u_n - u\|_V + |\langle Au_n - f, u \rangle|. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.13) folgt die Aussage. ■

Nun sind wir auch in der Lage, die Aussage (iv) von Lemma 5 zu beweisen: Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann ist  $A$  demistetig.

### Beweis von Aussage (iv) des Lemmas 5

Sei  $(u_n)_n$  eine konvergente Teilfolge in  $V$ ,  $u_n \rightarrow u$ . Da  $A$  monoton ist, ist die Folge  $(Au_n)_n$  beschränkt (Aussage (iii) des Lemmas 5). Daher gibt es eine schwach konvergente Teilfolge  $(Au_{n_k})$ ,  $Au_{n_k} \rightarrow f$  für  $k \rightarrow \infty$ . Die Voraussetzungen (2.10) und (2.11) sind damit für diese Teilfolge erfüllt und daher ist nach (iii) des Lemmas von Minty  $Au = f$ . Damit gilt  $Au_{n_k} \rightarrow Au$ . Wir überlegen nun, dass für die gesamte Folge  $u_n$  gilt, dass  $Au_n \rightarrow Au$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass alle schwach konvergenten Teilfolgen von  $(Au_n)$  zum gleichen Grenzwert konvergieren. Wir führen dies genauer aus.

Nehmen wir indirekt an, dass ein  $\hat{v} \in V$  existiert, so dass  $\langle Au_n - Au, \hat{v} \rangle \not\rightarrow 0$ . Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Teilfolge  $(u_{n_j})$  von  $(u_n)$ ,  $n_j = n_j(\varepsilon_0)$ , so dass

$$\langle Au_{n_j} - Au, \hat{v} \rangle > \varepsilon_0. \quad (2.14)$$

Da  $u_{n_j} \rightarrow u$  gibt es wiederum eine Teilfolge  $(u_{n_{j_i}})$  von  $(u_{n_j})$ , so dass  $Au_{n_{j_i}} \rightarrow Au$ . Für diese Teilfolge gilt ebenfalls (2.14) und damit haben wir einen Widerspruch erhalten. ■

### Hauptsatz von Browder und Minty

**Satz 23** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum mit einer abzählbaren Basis  $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ .

$A : V \rightarrow V'$  sei monoton, koerziv und hemistetig. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  von

$$Au = f. \quad (2.15)$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls  $A$  strikt monoton ist, dann ist die Lösung von (2.15) eindeutig bestimmt.

#### Beweis:

##### 1. Schritt: Galerkin Approximation

Sei  $V_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ .  $u_n = \sum_{k=1}^n c_k^n w_k$  ist Galerkin-Lösung, falls

$$\langle Au_n - f, w_k \rangle = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.16)$$

(2.16) kann geschrieben werden als

$$\langle A(\sum_{k=1}^n c_k^n w_k) - f, w_k \rangle = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n \quad (2.17)$$

und ist ein nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung eines Vektors  $\vec{c}^n = (c_1^n, \dots, c_n^n)^\top$ . Setzen wir

$$g_k(\vec{c}^n) = \langle A(\sum_{k=1}^n c_k^n w_k) - f, w_k \rangle,$$

dann lässt sich (2.17) schreiben als

$$\vec{g}(\vec{c}^n) = \vec{0}. \quad (2.18)$$

Da  $A$  monoton und hemistetig ist und damit nach Lemma 5 (iv) Demistetigkeit vorliegt, ist  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dies beruht auf der Tatsache, dass in endlich dimensionalen Räumen starke und schwache Konvergenz übereinstimmen.

Um die Lösbarkeit von (2.18) zu untersuchen, wenden wir den Satz von Brouwer für nichtlineare Gleichungssystem (Satz 12) an. Dazu müssen wir zeigen, dass es eine Konstante  $r = r(n)$  gibt, so dass gilt

$$\vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{c}^n \text{ mit } |\vec{c}^n| = r(n). \quad (2.19)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n &= \sum_{k=1}^n \langle Au_n - f, c_k^n w_k \rangle = \langle Au_n - f, u_n \rangle \\ &= \langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u_n \rangle. \end{aligned}$$

Da  $A$  koerziv ist, d.h.  $\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \rightarrow \infty$  für  $\|u\|_V \rightarrow \infty$ , gibt es ein  $R > 0$  so dass

$$\langle Au, u \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u\|_V \quad \text{für } \|u\|_V \geq R.$$

Wir betrachten jetzt  $\vec{c}^n$  mit

$$|\vec{c}^n| = r(n) = \frac{R}{k(n)},$$

wobei  $k(n)$  als folgende Normäquivalenzkonstante im endlichdimensionalen Raum zu wählen ist: Für  $u_n = \sum_{k=1}^n c_k^n w_k$  gilt

$$\|u_n\| = \left\| \sum_{k=1}^n c_k^n w_k \right\| \geq k(n) |\vec{c}^n|.$$

Damit ist  $\|u_n\| \geq R$ , falls  $|\vec{c}^n| = \frac{R}{k(n)}$  ist.

Daraus folgt

$$\langle Au_n, u_n \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u_n\|$$

und schließlich

$$\vec{g}(\vec{c}^n) \cdot \vec{c}^n = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle f, u_n \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'}) \|u_n\| - \|f\|_{V'} \|u_n\| = \|u_n\| \geq 0.$$

Satz 12 liefert die Existenz einer Lösung von (2.18) mit

$$|\vec{c}^{*n}| \leq r(n) = \frac{R}{k(n)}$$

und für das entsprechende  $u_n^* = \sum_{k=1}^n c_k^{*n} w_k$  gilt

$$\|u_n^*\|_V \leq k^*(n) |\vec{c}^{*n}| \leq R^*. \quad (2.20)$$

Damit haben wir die Existenz einer Galerkinlösung  $u_n = u_n^* \in V_n$  gezeigt.

**2.Schritt:** Beschränktheit von  $A(u_n)$

Lemma 5 (iii) sichert uns zunächst die lokale Beschränktheit, da  $A$  monoton ist, d.h. es gibt ein  $R_0 > 0$  und ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|v\|_V \leq R_0 \Rightarrow \|Av\|_{V'} \leq \delta. \quad (2.21)$$

Da  $\langle Au_n, u_n \rangle = \langle f, u_n \rangle$  ist, erhalten wir

$$|\langle Au_n, u_n \rangle| \leq \|f\|_{V'} \|u_n\| \stackrel{(2.20)}{\leq} \|f\|_{V'} R^*. \quad (2.22)$$

Nun ist  $\langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0$ , also

$$\langle Au_n, v \rangle \leq \langle Au_n, u_n \rangle + \langle Av, v \rangle - \langle Av, u_n \rangle.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|Au_n\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = R_0}} \frac{1}{R_0} \langle Au_n, v \rangle &\leq & \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = R_0}} \frac{1}{R_0} (\langle Av, v \rangle + \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle) \\ &\stackrel{(2.22)}{\leq} & \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\| = R_0}} \frac{1}{R_0} (\|Av\|_{V'} \|v\|_V + \|f\|_{V'} R^* + \|Av\|_{V'} R^*) \\ &\stackrel{(2.21), (2.22)}{\leq} & \delta + \|f\|_{V'} \frac{R^*}{R_0} + \delta \frac{R^*}{R_0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

**3.Schritt:** Konvergenz der Galerkin-Lösung

Wir wollen zeigen, dass eine Teilfolge  $u_{n_k}$  existiert, so dass

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{in } V, \quad (2.24)$$

$$Au_{n_k} \rightharpoonup f \quad \text{in } V', \quad (2.25)$$

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle_V \rightarrow \langle f, u \rangle_V. \quad (2.26)$$

Aus dem Lemma von Minty (ii) folgt  $Au = f$ . Wir betrachten die Folge der Galerkin-Lösungen  $(u_n)$ . Für  $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  gibt es ein  $n_0$ , so dass  $w \in V_{n_0}$ . Für  $n \geq n_0$  ist nach (2.16)

$$\langle Au_n, w \rangle = \langle f, w \rangle$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n. \quad (2.27)$$

Nun sind die Folgen  $(u_n)$  in  $V$  und  $(Au_n)$  in  $V'$  beschränkt. Wir bemerken, dass  $V'$  ebenfalls reflexiv ist. Daher finden wir eine Teilfolge  $(u_{n_k})$  von  $(u_n)$ , so dass

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \quad (2.28)$$

$$Au_{n_k} \rightharpoonup g \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

Wir überlegen, dass  $g = f$  ist.

Die Relationen (2.27) und (2.28) liefern für  $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, w \rangle = \langle f, w \rangle.$$

Die Relation (2.29) besagt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, w \rangle = \langle g, w \rangle.$$

Also ist  $\langle f-g, w \rangle = 0$  auf  $\cup_{n=1}^{\infty} V_n$ . Nach dem Satz von Hahn/Banach gilt auch  $\langle f-g, w \rangle = 0$  auf  $V = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$ . Schließlich gilt für die Galerkin-Lösungen

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle f, u_{n_k} \rangle$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f, u_{n_k} \rangle \stackrel{(2.28)}{=} \langle f, u \rangle.$$

#### 4.Schritt: Eigenschaften der Lösungsmenge

Sei  $f \in V'$  und  $M = \{u \in V : Au = f\}$ .  $M$  besitzt folgende Eigenschaften

(i)  $M \neq \emptyset$ .

(ii)  $M$  ist beschränkt.

Dies folgt aus der Koerzitivität von  $A$ . Falls  $M$  nicht beschränkt wäre, dann gäbe es für alle  $R > 0$  ein  $u \in M$  mit  $\|u\| \geq R > 0$ .

Wir haben jedoch (siehe 1.Schritt des Beweises)

$$0 = \langle Au, u \rangle - \langle f, u \rangle \geq (1 + \|f\|_{V'})\|u\| - \|f\|_{V'}\|u\| = \|u\| > 0.$$

(iii)  $M$  ist konvex.

Seien  $u_1$  und  $u_2 \in M$ . Wir zeigen, dass auch die Konvexkombination  $w = tu_1 + (1-t)u_2, 0 \leq t \leq 1$  aus  $M$  ist.

Sei  $v \in V$ . Aus der Monotonie von  $A$  folgt:

$$\begin{aligned} \langle f - Av, w - v \rangle &= \langle f - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t+1-t)v \rangle \\ &= \langle f - Av, t(u_1 - v) \rangle + \langle f - Av, (1-t)(u_2 - v) \rangle \\ &= t\langle Au_1 - Av, (u_1 - v) \rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Minty (i) folgt, dass  $Aw = f$  ist.

(iv)  $M$  ist abgeschlossen.

Sei  $(u_n)$  eine konvergente Folge in  $M$ , d.h.  $u_n \rightarrow u, Au_n = f$ . Wir müssen zeigen, dass  $Au = f$  ist.

Es ist für ein beliebiges  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle f - Av, u - v \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f - Av, u_n - v \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir wenden wieder das Lemma von Minty (i) an und erhalten  $f = Au$ .

(v) Eindeutigkeit

$A$  sei strikt monoton. Dann besteht  $M$  aus genau einem Element (Übung!).

■

## 2.3 Der Nemyckii-Operator

Wir wollen den Hauptsatz über monotone Operatoren auf quasilineare Differentialgleichungen (linear in den höchsten Ableitungen) anwenden. Quasilineare Differentialgleichungen 2.Ordnung sind z.B.

$$Au(x) = -\operatorname{div} \vec{a}(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.30)$$

Zu diesen gehört auch die  $p$ -Laplace Gleichung ( $c = 0$ )

$$Au(x) = -\operatorname{div} (|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) + cu(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.31)$$

Fügen wir noch eine Dirichlet-Randbedingung hinzu

$$u(x) = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

so können wir schwache Formulierungen einführen:

Gesucht ist ein  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) = V$ , so dass

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (\vec{a}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v) dx = \langle f, v \rangle \quad (2.32)$$

bzw.

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx = \langle f, v \rangle \quad (2.33)$$

für alle  $v \in V$  ist.

Zunächst müssen wir garantieren, dass die Integrale in (2.32) und (2.33) für ein  $u \in V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  wohl definiert sind. Dazu muss  $\vec{a}$  gewissen Wachstumsbedingungen genügen (siehe auch (1.50)). Um dies zu beschreiben führt man den **Nemyckii-Operator**  $F : X \rightarrow Y$  als Abbildung des Funktionenraumes  $X$  in den Funktionenraum  $Y$  für eine gegebene Funktion  $f$  ein:

$$(F\vec{u})(x) := f(x, \vec{u}(x)) \quad (2.34)$$

$$\vec{u} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.35)$$

Wir erläutern das etwas genauer:

Wir bezeichnen mit  $X_g = X_g(A, B)$  die Menge gewisser Abbildungen  $g : A \rightarrow B$ .  $X_g$  kann ein Funktionenraum sein, z.B.  $X_g = L_p(\Omega, \mathbb{R}) = \{g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |g|^p dx < \infty\}$ .

Wir betrachten nun die Abbildungen

$$u : A \rightarrow B, \quad u \in X_u = X_u(A, B),$$

$$x \rightarrow u(x)$$

$$f : A \times B \rightarrow C, \quad f \in X_f = X_f(A \times B, C),$$

$$(x, u(x)) \rightarrow f(x, u(x)).$$

Der von  $f$  induzierte Nemyckii-Operator  $F$  (auch Überlagerungsoperator genannt) wird wie folgt eingeführt:

$$F : X_u \rightarrow X_{F(u)}, \quad F \in X_F = X_F(X_u, X_{F(u)}),$$

$$u \rightarrow f(\cdot, u(\cdot)) = F(u)$$

$$F(u) : A \rightarrow C, \quad F(u) \in X_{F(u)} = X_{F(u)}(A, C),$$

$$x \rightarrow F(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Die Verbindung zu den Gleichungen (2.33) und (2.34) wird durch die Wahl von  $X = X_u$ ,  $Y = X_{F(u)}$ ,  $A = \Omega$ ,  $B = \mathbb{R}^n$ ,  $C = \mathbb{R}$  realisiert. Wie die Räume  $X$ ,  $Y$  und  $X_F$  aussehen, wird jetzt diskutiert.

Wir nehmen an, dass  $f$  der Carathéodory-Bedingung und einer Wachstumsbedingung genügt:

**Carathéodory-Bedingung (C):**

$f(\cdot, \vec{\eta}) : x \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist messbar auf  $\Omega$  für alle  $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ .

$f(x, \cdot) : \vec{\eta} \rightarrow f(x, \vec{\eta})$  ist stetig auf  $\mathbb{R}^n$  für fast alle  $x \in \Omega$ .

**Wachstumsbedingung (W):**

$$|f(x, \vec{\eta})| \leq |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{\frac{p_i}{q}}, \quad b > 0, a \in L^q(\Omega), 1 \leq p_i, q < \infty, i = 1, \dots, n.$$

**Lemma 7**  $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  genüge den Bedingungen (C) und (W). Dann ist der Nemyckii-Operator (2.34)

$$F : \Pi_{i=1}^n L^{p_i}(\Omega) = X \rightarrow L^q(\Omega) = Y$$

wohl definiert, stetig und beschränkt. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$\|F\vec{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq c(\|a\|_{L^q(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}^{\frac{p_i}{q}}).$$

Damit ist  $F \in C(\Pi_{i=1}^n L^{p_i}(\Omega), L^q(\Omega)) = X_F(X, Y) = C(X, Y)$ .

**Beweis:**

Wir beschränken uns auf den Fall  $n = 1$ ,  $u = u_1$ ,  $p = p_1$ .

**1. Messbarkeit von  $Fu$**

Da  $u \in L^p(\Omega)$  ist, ist die Funktion  $x \rightarrow u(x)$  Lebesgue-messbar auf  $\Omega$ . Daher gibt es eine Folge  $(u_n)_n$  von Treppenfunktionen mit

$$u_n \rightarrow u \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Es folgt

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) \stackrel{(C)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, u_n(x)).$$

Die Abbildungen  $x \rightarrow f(x, u_n(x))$  sind messbar und der Grenzwert messbarer Funktionen ist messbar.

**2. Beschränktheit von  $F$** 

Sei  $u \in L^p(\Omega)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|Fu\|_{L^q(\Omega)}^q &= \int_{\Omega} |f(x, u(x))|^q dx \\ &\stackrel{(W)}{\leq} \int_{\Omega} (|a(x)| + b|u(x)|^{\frac{p}{q}})^q dx \\ &\leq c \int_{\Omega} (|a(x)|^q + b^q |u(x)|^p) dx \\ &\leq \hat{c} (\|a\|_{L^q(\Omega)}^q + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p). \end{aligned}$$

Damit bildet  $F : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  ab.

**3. Stetigkeit von  $F$** 

Wir betrachten eine konvergente Folge in  $L^p(\Omega)$ ,  $u_n \xrightarrow{L^p(\Omega)} u$ . Wir müssen zeigen, dass

$$F(u_n) \xrightarrow{L^q(\Omega)} F(u).$$

Es existiert ein Teilfolge  $(u_{n_k})$ , die f.ü. in  $\Omega$  punktweise konvergiert.

Aus (C) folgt, dass

$$Fu_{n_k}(x) \rightarrow Fu(x) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Können wir zeigen, dass  $|g_{n_k}(x)| = |Fu_{n_k}(x) - Fu(x)|^q \leq h_{n_k}(x)$  für fast alle  $x \in \Omega$  und

$$\int_{\Omega} h_{n_k}(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} h(x) dx \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

dann gilt nach dem Lebegueschen Satz über die majorisierte Konvergenz, dass  $g_{n_k} \xrightarrow{L^1(\Omega)} 0$ , d.h.  $Fu_{n_k} \xrightarrow{L^q(\Omega)} Fu$  konvergiert.

Es ist

$$\begin{aligned} |g_{n_k}(x)| &= |Fu_{n_k}(x) - Fu(x)|^q = |f(x, u_{n_k}(x)) - f(x, u(x))|^q \\ &\leq c(|a(x)|^q + b^q |u_{n_k}(x)|^p + |f(x, u(x))|^q) =: h_{n_k}(x). \end{aligned}$$

■

**Bemerkung:**

Betrachten wir partielle Differentialgleichungen, z.B. (2.31), dann ist der Nemyckii-Operator vektorwertig und  $\vec{u}$  durch  $\nabla u$  zu ersetzen

$$\vec{F}(\nabla u(x)) = \vec{a}(x, \nabla u(x)) = |\nabla u|^{p-2} \nabla u.$$

Die Wachstumsbedingung für  $\vec{a}$  lautet dann

$$|\vec{a}(x, \eta)| \leq |\vec{a}(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta_i|^{\frac{p_i}{q}}.$$

### Die $p$ -Laplace Gleichung

Wir wenden den Satz von Browder und Minty an, um die Lösbarkeit des folgenden Randwertproblems zu untersuchen,  $1 < p < \infty$ ,  $s \geq 0$ :

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.36)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.37)$$

Der Operator  $A(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$  wird  $p$ -Laplace-Operator genannt. Für  $p = 2$  erhalten wir den Laplace-Operator.  $\Omega$  sei ein beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega$  sei Lipschitz-stetig. Wir wählen als kanonischen Raum  $V = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ . Die schwache Formulierung von (2.36) und (2.37) lautet:

Für  $f \in V'$  finde ein  $u \in V$ , so dass

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + suv) \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.38)$$

Wir überzeugen uns, dass  $A : V \rightarrow V'$  wohl definiert ist.

**Lemma 8** Sei  $p > \frac{2n}{n+2}$  für  $s > 0$  und  $p > 1$  für  $s = 0$ . Dann ist  $A : V \rightarrow V'$ ,  $V = \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$ .

#### Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall  $s = 0$ .

Es ist für  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle| &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^{(p-1)q} \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{q = \frac{p}{p-1}}{=} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq c(u) \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für  $s > 0$  müssen wir nur den Term

$$\int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$$

betrachten. Wir zitieren dazu den Multiplikationssatz für Funktionen aus Sobolevräumen [8, S.26]):

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet, das einer Kegelbedingung genügt:  $m, h, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $p, q, r \geq 1$  seien reelle Zahlen, so dass

$$\frac{m+h+k}{n} > \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$

Weiterhin sei  $\frac{np}{n-hp} \geq r$ , falls  $hp < n$  und  $\frac{nq}{n-kq} \geq r$ , falls  $kq < n$ . Dann gilt für  $u \in W^{m+h,p}(\Omega)$  und  $v \in W^{m+k,q}(\Omega)$ , dass  $uv \in W^{m,r}(\Omega)$  ist, und es gibt eine von  $u$  und  $v$  unabhängige Konstante  $C$ , so dass

$$\|uv\|_{m,r} \leq C \|u\|_{m+h,p} \|v\|_{m+k,q}. \quad (2.39)$$

Setzen wir  $m = 0, h = k = r = 1, p = q$ , dann erhalten wir für  $p > \frac{2n}{n+2}$

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

■

Wir zeigen jetzt, dass  $A : V \rightarrow V'$  den Voraussetzungen des Satzes von Browder und Minty genügt.

**Lemma 9** Die Voraussetzungen von Lemma 8 seien erfüllt. Der durch (2.36) definierte Operator  $A : V \rightarrow V', V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ , ist strikt monoton, koerziv und stetig.

**Beweis:**

**1.Schritt:**  $A$  ist strikt monoton.

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx + s \int_{\Omega} |u - v|^2 \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\vec{g}(\vec{p}(x)) - \vec{g}(\vec{q}(x))) \cdot [\vec{p}(x) - \vec{q}(x)] \, dx \end{aligned} \quad (2.40)$$

für  $\nabla u(x) = \vec{p}(x), \nabla v(x) = \vec{q}(x), \vec{g}(\vec{\eta}) = |\vec{\eta}|^{p-2} \vec{\eta}$ .

Wir sehen uns den Integranden von (2.40) an.

Es ist

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{p}) - \vec{g}(\vec{q}) &= \int_0^1 \frac{d}{d\tau} [\vec{g}(\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q}))] \, d\tau \\ &= \int_0^1 D\vec{g}(\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q}))(\vec{p} - \vec{q}) \, d\tau \end{aligned}$$

mit

$$D\vec{g} = (|\vec{\eta}|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2)|\vec{\eta}|^{p-4} \eta_i \eta_j)_{i,j}.$$

Damit wird

$$[\vec{g}(\vec{p}) - \vec{g}(\vec{q})] \cdot [\vec{p} - \vec{q}] = \int_0^1 \underbrace{D\vec{g}(\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q}))}_{\vec{\eta}} \underbrace{(\vec{p} - \vec{q})}_{\vec{y}} \cdot (\vec{p} - \vec{q}) \, d\tau.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} D\vec{g}(\vec{\eta})\vec{y} \cdot \vec{y} &= |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 + (p-2)|\vec{\eta}|^{p-4} (\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2 \\ &= |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 \left(1 + (p-2) \frac{(\vec{\eta} \cdot \vec{y})^2}{|\vec{y}|^2 |\vec{\eta}|^2}\right) \\ &\geq |\vec{\eta}|^{p-2} |\vec{y}|^2 \min(1, p-1). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [\vec{g}(\vec{p}) - \vec{g}(\vec{q})] \cdot (\vec{p} - \vec{q}) &\geq c|\vec{p} - \vec{q}|^2 \int_0^1 |\vec{q} + \tau(\vec{p} - \vec{q})|^{p-2} \, d\tau \\ &> 0 \quad \text{für } \vec{p} \neq \vec{q} \end{aligned}$$

und  $\langle Au - Av, u - v \rangle > 0$  für  $u \neq v$ .

### 2. $A$ ist koerziv

Es ist

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^p + s|u|^2 \, dx \geq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \geq c\|u\|_V^p$$

und damit

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_V} \geq c\|u\|_V^{p-1} \rightarrow \infty \quad \text{für } \|u\|_V \rightarrow \infty \text{ und } p > 1.$$

### 3. $A$ ist stetig

Sei  $(u_k)$  eine konvergente Folge in  $V$ ,  $u_k \xrightarrow{V} u$ . Wir zeigen, dass  $Au_k \rightarrow Au$  in  $V'$  konvergiert. Dazu wenden wir Lemma 7 auf den Nemyckii-Operator

$$\vec{F}(\nabla u(x)) = \vec{F}(\vec{p})(x) = |\vec{p}(x)|^{p-2} \vec{p}(x)$$

an. Da  $\vec{F}(\vec{p}) = |\vec{p}|^{p-2} \vec{p}$  stetig ist (für  $\vec{p} = \vec{0}$  stetig durch  $\vec{0}$  ergänzt) gilt die Bedingung (C) und es ist die Bedingung (W) zu prüfen:

$$|\vec{F}(\vec{p})| = |\vec{f}(\vec{p})| = |\vec{p}|^{p-1} = |\vec{p}|^{\frac{p}{q}} \quad \text{für } q = \frac{p}{p-1}.$$

Die Voraussetzungen von Lemma 7 sind erfüllt und

$$\vec{F} : [L^p(\Omega)]^n \rightarrow [L^q(\Omega)]^n,$$

ist wohl definiert, stetig und beschränkt, d.h.

$$\vec{F}(\nabla u_k) \rightarrow \vec{F}(\nabla u) \quad \text{in } [L^q(\Omega)]^n \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Weiterhin gilt

$$v \in [\mathring{W}^{1,p}(\Omega)] = V \subset L^2(\Omega) \quad \text{für } p > \frac{2n}{n+2}.$$

Wir erhalten für ein  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au_k - Au, v \rangle &= \int_{\Omega} [\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)] \cdot \nabla v \, dx + s \int_{\Omega} (u_k - u)v \, dx \\ &\leq c \|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} \|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^n} + s \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} \|\nabla v\|_{[L^p(\Omega)]^n} + s \|u_k - u\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|Au_k - Au\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V=1}} |\langle Au_k - Au, v \rangle| \\ &\leq c (\|\vec{F}(\nabla u_k) - \vec{F}(\nabla u)\|_{[L^q(\Omega)]^n} + \|u_k - u\|_V) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz 24** Sei  $p > \frac{2n}{n+2}$  für  $s > 0$  und  $p > 1$  für  $s = 0$ . Dann besitzt das schwach formulierte Dirichletproblem für den  $p$ -Laplace-Operator (2.36) eine eindeutig bestimmte Lösung  $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Omega)$  für jedes  $f \in V'$ .

## 2.4 Pseudomonotone Operatoren und der Satz von Brézis

Bei quasilinearen Differentialgleichungen können auch Terme niedriger Ordnung auftreten, die nicht monoton sind. Sehen wir uns z.B. das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

an, wobei  $s < 0$  ist.

Um auch solche Probleme behandeln zu können, wurde der Begriff des pseudomonotonen Operators eingeführt. Typische Beispiele sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei  $A_1 : V \rightarrow V'$  ein monotoner, hemistetiger und  $A_2 : V \rightarrow V'$  ein stark stetiger (und damit kompakter) Operator ist. Man spricht auch von kompakter Störung von  $A_1$  durch  $A_2$ .

Die Pseudomonotonie eines Operators ist eine Abschwächung der Monotonie in Verbindung mit der Hemistetigkeit. Ziel ist, auch hier einen Hauptsatz, den Satz von Brézis (1986), zu beweisen:

**Satz 25 (Satz von Brézis)** *Sei  $A : V \rightarrow V'$  ein pseudomonotoner, beschränkter, koerziver Operator, der einen reflexiven, reellen Banachraum  $V$  mit abzählbarer Basis in  $V'$  abbildet. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  der Gleichung*

$$Au = f.$$

Um den Begriff der Pseudomonotonie verständlich zu machen, erinnern wir an einige wichtige Eigenschaften von monotonen, hemistetigen Operatoren, siehe Lemma 5, Lemma von Minty.

- $A$  monoton und hemistetig  $\Rightarrow A$  demistetig  $\Rightarrow A$  ist lokal beschränkt.
- $A$  monoton und hemistetig

$$\left. \begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{in } V \\ Au_n &\rightarrow f && \text{in } V' \\ \langle Au_n, u_n \rangle_V &\rightarrow \langle f, u \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow Au = f \quad (2.41)$$

Kurz: Falls  $A$  monoton und hemistetig ist, dann gilt die Bedingung (M). Die Aussage (2.41) wird jetzt modifiziert.

**Definition 7 (Aussage  $\hat{M}$ )** *Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $A : V \rightarrow V'$ .  $A$  genügt der Aussage ( $\hat{M}$ ), falls aus*

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } V, \quad (2.42)$$

$$Au_n \rightarrow f \quad \text{in } V', \quad (2.43)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle f, u \rangle \quad (2.44)$$

folgt, dass  $Au = f$  ist.

Wir zeigen, dass die Aussage  $\hat{M}$  invariant unter kompakten Störungen ist.

**Lemma 10** *Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ ,  $B : V \rightarrow V'$ . Dann gilt*

- Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann genügt  $A$  der Aussage ( $\hat{M}$ ).*
- Wenn  $A$  der Aussage ( $\hat{M}$ ) genügt und  $B$  ein stark stetiger Operator ist, dann genügt auch  $A + B$  der Aussage ( $\hat{M}$ ).*

**Beweis:**

- (i) Die Aussage (i) ist eine Variante der Aussage (ii) des Lemmas 6 von Minty. Der Beweis verläuft ähnlich. Sei  $(u_n)$  eine Folge aus  $V$ , für die (2.42), (2.43) und (2.44) gelten. Da  $A$  monoton ist, haben wir

$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle - \langle Av, u_n \rangle - \langle Au_n - Av, v \rangle.$$

Wir bilden den  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup$  und erhalten wegen (2.42), (2.43) und (2.44)

$$0 \leq \langle f, u \rangle - \langle Av, u \rangle - \langle f - Av, v \rangle = \langle f - Av, u - v \rangle.$$

Damit ist  $A$  maximal monoton und aus dem Lemma 6 von Minty (i) folgt  $Au = f$ .

- (ii) Für  $u_n \rightharpoonup u$  gilt  $Bu_n \rightarrow Bu$  in  $V'$ . Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle Bu_n, u_n \rangle - \langle Bu, u \rangle| &= |\langle Bu_n - Bu, u_n \rangle + \langle Bu, u_n \rangle - \langle Bu, u \rangle| \\ &\leq \|Bu_n - Bu\| \|u_n\| + |\langle Bu, u_n - u \rangle| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Somit gilt  $Au_n + Bu_n \rightharpoonup f + Bu = g$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n + Bu_n, u_n \rangle \stackrel{(2.45)}{\leq} \langle f + Bu, u \rangle = \langle g, u \rangle.$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n \rangle \leq \langle g - Bu, u \rangle$$

und

$$\begin{aligned} Au &= g - Bu \\ Au + Bu &= g. \end{aligned}$$

Damit gilt die Eigenschaft  $(\hat{M})$  auch für  $A + B$ . ■

**Definition 8** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum,  $A : V \rightarrow V'$ .  $A$  ist pseudomonoton, falls aus

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } V, \quad (2.46)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \langle Au_n, u_n - u \rangle_V \leq 0, \quad (2.47)$$

folgt

$$\langle Au, u - v \rangle_V \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \langle Au_n, u_n - v \rangle_V \quad \forall v \in V. \quad (2.48)$$

Wir betrachten Beispiele und Eigenschaften von pseudomonotonen Operatoren.

**Lemma 11** Sei  $V$  ein reeller reflexiver Banachraum,  $A, B : V \rightarrow V'$ . Es gilt

- Wenn  $A$  monoton und hemistetig ist, dann ist  $A$  pseudomonoton.
- Wenn  $A$  stark stetig ist, dann ist  $A$  pseudomonoton.
- Wenn  $A$  und  $B$  pseudomonoton sind, dann ist  $(A + B)$  pseudomonoton.
- Wenn  $A$  pseudomonoton ist, dann genügt  $A$  der Aussage  $(\hat{M})$ .
- Wenn  $A$  pseudomonoton und lokal beschränkt ist, dann ist  $A$  demistetig.

**Beweis:**

(a) Sei  $(u_n)$  eine Folge, so dass (2.46) und (2.47) gelten. Da  $A$  monoton ist, erhalten wir

$$\langle Au_n - Au, u_n - u \rangle \geq 0$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au, u_n - u \rangle \stackrel{(2.46)}{=} 0.$$

Zusammen mit (2.47) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = 0. \quad (2.49)$$

Sei  $v \in V$  beliebig. Wir setzen  $w = u + t(v - u)$ ,  $t > 0$ . Aus der Monotonie von  $A$  folgt

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Aw, u_n - (u + t(v - u)) \rangle &\geq 0 \\ t \langle Au_n, u - v \rangle &\geq -\langle Au_n, u_n - u \rangle + \langle Aw, u_n - u \rangle + t \langle Aw, u - v \rangle. \end{aligned}$$

(2.46) und (2.49) liefern uns

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} t \langle Au_n, u_n - v \rangle &\geq t \langle Aw, u - v \rangle \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle &\geq \langle A(u + t(v - u)), u - v \rangle. \end{aligned}$$

Da  $A$  hemistetig ist, gilt für  $t \rightarrow 0^+$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \geq \langle Au, u - v \rangle.$$

(2.48) ist erfüllt und  $A$  ist pseudomonoton.

(b)  $A$  sei stark stetig, d.h.  $u_n \rightarrow u$  und  $Au_n \rightarrow Au$  in  $V'$ . Analog zu (2.45) erhalten wir  $\langle Au_n, u_n \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle$ . Damit haben wir für ein beliebiges  $v \in V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle = \langle Au, u - v \rangle,$$

d.h. (2.48) gilt.

(c) Wir müssen zeigen: Falls  $u_n \rightarrow u$  in  $V$  und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - u \rangle_V \leq 0, \quad (2.50)$$

dann gilt

$$\langle (A + B)u, u - v \rangle_V \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle (A + B)u_n, u_n - v \rangle_V. \quad (2.51)$$

Wir überlegen uns zunächst, dass aus (2.50)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0, \quad (2.52)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq 0 \quad (2.53)$$

folgt. Wir nehmen an, dass (2.52) nicht gilt, d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle = a > 0.$$

Dann folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq -a.$$

Die Pseudomonotonie von  $B$  liefert

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle. \quad (2.54)$$

Für  $v = u$  erhalten wir aus (2.54)

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - u \rangle \leq -a,$$

was zu einem Widerspruch führt.

Da  $A$  und  $B$  pseudomonoton sind, folgt aus (2.52) und (2.53) für einen beliebigen  $v \in V$

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \quad (2.55)$$

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Bu_n, u_n - v \rangle. \quad (2.56)$$

Addition von (2.55) und (2.56) führt zur Ungleichung (2.51).

(d) Sei  $(u_n)$  eine Folge, für die (2.42), (2.43) und (2.44) gelten. Wir müssen zeigen, dass  $Au = f$  ist.

Aus (2.43) und (2.44) folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq \langle f, u \rangle - \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u \rangle = 0.$$

Die Pseudomonotonie von  $A$  besagt, dass für  $v \in V$

$$\begin{aligned} \langle Au, u - v \rangle &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - v \rangle \stackrel{(2.44)}{\leq} \langle f, u \rangle - \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, v \rangle \\ &\stackrel{(2.43)}{=} \langle f, u \rangle - \langle f, v \rangle = \langle f, u - v \rangle. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ersetzen wir  $v$  durch  $2u - v$ , dann ist

$$\langle Au, v - u \rangle = -\langle Au, u - v \rangle \leq -\langle f, u - v \rangle,$$

also

$$\langle Au, u - v \rangle \geq \langle f, u - v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.58)$$

Aus (2.57) folgt

$$\langle Au, u - v \rangle = \langle f, u - v \rangle$$

und damit

$$Au = f.$$

(e) Wir zeigen die Densitatigkeit von  $A$ , d.h.

$$u_n \xrightarrow{V} u \Rightarrow Au_n \xrightarrow{V'} Au. \quad (2.59)$$

Aus der lokalen Beschränktheit folgt, dass  $(Au_n)$  beschränkt ist. Daher gibt es eine Teilfolge  $(Au_{n_k})$  mit  $Au_{n_k} \rightarrow f$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u \rangle = 0. \quad (2.60)$$

Die Pseudomonotonie von  $A$  besagt, dass aus (2.59) und (2.60) folgt

$$\langle Au, u - v \rangle \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - v \rangle = \langle f, u - v \rangle.$$

Wie oben können wir schließen, dass  $Au = f$  ist, d.h.  $Au_{n_k} \rightarrow Au$  für  $k \rightarrow \infty$ . Dies gilt für beliebige konvergente Teilfolgen  $(Au_{n_k})$  und daher erhalten wir  $Au_n \xrightarrow{V'} Au$ . ■

### Beweis des Satzes von Brézis

Wir beweisen jetzt den Hauptsatz über pseudomonotone Operatoren.

**Satz 26** Sei  $A : V \rightarrow V'$  ein pseudomonotoner, beschränkter, koerziver Operator, der einen reflexiven, reellen Banachraum  $V$  mit abzählbarer Basis in  $V'$  abbildet. Dann existiert für alle  $f \in V'$  eine Lösung  $u \in V$  der Gleichung

$$Au = f.$$

#### Beweis:

Wir folgen den Beweisschritten des Satzes von Browder und Minty.

##### 1.Schritt: Galerkin Approximation

Da nach Lemma 11 beschränkte, pseudomonotone Operatoren demistetig sind, erhalten wir die Existenz einer Folge  $(u_n)$  von Galerkinlösungen, die gleichmäßig beschränkt sind.

##### 2.Schritt:

Die Beschränktheit von  $(Au_n)_n$  folgt unmittelbar aus der Voraussetzung.

##### 3.Schritt: Konvergenz des Galerkinverfahren

Aus der Reflexivität von  $V$  bzw.  $V'$  folgt, dass die beschränkten Folgen  $(u_n)_n$  und  $(Au_n)_n$  schwach konvergente Teilfolgen enthalten. Es kann aus diesen eine Teilfolge  $(u_{n_k})_k$  gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} u_{n_k} &\rightharpoonup u \quad \text{in } V \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \\ Au_{n_k} &\rightharpoonup g \quad \text{in } V' \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen wie im 3.Schritt des Beweises des Satzes von Browder und Minty liefern  $g = f$  und schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Die Aussage  $(\hat{M})$ , die nach Lemma 11 d) gilt, führt auf

$$Au = f.$$

■

### Beispiele:

Wir betrachten das Dirichletproblem

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + g(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (2.61)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.62)$$

Hierbei sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . Wir führen den Raum  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  ein und geben eine schwache Formulierung von (2.61) und (2.62) an: Sei

$$\langle A_1 u, v \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.63)$$

$$\langle A_2 u, v \rangle = \int_{\Omega} g(u) v \, dx. \quad (2.64)$$

Für ein  $f \in V'$  ist ein  $u \in V$  gesucht, so dass

$$\langle A_1 u, v \rangle + \langle A_2 u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.65)$$

Damit das Integral (2.64) wohl definiert ist, d.h.  $g : \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ , müssen wir gewisse Wachstumsbedingungen an  $g$  stellen.

Lemma 7 garantiert:

Falls  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist und die Abschätzung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{p-1}) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (2.66)$$

gilt, dann bildet  $g : L^p(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  ab und

$$\|g(u)\|_{L^q(\Omega)} \leq c(1 + \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}) \leq c(1 + \|u\|_V^{p-1})$$

Eigentlich brauchen wir aber nur, dass  $A_2 : V \rightarrow V'$ . Wir wollen überlegen, ob das durch allgemeinere Wachstumsbedingungen der Form (2.66) gesichert ist.

**Lemma 12** Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ .  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine stetige Funktion, die der Wachstumsbedingung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}), \quad 1 < r < \infty, \quad (2.67)$$

genügt.

Ist  $1 < p < n$ , dann fordern wir zusätzlich  $r < \frac{np}{n-p}$ . Für  $p \geq n$  kann  $r \in (1, \infty)$  gewählt werden. Dann bildet  $A_2 : V$  in  $V'$  ab und ist beschränkt. Außerdem ist  $A_2$  stark stetig.

### Beweis:

Wir erinnern zunächst an Einbettungssätze für Sobolevräume ([1, S.144]):

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p < n, 1 \leq \alpha < \frac{np}{n-p}, \quad (2.68)$$

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p = n, 1 \leq \alpha < \infty, \quad (2.69)$$

$$\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} C(\overline{\Omega}) \subset L^\alpha(\Omega) \quad \text{für } p > n, 1 \leq \alpha < \infty. \quad (2.70)$$

Wir zeigen jetzt, dass  $A_2 : V \rightarrow V'$  beschränkt ist.

**1.Fall:**  $p < n, r < \frac{np}{n-p}$

Es ist

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v \rangle| &\leq c \int_{\Omega} |1 + |u|^{r-1}| |v| \, dx \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} c \left[ \int_{\Omega} |v| \, dx + \left( \int_{\Omega} |u|^{(r-1)r'} \, dx \right)^{\frac{1}{r'}} \left( \int_{\Omega} |v|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right] \\ &\leq c [\|v\|_V + \|u\|_{L^r(\Omega)}^{r-1} \|v\|_{L^r(\Omega)}] \\ &\stackrel{(2.68), \alpha=r}{\leq} c [1 + \|u\|_V^{r-1}] \|v\|_V. \end{aligned}$$

**2.Fall:**  $p \geq n$ .

Wir gehen analog vor und benutzen die Einbettungen (2.69) und (2.70).

Wir überlegen nun, warum  $A_2$  stark stetig ist.

Sei  $(u_n)_n$  eine schwach konvergente Folge in  $V$ ,  $u_n \rightharpoonup u$ . Wir müssen zeigen, dass die Bildfolge  $(Au_n)_n$  stark in  $V'$  konvergiert. Aufgrund der kompakten Einbettungen (2.68), (2.69) und (2.70) existiert eine Teilfolge  $(u_{n_k})$ , die in  $L^r(\Omega)$  stark konvergiert

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } V \\ u_{n_k} &\rightarrow u \quad \text{in } L^r(\Omega). \end{aligned}$$

Nach Lemma 7 ist der zu  $g$  gehörige Nemyckii-Operator  $F : L^r(\Omega) \rightarrow L^{r'}(\Omega)$  wohl definiert, stetig und beschränkt (man setze dort  $p_i = r$ ,  $q = r'$ ,  $\frac{p_i}{q} = r - 1$ ). Daher gilt

$$\|F(u_{n_k} - F(u))\|_{L^{r'}(\Omega)} = \|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{L^{r'}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \|A_2(u_{n_k}) - A_2(u)\|_{V'} &= \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} |\langle A_2(u_{n_k}) - A_2(u), v \rangle| \\ &\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \int_{\Omega} |g(u_{n_k}) - g(u)| |v| \, dx \\ &\leq \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \|g(u_{n_k}) - g(u)\|_{L^{r'}(\Omega)} |v|_{L^r(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert  $A_2(u_{n_k}) \rightarrow A_2(u)$  in  $V'$ .

Diese Argumentation gilt für alle Teilfolgen  $(u_{n_k})$  mit  $u_{n_k} \rightarrow u$  in  $L^r$ . Es folgt

$$A_2(u_n) \rightarrow A_2(u).$$

■

Somit haben wir gezeigt, dass  $A_1 + A_2$  pseudomonoton ist. Wir wollen jetzt den Satz von Brézis anwenden, um die Existenz einer schwachen Lösung des Randwertproblems von (2.61), (2.62) nachzuweisen.

**Lemma 13** *Seien die Voraussetzungen von Lemma 12 erfüllt und gelte zusätzlich die Bedingung für  $g$*

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty, \quad (2.71)$$

dann existiert eine schwache Lösung  $u \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  des Randwertproblems (2.65).

**Beweis:**

Wir müssen nur noch zeigen, dass aus der Voraussetzung (2.71) die Koerzivität von  $(A_1 + A_2) : V \rightarrow V'$  folgt. Es ist

$$\frac{\langle (A_1 + A_2)u, u \rangle}{\|u\|_V} \geq \frac{\langle A_1 u, u \rangle}{\|u\|_V} - \frac{c_0}{\|u\|_V} \stackrel{\text{Friedrichs}}{\geq} c_1 \|u\|_V^{p-1} - \frac{c_0}{\|u\|_V} \rightarrow \infty$$

für  $\|u\|_V \rightarrow \infty$ .

■

**Bemerkung:**

Die Bedingung (2.71) kann durch andere Bedingungen ersetzt werden (Übung).

**2.Beispiel:**

Wir betrachten noch einmal das Dirichletproblem für die stationären Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\nu \Delta \vec{u} + \nabla \vec{u} \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.72)$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.73)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (2.74)$$

Hierbei ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$ . Die Gleichungen (2.72) und (2.73) beschreiben eine stationäre Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Die Randbedingung (2.74) besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{u}$  am Rand verschwindet (eventuell Subtraktion einer gegebenen Geschwindigkeit).  $\nabla \vec{u} \vec{u}$  wird auch als Wirbelterm bezeichnet.

Wir setzen

$$V = \{ \vec{u} \in \dot{W}^{1,2}(\Omega)^n : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \}, \quad (2.75)$$

versehen mit der Norm

$$\|\vec{u}\|_V := \|\nabla \vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}} \quad (2.76)$$

Um die Eindeutigkeit des Druckfeldes zu gewährleisten, betrachten wir  $p \in L^2(\Omega)$  mit  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$ .

Da für  $\vec{v} \in V$  gilt

$$\langle \nabla p, \vec{v} \rangle := - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} \, dx = 0,$$

lautet die schwache Formulierung von (2.72), (2.73), (2.74):

Finde ein  $\vec{u} \in V$ , so dass

$$\int_{\Omega} \nu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} (\nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{v}) \, dx = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall v \in V, \quad (2.77)$$

bzw. abgekürzt

$$\langle A_1 \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle \quad \forall v \in V.$$

Wir überlegen uns, dass der Raum  $V$ , definiert durch (2.75) und (2.76) ein reflexiver Banachraum ist. Dazu ist nur das folgende Lemma zu zeigen.

**Lemma 14** Der Raum  $V$  ist ein abgeschlossener Teilraum von  $[\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n$ .

**Beweis:**

Sei  $(\vec{u}_n)_n \in V$  und  $\vec{u}_n \rightarrow \vec{u}$  in  $[\overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)]^n$ . Insbesondere konvergiert

$$\nabla \vec{u}_n \rightarrow \nabla \vec{u} \quad \text{in } [L^2(\Omega)]^{n \times n}.$$

Daher gibt es eine Teilfolge  $\vec{u}_{n_k}$  mit

$$\nabla \vec{u}_{n_k} \rightarrow \nabla \vec{u} \quad \text{f.ü für } k \rightarrow \infty.$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(\nabla \vec{u}_{n_k}(x)) = \text{tr}(\nabla \vec{u}(x)) = \text{div } \vec{u}(x) \quad \text{f.ü.}$$

Daher ist  $\vec{u} \in V$ . ■

Wir haben uns schon früher (Lemmata 8, 12) überzeugt, dass

$$A_1 + A_2 : V \rightarrow V'$$

wohl definiert ist. Weiterhin gilt, dass  $A_1 : V \rightarrow V'$  linear, stetig, koerziv und strikt monoton ist ( $\nu > 0$ , Lax-Milgram).

Wir sehen uns jetzt an, ob  $A_2 : V \rightarrow V'$  pseudomonoton und beschränkt ist.

**Lemma 15** Der Operator  $A_2 : V \rightarrow V'$  ist stark stetig und beschränkt.

**Beweis:**

a) Beschränktheit:

Wir hatten bereits überlegt (1.18), dass

$$\begin{aligned} \langle A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle &\leq \int_{\Omega} |\vec{u}|_{\mathbb{R}^n} |\nabla \vec{u}|_{\mathbb{R}^n \times n} |\vec{v}|_{\mathbb{R}^n} \, dx \leq \left( \int_{\Omega} |\vec{u}|^4 \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} |\vec{v}| \, dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|\nabla \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\vec{v}\|_V = c \|\vec{u}\|_V^2 \|\vec{v}\|_V, \end{aligned}$$

da  $V \subset [L^4(\Omega)]^3$  ist. Damit ist  $A_2$  beschränkt.

b) Starke Stetigkeit

Nach (2.68) und (2.69) ist  $V \overset{c}{\subset} [L^4(\Omega)]^n$ ,  $n = 2, 3$ . Sei  $(\vec{u}_k)_k$  eine schwach konvergente Folge in  $V$

$$\vec{u}_k \overset{V}{\rightharpoonup} \vec{u}.$$

Die kompakte Einbettung von  $V$  in  $[L^4(\Omega)]^n$  sichert, dass eine in  $[L^4(\Omega)]^n$  konvergente Teilfolge existiert:

$$\vec{u}_{k_l} \overset{[L^4(\Omega)]^n}{\rightarrow} \vec{u}. \quad (2.78)$$

Da die weitere Argumentation für alle in  $[L^4(\Omega)]^n$  konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir die obige Teilfolge wiederum mit  $(\vec{u}_k)$ .

Wir müssen zeigen

$$A_2 \vec{u}_k \overset{V'}{\rightarrow} A_2 \vec{u},$$

d.h.

$$\|A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}\|_{V'} = \sup_{\substack{\vec{v} \in V \\ \|\vec{v}\|=1}} |\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v} \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (2.79)$$

Wir beweisen (2.79) indirekt, indem wir annehmen (2.79) gelte nicht. Dann gibt es ein  $\varepsilon_0 > 0$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine Element  $\vec{v}_k \in V$  mit  $\|\vec{v}_k\| = 1$ , so dass

$$|\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v}_k \rangle| \geq \varepsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.80)$$

Da die Folge  $(\vec{v}_k)$  in  $V$  beschränkt ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge, die in  $[L^4(\Omega)]^n$  gegen  $\vec{v}$  konvergiert. Die bezeichnen wir wiederum mit  $(\vec{v}_k)$ . Für diese Teilfolge gilt

$$\begin{aligned} |\langle A_2 \vec{u}_k - A_2 \vec{u}, \vec{v}_k \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}_k \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k - \nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{v}_k) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (\nabla \vec{u}_k (\vec{u}_k - \vec{u}) \cdot \vec{v}_k + \nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot (\vec{v}_k - \vec{v}) + \nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v}) dx \right| \\ &\leq c \underbrace{\|\vec{u}_k - \vec{u}\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\rightarrow 0 (2.78)} \underbrace{\|\nabla \vec{u}_k\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\|\vec{v}_k\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\text{beschränkt}} \\ &\quad + \|\vec{u}\|_{[L^4(\Omega)]^n} \underbrace{\|\nabla \vec{u}_k - \nabla \vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^{n \times n}}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\|\vec{v}_k - \vec{v}\|_{[L^4(\Omega)]^n}}_{\rightarrow 0} \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} \underbrace{\nabla (\vec{u}_k - \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{v}}_{\rightarrow 0 \text{ schw. Konvergenz}} dx \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu (2.80). ■

**Satz 27** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand  $\partial\Omega$

$$V = \{\vec{u} \in [W^{1,2}(\Omega)]^n : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}.$$

Dann gibt es zu jedem  $f \in V'$  eine schwache Lösung  $u \in V$  des Dirichletproblems (2.77).

**Beweis:**

Der Operator  $(A_1 + A_2) : V \rightarrow V'$  ist beschränkt und pseudomonoton, wie wir bereits gezeigt haben. Wir müssen daher nur noch überlegen, dass  $(A_1 + A_2)$  koerziv ist. Es ist

$$\begin{aligned} \langle A_2 \vec{u}, \vec{u} \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{u} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot (\nabla \vec{u})^\top \vec{u} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \vec{u} \cdot \vec{u} \\ \partial_{x_2} \vec{u} \cdot \vec{u} \\ \partial_{x_3} \vec{u} \cdot \vec{u} \end{pmatrix} dx \\ &= \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \\ \partial_{x_2} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \\ \partial_{x_3} \frac{|\vec{u}|^2}{2} \end{pmatrix} dx = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{u} \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx = 0. \end{aligned}$$

Aus der Koerzivität von  $A_1$  folgt damit die Koerzivität von  $(A_1 + A_2)$ . ■

**Bemerkung:**

Satz 27 sichert die Existenz eines Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{u} \in V$ .

Nun gehen wir zum größeren Raum  $\tilde{V} = [W^{1,2}(\Omega)]^n$  über. Wir erhalten für  $\tilde{v} \in \tilde{V}$  die folgende Relation für gegebenes  $\vec{u}$ :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \tilde{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla u u \cdot \tilde{v} \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{v} \, dx = \langle \vec{f}, \tilde{v} \rangle$$

und

$$- \int_{\Omega} p \operatorname{div} \tilde{v} \, dx =: \langle F, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}. \quad (2.81)$$

Aus (2.81) folgt, dass

$$\nabla p = F$$

im Distributionensinn ist und  $p$  bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Wie vorn erwähnt, wird durch die Zusatzbedingung  $\int_{\Omega} p \, dx = 0$  die Eindeutigkeit von  $p$  gesichert.

## 2.5 Maximal monotone Operatoren

Wir hatten maximal monotone Operatoren in Lemma 7 (Lemma von Minty) folgendermaßen eingeführt:

Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $A : V \rightarrow V'$ .  $A$  ist maximal monoton, falls folgende Aussage gilt: Für ein  $u \in V$  und ein  $f \in V'$  sei

$$\langle f - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Dann folgt  $Au = f$ .

Weiterhin hatten wir im Lemma von Minty gezeigt:

Ist  $A$  monoton und hemistetig, dann ist  $A$  maximal monoton.

Wir wollen jetzt auch unstetige Operatoren betrachten. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der keine "echte" monotone Erweiterung besitzt. Eine solche Erweiterung kann mehrdeutig sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

**Beispiel**

Sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, aber unstetig, siehe Abbildung 2.2,

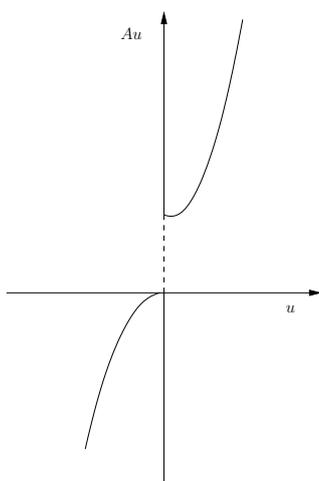
$$Au := \begin{cases} -u^2, & \text{für } u < 0, \\ u^2 + 2, & \text{für } u \geq 0. \end{cases}$$

Wir überlegen, dass  $A$  nicht maximal monoton ist. Dazu wählen wir  $f = 1, u = 0$ . Es ist

$$\langle 1 - Av, -v \rangle = \begin{cases} (1 + v^2)|v| \geq 0 & \text{für } v < 0, \\ (1 - v^2 - 2)(-v) = v^2 + v \geq 0 & \text{für } v \geq 0, \end{cases}$$

aber  $f = 1 \neq Au = 2$ . Der Wertebereich von  $A$  ist zu klein. Eine monotone Erweiterung lautet:

$$Au := \begin{cases} -u^2, & \text{für } u < 0, \\ [0, 2], & \text{für } u = 0, \\ u^2 + 2, & \text{für } u > 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Abbildung 2.2: Die Abbildung  $A$ 

Um zu zeigen, dass diese Erweiterung maximal monoton ist, müssen wir zunächst mehrdeutige Abbildungen einführen und auf diese die Definition der maximalen Monotonie ausdehnen.

**Definition 9** Seien  $M$  und  $Y$  Mengen,  $2^Y$  die Potenzmenge von  $Y$  und  $A : M \rightarrow 2^Y$  eine Abbildung. Dann sind

$$D(A) = \{u \in M : Au \neq \emptyset\} \quad (2.83)$$

der effektive Definitionsbereich,

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \quad (2.84)$$

der Wertebereich und

$$G(A) = \{(u, v) \in M \times Y : u \in D(A), v \in Au\} \quad (2.85)$$

der Graph von  $A$ .

In unserem Beispiel sind  $D(A) = \mathbb{R}$  und  $R(A) = \mathbb{R}$ .

### Bemerkung:

(i) Die inverse Abbildung  $A^{-1} : Y \rightarrow 2^M$  ist definiert durch

$$A^{-1}(v) = \{u \in M : v \in A(u)\}.$$

Es gilt  $D(A^{-1}) = R(A)$ ,  $R(A^{-1}) = D(A)$ ,  $(u, v) \in G(A) \Leftrightarrow (v, u) \in G(A^{-1})$ .

(ii) Seien  $X$  und  $Y$  lineare Räume über dem Körper  $K$  und  $M \subseteq X$ . Wir betrachten zwei Abbildungen  $A, B : M \rightarrow 2^Y$  und definieren die Linearkombination für feste  $\alpha, \beta \in K$ :

$$(\alpha A + \beta B)(u) := \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu, & \text{für } u \in D(A) \cap D(B), \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Für mehrdeutige Abbildungen können Monotonie und maximale Monotonie folgendermaßen eingeführt werden:

**Definition 10** Sei  $V$  ein reflexiver, reeller Banachraum und  $M \subseteq V$  eine Teilmenge. Die Abbildung  $A : M \rightarrow 2^{V'}$  ist

- **monoton**, falls

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall (u, u^*), (v, v^*) \in G(A)$$

- **maximal monoton**, falls  $A$  monoton ist und für  $(u, u^*) \in M \times V'$  mit der Eigenschaft

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall (v, v^*) \in G(A)$$

folgt, dass  $(u, u^*) \in G(A)$  ist.

Ist  $A : D(A) \subset V \rightarrow V'$  ein Operator (eindeutig), dann kann er als spezielle mehrdeutige Abbildung von  $V \rightarrow 2^{V'}$  aufgefasst werden, indem man

$$Au := \begin{cases} \{Au\}, & \text{für } u \in D(A), \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

setzt. Die obige Definition stimmt dann mit der ursprünglichen Definition überein.

Es wird als Übung empfohlen zu prüfen, ob die im Beispiel konstruierte Erweiterung (2.82) maximal monoton ist.

Klassische Beispiele für maximal monotone Operatoren sind Subdifferenziale, die den Ableitungsbegriff für konvexe Funktionen verallgemeinern. Wir wiederholen zunächst, was wir unter konvexen Funktionen verstehen und welche Aussagen für deren Ableitungen gelten.

## Konvexe Funktionen

Wir beginnen mit der Definition einer konvexen Teilmenge eines linearen Raumes  $V$ .

**Definition 11** Sei  $V$  ein linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen. Eine Teilmenge  $C \subseteq V$  heißt *konvex*, wenn für alle  $u, v \in C$  und für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt, dass

$$\lambda u + (1 - \lambda)v \in C.$$

Anschaulich bedeutet das, dass alle Punkte einer Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten aus der Menge  $C$  auch in dieser Menge liegen.

Wir definieren jetzt, was wir unter einer konvexen Abbildung (Funktional) verstehen.

**Definition 12** Eine Abbildung  $F : C \subseteq V \rightarrow \mathbb{R}$  ist

(i) *konvex auf der konvexen Menge  $C$* , wenn für alle  $\lambda \in (0, 1)$  und für alle  $u, v \in C$  gilt

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v),$$

(ii) *strikt konvex auf  $C$* , wenn für alle  $\lambda \in (0, 1)$  und für alle  $u, v \in C, u \neq v$  gilt

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v).$$

Anschaulich bedeutet das, dass kein Punkt der Verbindungsstrecke von zwei Punkten  $\{u, F(u)\}, \{v, F(v)\}$  des Graphen unterhalb des Graphen von  $F$  liegt.

## Konvexitätskriterien im $\mathbb{R}^n$

Die Konvexität von reellen Funktionen mehrerer reeller Variablen kann mit Hilfe von Ableitungen charakterisiert werden.

**Satz 28** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene, konvexe Menge und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f(u) - f(v) \geq \nabla f(v) \cdot (u - v). \quad (2.86)$$

**Beweis:**

a)  $f$  sei konvex. Wir betrachten

$$g(\tau) = f(\tau u + (1 - \tau)v).$$

Die Konvexitätsungleichung lautet:

$$g(\tau) \leq \tau g(1) + (1 - \tau)g(0) \quad \forall \tau \in (0, 1).$$

Daraus folgt

$$\tau g(1) \geq g(\tau) - g(0) + \tau g(0)$$

und

$$g(1) \geq \frac{g(\tau) - g(0)}{\tau} + g(0).$$

Aus der Differenzierbarkeit von  $f$  erhalten wir

$$g'(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{g(\tau) - g(0)}{\tau} = \nabla f(v) \cdot (u - v) \leq g(1) - g(0) = f(u) - f(v).$$

b) Es gelte  $f(u) - f(v) \geq \nabla f(v) \cdot (u - v)$  für alle  $u, v \in C$ . Wir betrachten  $w = \lambda u + (1 - \lambda)v \in C$  für ein beliebiges  $\lambda \in (0, 1)$ . Dann ist

$$f(u) - f(w) \geq \nabla f(w) \cdot (u - w). \quad (2.87)$$

$$f(v) - f(w) \geq \nabla f(w) \cdot (v - w). \quad (2.88)$$

Multiplizieren wir (2.87) mit  $\lambda$  und (2.88) mit  $(1 - \lambda)$  und addieren beide Gleichungen, dann erhalten wir

$$\lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) - f(w) \geq \nabla f(w) \cdot (\lambda(u - w) + (1 - \lambda)(v - w)) = \nabla f(w) \cdot (\lambda u + (1 - \lambda)v - w) = 0.$$

Durch Umordnen folgt

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

■

Beachten wir, dass  $\nabla f : C \subseteq \mathbb{R}^n = V \rightarrow \mathbb{R}^n = V'$ , dann können wir die Konvexität von  $f$  auch folgendermaßen charakterisieren:

**Satz 29** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene und konvexe Menge und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow \nabla f \text{ ist monoton auf } C. \quad (2.89)$$

**Beweis:**

a)  $f$  sei konvex. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &\geq \nabla f(v) \cdot (u - v) \\ f(v) - f(u) &\geq \nabla f(u) \cdot (v - u). \end{aligned}$$

Addition der beiden Ungleichungen liefert

$$(\nabla f(u) - \nabla f(v)) \cdot (u - v) \geq 0.$$

b) Sei  $\nabla f$  monoton auf  $C$ . Für feste, aber beliebige  $u, v \in C$  gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(u) - f(v) = \nabla f(w) \cdot (u - v), \quad (2.90)$$

wobei  $w = v + \alpha(u - v)$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$  ist. Wir wollen zeigen, dass

$$f(u) - f(v) \geq \nabla f(v) \cdot (u - v).$$

gilt. Dazu nutzen wir die Monotonie von  $\nabla f$  aus:

$$(\nabla f(w) - \nabla f(v)) \cdot (w - v) = (\nabla f(w) - \nabla f(v)) \cdot \alpha(u - v) \geq 0.$$

Einsetzen von (2.90) in die rechte Seite liefert

$$\alpha(f(u) - f(v)) \geq \alpha \nabla f(v) \cdot (u - v),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Weiterhin gilt:

**Satz 30** Sei  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene und konvexe Menge und  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  sei zweimal stetig differenzierbar.

$$f \text{ ist konvex auf } C \Leftrightarrow \text{die Hessematrix } \nabla^2 f \text{ ist auf } C \text{ positiv semidefinit.} \quad (2.91)$$

## Konvexitätskriterien in Banachräumen

Sei  $F$  eine Abbildung eines reellen Banachraumes  $V$  in die Menge der reellen Zahlen,  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Um die obigen Konvexitätskriterien übertragen zu können, müssen wir Ableitungen von  $F$  einführen, die Fréchet- und die Gâteaux-Ableitung.

### Definition 13 (Richtungsableitung, Gâteauxableitung)

Seien  $X, Y$  Banachräume,  $F : U \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in U$ ,  $h \in X$ . Es existiere eine Umgebung  $U(x_0) \subset U$  von  $x_0$ .  $F$  besitzt im Punkt  $x_0$  eine Ableitung in Richtung  $h$ , falls die Funktion

$$\begin{aligned} g : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} &\rightarrow Y, \quad \varepsilon > 0, \\ g(t) &:= F(x_0 + th) \end{aligned}$$

in  $t = 0$  differenzierbar ist, d.h.

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + th) - F(x_0)}{t} = \delta F(x_0, h) \in Y \quad (2.92)$$

wohl definiert ist. Falls  $\delta F(x_0, h)$  für alle  $h \in X$  existiert und die Abbildung

$$D_G F(x_0) : X \rightarrow Y, h \mapsto \delta F(x_0, h),$$

stetig und linear ist, dann heißt  $F$  im Punkt  $x_0$  Gâteaux-differenzierbar und  $D_G F(x_0)$  ist die Gâteauxableitung von  $F$  im Punkt  $x_0$ .

**Bemerkung:**

Die Relation (2.92) kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$F(x_0 + th) - F(x_0) = \delta F(x_0, h)t + o(t).$$

**Definition 14 (Fréchetableitung)**

Seien  $X, Y$  Banachräume,  $F : U \subset X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \in U$ . Es existiere eine Umgebung  $U(x_0) \subset U$  von  $x_0$ .  $F$  ist im Punkt  $x_0$  Fréchet-differenzierbar, wenn eine stetige, lineare Abbildung  $A : X \rightarrow Y$  existiert, so dass

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + o(\|h\|) \quad \text{für } h \rightarrow 0. \quad (2.93)$$

$A = DF(x_0)$  wird als Fréchetableitung von  $F$  an der Stelle  $x_0$  bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen Gâteaux- und Fréchetableitung wird durch folgenden Satz beschrieben:

**Satz 31** Seien  $X, Y$  Banachräume,  $F : U \subset X \rightarrow Y$ .

- (i) Ist  $F$  im Punkt  $x_0$  Fréchet-differenzierbar, dann ist  $F$  im Punkt  $x_0$  Gâteaux-differenzierbar.
- (ii) Ist  $F$  Gâteaux-differenzierbar in einer Umgebung  $U(x_0)$  und ist  $D_GF(x)$  stetig in  $x_0$ , dann ist  $F$  Fréchet-differenzierbar in  $x_0$ .

**Beweis:**

(i) Setze in (2.93)  $h = t\tilde{h}$ , wobei  $\tilde{h}$  fest, aber beliebig ist.

(ii) Wir betrachten  $g(\tau) = F(x_0 + \tau h)$ . Es ist

$$g'(\tau) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\tau + t) - g(\tau)}{t} = \delta F(x_0 + \tau h, h).$$

Weiterhin gilt

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(\tau) d\tau = \int_0^1 \delta F(x_0 + \tau h, h) d\tau$$

und

$$\begin{aligned} \|g(1) - g(0) - g'(0)\| &= \left\| \int_0^1 (\delta F(x_0 + \tau h, h) - \delta F(x_0, h)) d\tau \right\| \\ &= \int_0^1 \|(D_GF(x_0 + \tau h) - D_GF(x_0))h\| d\tau \\ &\leq \int_0^1 \|(D_GF(x_0 + \tau h) - D_GF(x_0))\| \|h\| d\tau \\ &= o(\|h\|), \end{aligned}$$

da  $D_GF$  stetig in  $x_0$  ist. Es folgt

$$\|g(1) - g(0) - g'(0)\| = \|F(x_0 + h) - F(x_0) - D_GF(x_0)h\|_Y = o(\|h\|)$$

und damit ist  $D_GF(x_0) = DF(x_0)$ . ■

**Beispiel**

Sei  $X$  ein Hilbertraum,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $F(u) = \|u\|^2$ . Wir berechnen die Gâteauxableitung. Es ist:

$$\begin{aligned} g(t) &= F(u_0 + th) = (u_0 + th, u_0 + th) \\ g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(u_0 + th, u_0 + th) - u(u_0, u_0)}{t} = 2(u_0, h) = \delta F(u_0, h). \end{aligned}$$

Der Darstellungssatz für stetige lineare Funktional über Hilberträumen liefert:

$$D_G F(u_0) = 2u_0.$$

Aus Satz 31 folgt, dass die Fréchetableitung existiert und mit der Gâteauxableitung übereinstimmt.

Die Konvexitätskriterien (2.86),(2.89) können auf Gâteaux-differenzierbare Funktionale  $F : C \subseteq V \rightarrow \mathbb{R}$  übertragen werden. Dabei ist

$$\nabla f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n = V', \quad u \rightarrow \nabla f(u)$$

zu ersetzen durch

$$D_G F : C \subseteq V \rightarrow V', \quad u \rightarrow D_G F(u).$$

Weiterhin wird  $\nabla f(u) \cdot v$  ersetzt durch  $\langle D_G F(u), v \rangle = \delta F(u, v)$ . Ein entsprechender Mittelwertsatz, wie in Satz 29 benutzt, gilt ebenfalls ([3], S.25, Theorem 1.3-3c).

Wir formulieren das Ergebnis:

**Satz 32** Sei  $V$  ein reeller Banachraum,  $C \subseteq V$  eine offene, konvexe Menge und  $F : C \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  eine in  $C$  Gâteaux-differenzierbare Abbildung, so dass  $D_G F$  stetig ist. Dann gilt

$$F \text{ ist konvex} \Leftrightarrow F(u) - F(v) \geq \langle D_G F(v), (u - v) \rangle, \quad \forall u, v \in C \Leftrightarrow D_G F \text{ ist monoton auf } C. \quad (2.94)$$

## Subdifferenziale

Die Ungleichung (2.94) kann durch Vertauschen von  $u$  und  $v$  auch so geschrieben werden:

$$F(v) \geq F(u) + \langle D_G F(u), v - u \rangle.$$

Existiert die Gâteauxableitung nicht, dann wird an ihrer Stelle ein Subgradient und schließlich ein Subdifferential durch folgende Definition eingeführt:

**Definition 15** Sei  $V$  ein reeller Banachraum und  $F : V \rightarrow [-\infty, \infty]$  ein Funktional auf  $V$ . Ein Element  $u^* \in V'$  heißt Subgradient von  $F$  an der Stelle  $u \in V$  genau dann, wenn  $F(u) \neq \pm\infty$  und

$$F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.95)$$

Die Menge aller Subgradienten von  $F$  an der Stelle  $u$  heißt Subdifferential und wird mit  $\partial F(u)$  bezeichnet. Falls an der Stelle  $u$  kein Subgradient existiert, dann wird  $\partial F(u) = \emptyset$  gesetzt.

## Beispiele

1) Wir betrachten  $F = f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a > 0, b > 0$ .

$$f(u) := \begin{cases} -bu, & \text{für } u \leq 0, \\ au & \text{für } u > 0 \end{cases}$$

Durch Fallunterscheidungen bekommt man heraus, dass

$$\partial f(u) := \begin{cases} \{-b\}, & \text{für } u < 0, \\ \{a\} & \text{für } u > 0 \\ [-b, a] & \text{für } u = 0 \end{cases}$$

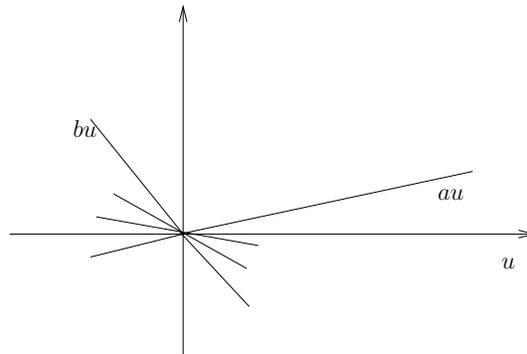


Abbildung 2.3: Subgradienten für das 1. Beispiel

Der Präfix "Sub" bedeutet,  $\partial f(u)$  ist die Menge aller Anstiege von Geraden, die durch  $(u, f(u))$  gehen und vollständig unter dem Graphen von  $f$  liegen.

2) Wir betrachten die klassische konvexe Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(u) = u^2$ . Die Ungleichung (2.95) lautet

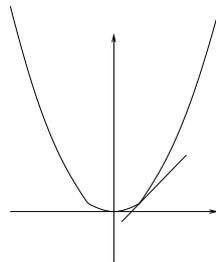
$$v^2 \geq u^2 + u^*(v - u),$$

woraus

$$(v - u)(v + u) \geq u^*(v - u)$$

folgt. Ist  $v > u$ , dann wird  $(v + u) \geq u^*$ . Ist  $v < u$ , dann ist  $(v + u) \leq u^*$ . Damit muss  $u^* = 2u$  sein. Wir erhalten das erwartete Ergebnis:

$$\partial f(u) = \{2u\}.$$

Abbildung 2.4: Subgradient an  $u^2$ 

3) Wir betrachten einen Hilbertraum  $V$  und das Funktional  $F : V \rightarrow \mathbb{R}, F(u) = \|u\|^2$ . Die Ungleichung (2.95) lautet

$$(v, v) \geq (u, u) + (u^*, v - u) \quad \forall v \in V.$$

Für  $u^* = 2u$  erhalten wir

$$(v, v) + (u, u) - 2(u, v) = (u - v, u - v) \geq 0,$$

d.h.  $2u$  ist Subgradient. Wir vermuten, dass  $\partial F(u) = \{2u\}$  ist. Der folgende Satz bestätigt dies.

**Satz 33** (Ružička, S.91)

Sei  $V$  ein reeller Banachraum und  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional. Dann gilt

(i) Falls  $F$  konvex ist und eine Gâteauxableitung  $D_G F$  im Punkt  $u$  besitzt, dann ist

$$\partial F(u) = \{D_G F(u)\}.$$

(ii) Falls  $\partial F : V \rightarrow V'$  hemistetig und eindeutig ist, dann ist  $F$  Gâteaux-differenzierbar und

$$\partial F(u) = \{D_G F(u)\}$$

gilt für alle  $u \in V$ .

**Beweis:**

(i) Sei  $h \in V$  beliebig. Wir betrachten  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = F(u + th).$$

$g$  ist eine konvexe Funktion, da  $F$  konvex ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} g((1-\tau)t_1 + \tau t_2) &= F(u + ((1-\tau)t_1 + \tau t_2)h) \\ &= F((1-\tau + \tau)u + (1-\tau)t_1 h + \tau t_2 h) \\ &= F((1-\tau)(u + t_1 h) + \tau(u + t_2 h)) \\ &\leq (1-\tau)F(u + t_1 h) + \tau F(u + t_2 h) \\ &= (1-\tau)g(t_1) + \tau g(t_2). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für  $t_1 = 0, t_2 = 1$

$$g(\tau) = (1-\tau)g(0) + \tau g(1). \quad (2.96)$$

$F$  ist Gâteaux-differenzierbar, d.h.  $g'(0)$  existiert. Ähnlich wie im Beweis von Satz 28 erhalten wir

$$g'(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{g(\tau) - g(0)}{\tau} \stackrel{(2.96)}{\leq} \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{(1-\tau)g(0) + \tau g(1) - g(0)}{\tau} = g(1) - g(0).$$

Damit ist

$$g(1) - g(0) = F(u + h) - F(u) \geq \lim_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{F(u + \tau h) - F(u)}{\tau} = \langle D_G F(u), h \rangle. \quad (2.97)$$

Setzen wir  $h = v - u$ , dann folgt aus (2.97)

$$F(v) \geq F(u) + \langle D_G F(u), v - u \rangle$$

und  $D_G F(u)$  ist Subgradient.

Sei nun  $u^* \in \partial F(u)$ . Dann gilt für  $v = u + \tau h, h \in V, \tau > 0$

$$F(u + \tau h) - F(u) \geq \langle u^*, \tau h \rangle$$

und

$$\frac{F(u + \tau h) - F(u)}{\tau} \geq \langle u^*, h \rangle.$$

Da  $F$  Gâteaux-differenzierbar ist, folgt

$$\langle D_G F(u), h \rangle \geq \langle u^*, h \rangle.$$

Ersetzen wir  $h$  durch  $-h$ , dann ist

$$\langle D_G F(u), h \rangle \leq \langle u^*, h \rangle.$$

Da  $h \in V$  beliebig war, folgt  $D_G F(u) = u^*$  und

$$\partial F(u) = \{D_G F(u)\}.$$

(ii)  $\partial F : V \rightarrow V'$  sei hemistetig und  $\partial F(u) = \{u^*\}$ . Aus der Definition des Subdifferentials (2.95) folgt für  $v = u + \tau h$

$$F(u + \tau h) - F(u) \geq \langle \partial F(u), \tau h \rangle, \quad (2.98)$$

$$F(u) - F(u + \tau h) \geq -\langle \partial F(u + \tau h), \tau h \rangle. \quad (2.99)$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \langle \partial F(u), h \rangle &\stackrel{(2.98)}{\leq} \liminf_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{F(u + \tau h) - F(u)}{\tau} \\ &\leq \limsup_{\tau \rightarrow 0_+} \frac{F(u + \tau h) - F(u)}{\tau} \\ &\stackrel{(2.99)}{\leq} \limsup_{\tau \rightarrow 0_+} \langle \partial F(u + \tau h), h \rangle \stackrel{\text{hemistetig}}{=} \langle \partial F(u), h \rangle. \end{aligned}$$

Alle Ungleichheitszeichen können durch Gleichheitszeichen ersetzt werden. Daher existiert  $D_G F(u)$  und befindet sich in  $\partial F(u)$ . Wegen der Eindeutigkeit gilt

$$\{u^*\} = \{D_G F(u)\} = \partial F(u).$$

■

## Subdifferential und Minimierer

Wir erinnern, dass für Funktionen mehrerer Variablen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  die Existenz eines Minimums folgendermaßen beschrieben werden kann:

**n=1**

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ ist Minimierer von } f(x), x \in I.$$

**n > 1**

$$\nabla f(x_0) = 0, \nabla^2 f(x_0) \text{ positiv semidefinit} \implies x_0 \text{ ist Minimierer von } f(x), x \in \Omega.$$

Gilt die zweite Bedingung für alle  $x \in \Omega$  und ist  $\Omega$  konvex, dann liegt eine konvexe Funktion vor.

Für Funktionale  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  kann man die Existenz eines Minimierers mit Hilfe des Subdifferentials charakterisieren:

**Satz 34** (Ružička, S.90)

Sei  $V$  ein reeller Banachraum,  $F : V \rightarrow (-\infty, \infty]$  und  $F \not\equiv \infty$ . Dann ist  $u \in V$  eine Lösung des Minimierungsproblems

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v)$$

genau dann, wenn

$$0 \in \partial F(u).$$

**Beweis:**

a) Sei  $0 \in \partial F(u)$ . Aus der Definition des Subgradienten folgt

$$F(v) - F(u) \geq \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in V, \forall u^* \in \partial F(u).$$

Für  $u^* = 0$  erhalten wir

$$F(v) \geq F(u) \quad \forall v \in V,$$

d.h.  $u$  ist ein Minimierer.

b) Es gelte  $F(u) \leq F(v)$  für alle  $v \in V$ . Da  $F \neq \infty$  ist

$$F(v) - F(u) \geq 0 = \langle 0, v - u \rangle,$$

d.h.  $0 \in \partial F(u)$ . ■

Wir wollen nun untersuchen, wann ein Funktional auf einer abgeschlossenen konvexen Teilmenge  $C$  eines reflexiven Banachraumes  $V$  sein Minimum annimmt, d.h. wann  $0 \in \partial F(u)$  ist. Dazu benötigen wir den Begriff *Unterhalbstetigkeit* eines Funktionals.

**Definition 16** Das Funktional  $F : C \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  ist unterhalbstetig in  $u_0 \in C$ , falls

$$F(u_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$$

für alle Folgen  $(u_n)_n, u_n \in C$ , mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$ .

Außerdem definieren wir die Koerzivität eines Funktionals folgendermaßen:

**Definition 17** Das Funktional  $F : C \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  ist koerziv, falls  $\lim_{u \in C, \|u\| \rightarrow \infty} F(u) = \infty$ . Ist die Menge  $C$  beschränkt, dann entfällt diese Aussage.

Nun formulieren wir einen Satz über die Existenz eines Minimums eines Funktionals:

**Satz 35** Sei  $C$  eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes  $V$ . Das Funktional  $F : C \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  sei konvex, unterhalbstetig und koerziv auf  $C$ . Dann besitzt  $F$  in  $C$  ein Minimum.

**Beweis:**

Wir nehmen an, dass  $F \neq \infty$  ist. Sei  $u_n \in C$  eine Minimalfolge von  $F$ , d.h.

$$F(u_n) \rightarrow \inf_{v \in C} F(v) \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Minimalfolge muss aufgrund der Koerzivität beschränkt sein. Daher existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(u_{n_k})_k$

$$u_{n_k} \rightharpoonup u_0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Es gilt folgender Satz [6] S.177, [2] S.239 :

*Eine konvexe Menge  $C$  eines Banachraumes  $V$  ist genau dann bezüglich der starken Topologie abgeschlossen, wenn sie bezüglich der schwachen Topologie abgeschlossen ist.*

Damit ist  $u_0$  aus  $C$ . Weiterhin folgt aus diesem Satz, dass eine Folge

$$(v_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j u_{n_k})_j, \quad c_k^j \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1, \quad N_j \in \mathbb{N},$$

existiert, die stark gegen  $u_0$  konvergiert,

$$v_j \rightarrow u_0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty. \quad (2.100)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  fest, aber beliebig. Dann gilt für  $k \geq k_0$

$$F(u_{n_k}) \leq \inf_{v \in C} F(v) + \varepsilon$$

und aus der Konvexität von  $F$  folgt

$$F(v_j) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j F(u_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j (\inf_{v \in C} F(v) + \varepsilon) = \inf_{v \in C} F(v) + \varepsilon.$$

Die Beziehung (2.100) und die Unterhalbstetigkeit von  $F$  liefern:

$$F(u_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F(v_j) \leq \inf_{v \in C} F(v) + \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $F(u_0) = \inf_{v \in C} F(v)$ , d.h. das Minimum wird in  $C$  angenommen. ■

### Subdifferential der Indikatorfunktion

Wir wollen jetzt das Subdifferential der Indikatorfunktion einer konvexen Menge betrachten und zeigen, dass es maximal monoton ist.

#### Definition 18 (Indikatorfunktion von $C$ )

Sei  $V$  ein reeller Banachraum und  $C \subseteq V$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Die Indikatorfunktion  $\chi$  von  $C$ ,  $\chi : V \rightarrow \mathbb{R}$ , ist

$$\chi(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } u \in C, \\ \infty & \text{für } u \in V \setminus C. \end{cases}$$

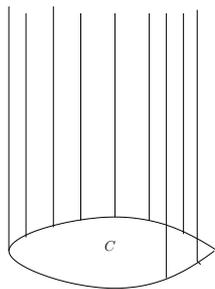


Abbildung 2.5: Indikatorfunktion von  $C$

Weiterhin benötigen wir den Begriff eines Trägerfunktionals einer konvexen Menge  $C$ .

#### Definition 19 (Trägerfunktional von $C$ im Punkt $u \in V$ )

Sei  $V$  ein reeller Banachraum und  $C \subseteq V$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Das Funktional  $u^* \in V'$  heißt Trägerfunktional von  $C$  im Punkt  $u \in V$ , falls

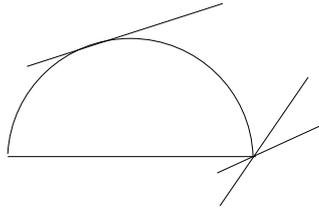
$$\langle u^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \quad (2.101)$$

**Bemerkung:**

- (i)  $u^* = 0$  ist stets Trägerfunktional.  
(ii) Für  $u^* \neq 0$  beschreibt

$$H(u, u^*) = \{v \in V : \langle u^*, u \rangle = \langle u^*, v \rangle\}$$

eine Hyperebene. Diese Ebene wird auch Stützebene an  $C$  im Punkt  $u \in \partial C$  genannt. Die Ungleichung (2.101) besagt, dass  $C$  auf einer Seite der Stützebene liegt. Stützebenen sind im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Abbildung 2.6: Stützebenen an  $C$ 

Zwischen der Indikatorfunktion und dem Trägerfunktional gibt es eine Verbindung.

**Satz 36** Für eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines reellen Banachraumes gilt

$$\partial\chi(u) := \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & \text{für } u \in C, \\ \emptyset & \text{für } u \in V \setminus C. \end{cases}$$

**Beweis:**

a) Sei  $u^* \in \partial\chi(u)$ . Dann gilt

$$\chi(v) \geq \chi(u) + \langle u^*, v - u \rangle \quad \forall v \in V. \quad (2.102)$$

Wir betrachten zunächst ein  $u \in C$ , d.h. es ist  $\chi(u) = 0$ . Ist  $v \in C$ , dann folgt (2.101) und  $u^*$  ist ein Trägerfunktional von  $C$  im Punkt  $u \in C$ . Ist  $u \in V \setminus C$ , dann ist  $\chi(u) = \infty$  und  $0 \geq \infty + \langle u^*, v - u \rangle$  für  $v \in C$ , was nicht sein kann. In diesem Fall existiert kein Trägerfunktional.

b) Sei  $u^*$  ein Trägerfunktional von  $C$  im Punkt  $u \in V$ , d.h.  $\langle u^*, u - v \rangle \forall v \in C$ . Nun ist

$$\chi(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } u \in C, \\ \infty & \text{für } u \in V \setminus C. \end{cases}$$

(i) Sei  $u \in C$ . Für  $v \in C$  gilt  $(\chi(v) = 0) \geq (\chi(u) = 0) + \langle u^*, v - u \rangle$ .  
Für  $v \in V \setminus C$  gilt  $(\chi(v) = \infty) \geq (\chi(u) = 0) + \langle u^*, v - u \rangle$ .

(ii) Ist  $u \in V \setminus C$ , dann ist  $\chi(u) = \infty$  und  $\partial\chi(u) = \emptyset$ . ■

**Folgerung:**

Wir erhalten (siehe auch Satz 33):

$$u \in C \Rightarrow 0 \in \partial\chi(u),$$

$$u \in \text{int}C \Rightarrow \{0\} = \partial\chi(u).$$

Wir beweisen jetzt, dass  $\partial\chi$  maximal monoton ist.

**Satz 37** Sei  $C$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reellen Banachraumes  $V$ . Dann ist  $\partial\chi : C \rightarrow 2^{V'}$  maximal monoton.

**Beweis:**

a) Wir zeigen, dass  $\partial\chi$  monoton ist, d.h. für alle  $(u, u^*), (v, v^*) \in G(\partial\chi)$  gilt

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0. \quad (2.103)$$

Hierbei ist  $G(\partial\chi) = \{(u, u^*) \in C \times V' : u \in C, u^* \in \partial\chi(u)\}$ . Da

$$\partial\chi(u) := \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & \text{für } u \in C, \\ \emptyset & \text{für } u \in V \setminus C. \end{cases}$$

gilt für alle  $w \in C$ :

$$\langle u^*, u - w \rangle \geq 0. \quad (2.104)$$

$$\langle v^*, v - w \rangle \geq 0. \quad (2.105)$$

Es folgt die Ungleichung (2.103), weil

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle = \langle u^*, u - v \rangle + \langle v^*, v - u \rangle \stackrel{(2.104), (2.105)}{\geq} 0.$$

b) Wir überlegen, dass  $\partial\chi : C \rightarrow 2^{V'}$  maximal monoton ist, d.h. für ein gegebenes Element  $(u, u^*) \in C \times V'$ , sowie

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall (v, v^*) \in G(\partial\chi),$$

folgt  $(u, u^*) \in G(\partial\chi)$ . Nach der obigen Folgerung ist  $0 \in \partial\chi(v) \forall v \in C$ , was bedeutet, dass  $u^* \in \partial\chi(u)$  ist. ■

Es tritt die Frage auf, ob  $\partial\chi : V \rightarrow 2^{V'}$  ebenfalls maximal monoton ist. Diese Frage wird durch einen Satz von Rockafellar beantwortet:

**Satz 38** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum,  $F : V \rightarrow (-\infty, \infty]$  konvex, unterhalbstetig und  $F \not\equiv \infty$ . Dann ist  $\partial F : V \rightarrow 2^{V'}$  maximal monoton.

Es wird als Übung empfohlen zu überprüfen, dass  $F = \chi$  den Voraussetzungen von Satz 38 genügt.

## 2.6 Variationsungleichungen

Es sei  $C \subseteq V$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven reellen Banachraumes  $V$ . Gegeben sei ein Operator  $A : C \rightarrow V'$  und ein  $b \in V'$ . Wir suchen ein  $u \in C$ , so dass

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C. \quad (2.106)$$

**Beispiel: Hindernisproblem**

Gesucht ist ein  $u$ , so dass

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad (2.107)$$

$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (2.108)$$

$$u \geq g \text{ in } \Omega. \quad (2.109)$$

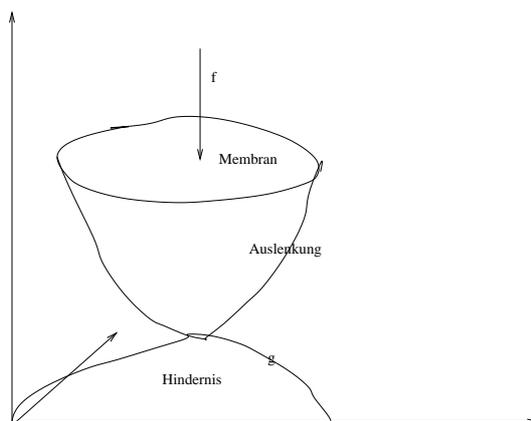


Abbildung 2.7: Hindernisproblem

Hierbei sind  $f, g$  gegeben,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $u$  ist die Durchbiegung einer elastischen Membran unter dem Einfluss der Kraft  $f$ , die durch das Hindernis  $g$  beeinflusst wird, siehe Abbildung 2.7.

Wir kommen zu einer schwachen Formulierung des Problems, wenn wir zunächst annehmen, dass  $u$  und  $v$  hinreichend glatt sind und auf dem Rand  $\partial\Omega$  verschwinden. Multiplizieren wir die Differentialgleichung (2.107) mit  $(u-v)$ , integrieren über  $\Omega$  und wenden partielle Integration an, dann erhalten wir:

$$\int_{\Omega} f(x)(u(x) - v(x)) dx - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla(u(x) - v(x)) dx = 0.$$

Sei  $C = \{u \in \mathring{H}^1(\Omega), u \geq g\}$  und

$$\langle Au, v \rangle = \int \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$$

$$\langle b, v \rangle = \int \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Die zum Hindernisproblem (2.107), (2.108), (2.109) gehörende Variationsungleichung lautet: Für  $b \in V'$  und  $g \in H^1(\Omega)$ ,  $g \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ , finde ein  $u \in C$ , so dass

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \quad (2.110)$$

Der Raum  $V = \mathring{H}^1(\Omega)$  ist ein reeller Hilbertraum und damit ein reeller, reflexiver Banachraum. Wir müssen überlegen, ob  $C$  nichtleer, abgeschlossen und konvex ist.

**Lemma 16** Es sei  $g \in H^1(\Omega)$ ,  $g \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ . Dann ist  $C = \{u \in \mathring{H}^1(\Omega), u \geq g\}$  nicht leer, abgeschlossen und konvex.

### Beweis:

a)  $C$  ist nicht leer. Betrachte  $g^+ = \max\{g, 0\}$ . Die Funktion  $g^+$  ist aus  $\mathring{H}^1(\Omega)$  und  $g^+ \geq g$ .

b)  $C$  ist konvex. Seien  $u, v \in C$ . Dann ist  $\lambda u + (1 - \lambda)v \geq \lambda g + (1 - \lambda)g = g$ .

c)  $C$  ist abgeschlossen. Es wird empfohlen, dies als Übungsaufgabe zu zeigen. ■

Wir sehen uns die abstrakte Variationsungleichung (2.110) an. Wir stellen fest

**Lemma 17** Sei  $b \in V'$  ist und  $A : C \rightarrow V'$ .

Das Problem

(i): Man suche ein  $u \in C$ , so dass

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C$$

ist äquivalent zum Problem

(ii): Man suche ein  $u \in C$ , so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au,$$

wobei  $\chi(\cdot)$  die Indikatorfunktion von  $C$  ist.

**Beweis:**

Wir starten mit dem Problem (i). Für  $u \in C$ ,  $b - Au = u^*$  und  $v \in C$  gilt  $\langle u^*, u - v \rangle \geq 0$ , d.h.  $u^* = b - Au \in \partial\chi(u)$  und daher ist  $b \in \partial\chi(u) + Au$ .

Wir sehen uns das Problem (ii) an. Für  $u \in C$  ist

$$\partial\chi(u) = \{u^* \in V' : \langle u^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\}.$$

Jedes  $b \in \partial\chi(u) + Au$  hat die Gestalt  $b = u^* + Au$  mit  $u^* \in \partial\chi(u)$ . Damit ist  $b - Au = u^*$  und  $\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0$ . ■

**Bemerkung:** Ist  $C = V$ , dann ist die abstrakte Variationsungleichung (2.110) äquivalent zur Operatorgleichung  $Au = b$ .

**Beweis:**

Es gilt

$$\langle b - Au, w \rangle \geq 0, \quad \forall w = u - v \in V.$$

Für  $-w$  erhalten wir ebenfalls  $\langle b - Au, -w \rangle \geq 0$ , also

$$\langle b - Au, w \rangle \leq 0, \quad \forall w \in V.$$

Aus den beiden Ungleichungen folgt

$$\langle b - Au, w \rangle = 0, \quad \forall w \in V,$$

d.h.

$$b = Au. \quad \blacksquare$$

Um die Lösbarkeit der abstrakten Variationsungleichung (2.110) zu untersuchen, gehen wir von der Formulierung (ii) aus. Wir benutzen einen Satz von Browder, bei dem folgende Definition auftritt:

**Definition 20** (Koerzivität)

Sei  $B : C \subseteq V \rightarrow 2^{V'}$ ,  $A : C \rightarrow V'$ ,  $b \in V'$  und  $C$  eine unbeschränkte, nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reflexiven Banachraumes  $V$ . Der Operator  $A$  ist koerziv bezüglich des Operators  $B$  und des Elements  $b$ , falls ein  $u_0 \in C \cap D(B)$  und eine Zahl  $r > 0$  existieren, so dass für alle  $u \in C$  mit  $\|u\| > r$  gilt

$$\langle Au, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle. \quad (2.111)$$

Wir diskutieren, wie diese Definition mit der uns bekannten Definition der Koerzivität eines Operators zusammenhängt.

Wir hatten definiert: Der Operator  $A : V \rightarrow V'$  ist koerziv, falls

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Wir betrachten jetzt folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \frac{\langle Au - b, u - u_0 \rangle}{\|u\|} &\geq \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\| \|u - u_0\|}{\|u\|} \\ &\geq \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\| (\|u\| + \|u_0\|)}{\|u\|}. \end{aligned}$$

Es ist  $\frac{\|u\| + \|u_0\|}{\|u\|} \leq 2$  für  $\|u\| \geq r$  mit genügend großem  $r$ . Damit erhalten wir

$$\frac{\langle Au - b, u - u_0 \rangle}{\|u\|} \geq \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} - 2b = \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} - \frac{\langle Au, u_0 \rangle}{\|u\|} - 2b. \quad (2.112)$$

Ist nun  $\frac{\langle Au, u_0 \rangle}{\|u\|}$  beschränkt, bzw.  $u_0 = 0$  wählbar, dann folgt aus der klassischen Koerzivität von  $A$  die Koerzivität gemäß Definition 20.

Weiterhin gilt das folgende Lemma:

**Lemma 18** Falls  $A$  koerziv bezüglich  $B$  ist, d.h. es existiert ein  $u_0 \in C \cap D(B)$  so dass

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

gilt, dann ist  $A$  koerziv bezüglich  $B$  und alle  $b \in V'$ .

### Beweis:

Aus (2.112) folgt sofort für  $\|u\| \geq r$

$$\langle Au - b, u - u_0 \rangle > 0.$$

■

Die Koerzivität gemäß Definition 20 liefert eine Lösbarkeitsbedingung für gewisse Lasten  $b$ .

Wir kommen nun zu einem Satz von Browder, der die Lösbarkeit von Variationsungleichungen beschreibt:

**Satz 39** (Ružička, S.106 u.ff.)

Sei  $C \subseteq V$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven, reellen Banachraumes  $V$ ;  $b \in V'$  sei gegeben,  $A : C \rightarrow V'$  sei pseudomonoton, beschränkt und demisstetig,  $B : C \rightarrow 2^{V'}$  sei maximal monoton. Ist  $C$  unbeschränkt, dann sei der Operator  $A$  koerziv bezüglich  $B$  und  $b$ . Dann existiert eine Lösung  $u \in C \cap D(B)$  von  $b \in Au + Bu$ , d.h.  $b = Au - w$  mit  $w \in Bu$ .

Wir verzichten hier auf den Beweis und diskutieren nur die Anwendung dieses Satzes auf Variationsungleichungen. Wir hatten in Lemma 17 festgestellt, dass das Problem: Man suche ein  $u \in C$  mit

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C \quad (2.113)$$

äquivalent zu dem Problem: Man suche ein  $u \in C$  mit

$$b \in \partial\chi(u) + Au, \quad (2.114)$$

ist. Daher liefert der Satz von Browder folgendes Resultat

**Satz 40** Satz 1 zur Lösung von Variationsungleichungen  $\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0$   
 Sei  $C \subseteq V$  eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven, reellen Banachraumes  $V$ . Der Operator  $A : C \rightarrow V'$  sei pseudomonoton, beschränkt und demisstetig, Falls  $C$  unbeschränkt ist, existiere ein  $u_0 \in C$ , so dass

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

- (i) Für alle  $b \in V'$  gibt es ein  $u \in C$ , so dass (2.114) gilt.  
 (ii) Falls  $A$  monoton ist, ist die Lösungsmenge von (2.114) abgeschlossen und konvex.  
 (iii) Falls  $A$  strikt monoton ist, dann ist (2.114) eindeutig lösbar.

### Beweis

(i) Wir wählen  $B = \partial\chi : C \rightarrow 2^{V'}$ , wobei  $\chi$  die Indikatorfunktion der Menge  $C$  ist. Wir haben bereits in Satz 38 gezeigt, dass  $B$  maximal monoton ist und daher der Voraussetzung im Satz von Browder genügt. Zusammen mit Lemma 18 folgt die Existenz einer Lösung.

(ii) Wir beginnen mit einer Vorbetrachtung. Für einen monotonen Operator  $A : C \rightarrow V'$  gilt

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \quad \forall u, v \in C. \quad (2.115)$$

Es folgt

$$\langle Av, v - u \rangle = \langle Au, v - u \rangle + \langle Av - Au, v - u \rangle \geq \langle Au, v - u \rangle. \quad (2.116)$$

Ist zusätzlich  $u \in C$  Lösung der Variationsungleichung

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C, \quad (2.117)$$

dann können wir (2.116) weiter abschätzen

$$\langle Av, v - u \rangle \geq \langle Au, v - u \rangle \geq \langle b, v - u \rangle,$$

d.h.

$$\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \quad (2.118)$$

Damit haben wir gezeigt:

(a) Ist  $u \in C$  Lösung von (2.117), dann ist  $u \in C$  auch Lösung von (2.118). Es gilt auch umgekehrt:

(b) Ist  $u \in C$  Lösung von (2.118), dann ist  $u \in C$  auch Lösung von (2.117).

Wir zeigen (b). Dazu setzen wir  $v = (1 - t)u + tw$ , wobei  $w \in C$  ist und  $0 < t < 1$ . Wegen der Konvexität von  $C$  ist  $v \in C$ . Setzen wir nun  $v$  in (2.118) ein, so erhalten wir

$$\langle b - A((1 - t)u + tw), u - (1 - t)u - tw \rangle \geq 0. \quad (2.119)$$

Aus (2.119) folgt

$$t\langle b - A((1 - t)u + tw), u - w \rangle \geq 0$$

bzw.

$$\langle b - A((1 - t)u + tw), u - w \rangle \geq 0,$$

woraus sich für  $t \rightarrow 0^+$

$$\langle b - Au, u - w \rangle \geq 0 \quad \forall w \in C$$

ergibt.

Nach dieser Vorbetrachtung zeigen wir die Abgeschlossenheit und Konvexität der Lösungsmenge  $S$  von (2.119). Wir beginnen mit der Konvexität.

Seien  $u$  und  $\tilde{u}$  aus  $S$ . Dann gilt für  $w = (1 - t)u + t\tilde{u}$

$$\langle b - Av, w - v \rangle = \langle b - Av, (1 - t)u + t\tilde{u} - v \rangle = (1 - t)\langle b - Av, u - v \rangle + t\langle b - Av, \tilde{u} - v \rangle \geq 0,$$

d.h.  $w \in S$ . Beachte hierbei, dass  $v = (1 - t)v + tv$  ist.

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit. Wir betrachten eine konvergente Folge von Elementen  $u_n \in S$ , d.h.  $u_n \rightarrow u$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir müssen zeigen dass  $u \in S$  ist. Wir vermuten, dass der Grenzwert von  $(\langle b - Av, u_n - v \rangle \geq 0)_n$  die Zahl  $\langle b - Av, u - v \rangle \geq 0$  ist. In der Tat, für  $v \in C$  gilt

$$|\langle b - Av, u_n - v \rangle - \langle b - Av, u - v \rangle| = |\langle b - Av, u_n - u \rangle| \leq \|b - Av\| \|u - u_n\| \rightarrow 0$$

Daher befindet sich  $u$  in  $S$ .

(iii) Wir sehen uns die letzte Behauptung an. Dazu betrachten wir zwei Lösungen  $u$  und  $\tilde{u}$  aus  $S$ . Für  $v \in C$  gilt

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0,$$

$$\langle b - A\tilde{u}, \tilde{u} - v \rangle \geq 0.$$

Wir setzen  $v = \tilde{u}$  in der ersten Ungleichung und  $v = u$  in der 2. Ungleichung und erhalten

$$\langle b - Au, u - \tilde{u} \rangle \geq 0,$$

$$\langle b - A\tilde{u}, \tilde{u} - u \rangle \geq 0.$$

Addition der beiden letzten Ungleichungen ergibt

$$\langle -Au + A\tilde{u}, u - \tilde{u} \rangle \geq 0,$$

bzw.

$$\langle Au - A\tilde{u}, u - \tilde{u} \rangle \leq 0.$$

Da  $A$  strikt monoton ist, folgt  $u = \tilde{u}$ . ■

### Beispiel

Wir betrachten wieder das Hindernisproblem. In diesem Fall war

$$\langle b, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$C = \{u \in \dot{H}^1(\Omega), u \geq g\}$$

Das Variationsproblem lautet: Man finde ein  $u \in C$ , so dass

$$\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C. \quad (2.120)$$

Mit Hilfe von Satz 40 kann folgendes Ergebnis bewiesen werden:

**Satz 41** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Für alle  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $g \in H^1(\Omega)$ ,  $g \leq 0$  auf  $\partial\Omega$ , existiert genau eine Lösung der Variationsungleichung (2.120).

**Beweis**

- a)  $C$  ist eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge von  $V = \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ .  
 b)  $A : C \rightarrow V'$  ist linear, stetig, strikt monoton und koerziv.  
 c) Aus der klassischen Koerzivität, folgt die im Satz 40 geforderte Koerzivität (vergl. Abschätzung (2.112))

Aus Satz 40 folgt nun die Behauptung. ■

Wir diskutieren, wie das Hindernis-Ausgangsproblem (2.107),(2.108),(2.109) und die Variationsungleichung (2.120) zusammenhängen.

Es sei  $u \in C$  eine glatte Lösung der Variationsungleichung

$$\int_{\Omega} f(u-v) dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(u-v) dx \geq 0 \quad \forall v \in C. \quad (2.121)$$

Wir betrachten eine Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi(x) \geq 0$  und ein  $\tau \in (0, 1]$ . Die Funktion  $v = u + \tau\varphi$  ist aus  $C$ , da  $v|_{\partial\Omega} = 0$  und  $v = u + \tau\varphi \geq u \geq g$  ist. Damit liefert (2.121)

$$\int_{\Omega} f(-\tau\varphi) dx - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(-\tau\varphi) dx \geq 0,$$

woraus

$$-\int_{\Omega} f\varphi dx - \int_{\Omega} \Delta u \varphi dx \geq 0,$$

bzw.

$$-\int_{\Omega} (f + \Delta u)\varphi dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \varphi(x) \geq 0$$

folgt. Damit wird

$$-(f + \Delta u) \geq 0 \text{ in } \Omega$$

und daher

$$-\Delta u \geq f \text{ in } \Omega.$$

Wir sehen uns die offene Menge

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : u(x) > g(x)\}.$$

an. Wir betrachten eine Funktion  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_+)$  und ein  $\tau \in \mathbb{R}$  mit genügend kleinem Betrag, so dass  $v = u + \tau\varphi$  aus  $C$  ist. Wir können in den obigen Rechnungen  $\tau$  durch  $\pm\tau$  ersetzen und erhalten

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega_+.$$

Wir fassen zusammen: Es gilt

$$-\Delta u \geq f \text{ in } \Omega \setminus \Omega_+ \quad (\text{Kontakt}),$$

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega_+ \quad (\text{kein Kontakt}).$$

Dieser Sachverhalt kann ausgenutzt werden, um die Kontaktfläche zu ermitteln.

In den Anwendungen, z.B. in der Modellierung elasto-plastischer Materialien, treten allgemeinere Variationsungleichungen auf, bei denen ein zusätzliches Funktional  $F$  gegeben ist.

Sei  $C \subset V$  eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge eines reellen, reflexiven Banachraumes  $V$ ,  $A : C \rightarrow V'$ ,  $b \in V'$ ,  $F : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$ .

Das Variationsproblem lautet: Man suche ein  $u \in C$ , so dass

$$\langle b - Au, v - u \rangle + F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in C. \quad (2.122)$$

Wir setzen  $F$  auf  $V$  fort, indem wir definieren

$$F(u) := \begin{cases} F(u) & \text{für } u \in C, \\ \infty & \text{für } u \in V \setminus C. \end{cases}$$

Wir stellen fest, dass das Problem (2.122) äquivalent zu folgendem Problem ist: Suche ein  $u \in C$ , so dass

$$b \in Au + \partial F(u). \quad (2.123)$$

In der Tat, es ist  $\partial F(u) = \{u^* : F(v) \geq F(u) + \langle u^*, v - u \rangle \forall v \in V\}$  und für  $u^* = b - Au$  folgt die Behauptung.

Um die Lösbarkeit von (2.123) zu sichern, können wir wieder den Satz 39 anwenden. Dort ist  $B$  durch  $\partial F : C \rightarrow 2^{V'}$  zu ersetzen und zu prüfen unter welchen Voraussetzungen an  $F$  das Subdifferential existiert und maximal monoton ist. Die Antwort wird durch Satz 38 von Rockafellar gegeben:

**Satz 42** *Satz 2 zur Lösung von Variationsungleichungen  $\langle b - Au, v - u \rangle + F(u) \leq F(v)$*   
 Sei  $C \subseteq V$  eine konvexe, abgeschlossene, nichtleere Teilmenge eines reellen, reflexiven Banachraumes  $V$ . Der Operator  $A : C \rightarrow V'$  sei pseudomonoton, beschränkt und demistetig,  $F : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $F \not\equiv \infty$  sei konvex und unterhalbstetig. Falls  $C$  unbeschränkt ist, existiere ein  $u_0 \in C$  so dass

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty, u \in C} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

Dann besitzt die Variationsungleichung

$$\langle b - Au, v - u \rangle + F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in C$$

eine Lösung  $u \in C$ .

# Kapitel 3

## Zeitabhängige Probleme

In diesem Kapitel werden wir die Existenz von Lösungen nichtlinearer Evolutionsgleichungen mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren diskutieren. Evolutionsgleichungen haben z.B. die Form:

$$\begin{aligned}u_t - A(u) &= f, \\u_{tt} - A(u) &= f.\end{aligned}$$

$A$  ist i.a. ein nichtlinearer Operator.

Bei den bisher betrachteten Problemen haben wir mit Hilfe schwacher Formulierungen den Operator  $A : V \rightarrow V'$  eingeführt. Dabei war der Operator  $A$  ein Differentialoperator, der auf Ortsvariable angewandt wurde. Betrachten wir Evolutionsgleichungen, dann unterscheiden wir zwischen Orts- und Zeitableitungen und müssen klären, was wir unter schwachen, bzw. verallgemeinerten Zeitableitungen verstehen.

### 3.1 Zeitableitungen

Zunächst sehen wir uns an, wie eine Funktion  $u$ , die einen Raum-Zeit-Zylinder  $I \times \Omega$  in die Menge der reellen Zahlen abbildet, interpretiert werden kann. Sei  $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(t, x)$ ,  $t \in I = [0, T]$ ,  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

(i)  $t \in I$  wird festgehalten.

$u = u(t, \cdot) = \tilde{u}(t) \in V$  ist definiert durch

$$\begin{aligned}x \rightarrow u(t, x) &=: \tilde{u}(t)(x), \\ \tilde{u}(t) &: \Omega \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

(ii) Wir variieren  $t \in I$ :

$$\begin{aligned}\tilde{u} : t &\rightarrow \tilde{u}(t) \in V, \\ \tilde{u} &: I \rightarrow V\end{aligned}$$

Damit ist  $\tilde{u}$  eine Abbildung in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum  $V$ .

Der Einfachheit halber wird  $\tilde{u}$  durch  $u$  ersetzt und

$$u : I \rightarrow V \tag{3.1}$$

ist in diesem Sinn zu verstehen. Wie  $V$  aussieht, wird durch die Eigenschaften von  $u : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt, z.B. kann  $V=L_p(I, V)$  sein.

**Definition 21** Es sei  $p \in [1, \infty)$  und  $V$  ein reeller Banachraum. Dann ist

$$L_p(I, V) = \left\{ u : I \rightarrow V, \left( \int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L_p(I, V)} < \infty \right\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von Abbildungen  $u : I \rightarrow V$  bezüglich dieser Norm.

$$L_\infty(I, V) = \left\{ u : I \rightarrow V, \text{ess sup}_{t \in I} \|u(t)\|_V < \infty \right\}$$

Welche Räume  $V$  auftreten, soll am Beispiel eines Rand-Anfangswert-Problems für die lineare Wärmeleitungsgleichung erläutert werden.

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } I \times \Omega \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega \quad \text{d.h. } u(t, x) = 0 \quad \forall t \in I, \forall x \in \partial\Omega \quad (3.3)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{d.h. } (u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Es sei  $u$  eine glatte Lösung von (3.2), (3.3), (3.4),  $\varphi \in L_2(I, \overset{\circ}{H}^1(\Omega))$  beliebig. Durch Multiplikation der Wärmeleitungsgleichung mit  $\varphi$ , Integration über  $I \times \Omega$  und anschließender partieller Integration erhalten wir

$$\int_I \int_\Omega u_t \varphi dx dt + \int_I \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_I \int_\Omega f \varphi dx dt \quad \forall \varphi \in L_2(I, \overset{\circ}{H}^1(\Omega)) \quad (3.5)$$

Suchen wir eine Lösung  $u \in L_2(I, \overset{\circ}{H}^1(\Omega))$ , dann sehen wir folgende Unterschiede in den drei Integralen von (3.5):

Im ersten Integral muss  $u_t \in L_2(I, H^{-1}(\Omega))$  sein (duale Paarung!).

Das zweite Integral ist wohl definiert.

Das dritte Integral ist für  $f \in L_2(I, L_2(\Omega))$  im klassischen Sinn definiert; für  $f \in L_2(I, H^{-1}(\Omega))$  tritt eine duale Paarung auf.

Wir sehen, dass unterschiedliche Räume für  $u$  und  $u_t$  betrachtet werden müssen; es treten  $V = \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ ,  $V' = H^{-1}(\Omega)$  sowie  $H = L_2(\Omega)$  auf. Man spricht in diesem Fall von einem Evolutionstriple  $(V, H, V')$  [10], IIa, S.416, oder von einem Gelfand Triple [6], S.103.

**Definition 22** Sei  $V$  ein reeller Banachraum,  $H$  ein reeller Hilbertraum, so dass

$$V \overset{\text{stetig}}{\subset} H, \quad \bar{V}^{\|\cdot\|_H} = H.$$

Dann heißt  $(V, H, V')$  Gelfand Triple.

**Bemerkung:** Es gilt

$$V \overset{\text{stetig}}{\subset} H \cong H' \overset{\text{stetig}}{\subset} V'.$$

Ein klassisches Beispiel für ein Gelfand-Triple wäre  $(\overset{\circ}{H}^1(\Omega), L_2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ , wie es oben bei der Wärmeleitungsgleichung auftritt.

**Folgerung:** Sei  $(V, H, V')$  ein Gelfand Triple. Für alle  $v, w \in V$  gilt

$$\langle v, w \rangle_V = (v, w)_H = \langle w, v \rangle_V.$$

Für alle  $h \in H, v \in V$  gilt

$$\langle h, v \rangle_V = (h, v)_H.$$

Wir sind jetzt in der Lage, die verallgemeinerte Zeitableitung zu definieren.

**Definition 23** Sei  $u \in L_p(I, V)$ ,  $1 < p < \infty$ .  $(V, H, V')$  sei ein Gelfand Tripel.  $\frac{du}{dt} \in L_q(I, V')$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ist die verallgemeinerte Zeitableitung von  $u$ , falls

$$\int_0^T \langle \frac{du}{dt}(t), v \rangle_V \varphi(t) dt = - \int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t) dt \quad \forall v \in V, \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}). \quad (3.6)$$

**Bemerkung:** Die verallgemeinerte Zeitableitung ist eindeutig bestimmt. In der Tat: seien  $w_1, w_2 \in L_q(I, V')$  zwei verallgemeinerte Zeitableitungen von  $u$ . Dann ist

$$\int_0^T \langle w_1(t) - w_2(t), v \rangle \varphi(t) dt = 0 \quad \forall v \in V, \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}).$$

Aus dem Fundamentallema der Variationsrechnung folgt

$$\langle w_1(t) - w_2(t), v \rangle = 0 \text{ in } L_q(I) \quad \forall v \in V.$$

Damit ist  $w_1 = w_2$  in  $L_q(I, V')$ .

**Bemerkung:** Die verallgemeinerte Zeitableitung  $\frac{du}{dt}$  ist i.A. nicht mit der schwachen Zeitableitung  $\partial_t u$  identisch, die folgendermaßen definiert ist:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u \psi dx dt = - \int_0^T \int_\Omega u \partial_t \psi dx dt \quad \forall \psi \in C_0^\infty(I, \times \Omega).$$

Ist  $C_0^\infty(\Omega)$  dicht in  $V$ , dann stimmen beide Zeitableitungen überein. Man betrachte  $\psi(t, x) = v(x)\varphi(t)$ .

### Der Raum $W_{p,q}$

Wir führen jetzt einen Funktionenraum ein, in dem die verallgemeinerte Zeitableitung auftritt.

**Definition 24** Es sei  $1 < p < \infty$  und  $q$  der konjugierte Exponent, d.h.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Wir bezeichnen als

$$W_{p,q} := \{u \in L_p(I, V), \frac{du}{dt} \in L_q(I, V')\}$$

versehen mit der Graphen-Norm

$$\|u\|_{W_{p,q}} = \|u\|_{L_p(I, V)} + \|u\|_{L_q(I, V')}.$$

$W_{p,q}$  ist ein Banachraum. Er ist reflexiv, falls  $V$  reflexiv ist. Weiterhin gilt folgendes wichtige Lemma:

**Lemma 19** Sei  $(V, H, V')$  ein Gelfand-Tripel. Dann gilt

$$W_{p,q} \overset{\text{stetig}}{\subset} C(I, H)$$

und

$$\int_s^t \langle \frac{du}{dt}(\tau), u(\tau) \rangle_V d\tau = \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(s)\|_H^2.$$

Der Beweis ist in [10], IIA, Satz 23.23, zu finden. Er ist technisch und wird analog zu folgender Rechnung für reelle Funktionen einer reellen Variablen  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  geführt:

$$\int_s^t u'(\tau)u(\tau) d\tau = \int_s^t \frac{1}{2} (u^2(\tau))' d\tau = \frac{1}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} u^2(s).$$

### 3.2 Anwendung der Theorie maximal monotoner Operatoren

Unser Ziel ist, den Satz 39 von Browder zur Existenz von Lösungen  $u \in C \cap D(B)$  von  $b \in Au + Bu$  anzuwenden. Die Abbildung  $B$  war maximal monoton, der Operator  $A$  war pseudomonoton, beschränkt, demistetig und genügte einer gewissen Koerzitivitätsbedingung.

Wir führen jetzt die Abbildung  $B$  als verallgemeinerte Zeitableitung für Elemente  $u \in W_{p,q}$  ein.

**Satz 43** Sei  $(V, H, V')$  ein Gelfand Tripel,  $W_{p,q}$  sei durch Definition 24 gegeben. Die Abbildung  $B$  ist definiert durch

$$B : D(B) \subseteq L_p(I, V) \rightarrow L_q(I, V')$$

$$Bu := \frac{du}{dt}$$

$$D(B) = \{u \in W_{p,q} : u(0) = 0\}$$

Dann ist  $B$  ein linearer maximal monotoner Operator auf  $D(B)$ .

#### Beweis

- $B$  ist per definitionem wohl definiert und linear.
- $B$  ist monoton, da für  $u, v \in W_{p,q}$  gilt

$$\begin{aligned} \langle B(u) - B(v), u - v \rangle_{L_p(I, V)} &= \int_0^T \left\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v \right\rangle_V dt \\ &= \frac{1}{2} \|(u-v)(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|(u-v)(0)\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2} \|(u-v)(T)\|_H^2 \geq 0. \end{aligned}$$

- $B$  ist maximal monoton. Wir haben zu zeigen: Falls

$$\langle u^* - v^*, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall (v, v^*) \in G(B), \quad (3.7)$$

dann ist  $(u, u^*) \in G(B) \subset L_p(I, V) \times L_q(I, V')$ . Die Gleichung (3.7) lautet

$$\langle u^* - \frac{dv}{dt}, u - v \rangle = \int_0^T \langle u^* - \frac{dv}{dt}, u - v \rangle_V dt \geq 0 \quad \forall (v, v^*) \in G(B) \quad (3.8)$$

Wir überlegen, dass für  $u \in L_p(I, V)$  folgt, dass  $u^* = \frac{du}{dt}$  ist. Dazu wählen wir  $v = \varphi(t)z$ ,  $\varphi(t) \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ ,  $z \in V$ . Es ist  $v(0) = 0$  und  $\frac{dv}{dt} = \varphi'(t)z \in L_q(I, V')$ . Damit ist  $(v, v^*) \in G(B)$ .

Außerdem gilt, da  $\varphi(t) \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$  ist,

$$\langle \frac{dv}{dt}, v \rangle = \int_0^T \langle \frac{dv}{dt}, v \rangle_V dt = \frac{1}{2} \|v(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|_H^2 = 0.$$

Wir setzen  $v$  in (3.8) ein und erhalten:

$$0 \leq \int_0^T (\langle u^*, u \rangle_V - \langle u^*, \varphi z \rangle_V - \langle \varphi' z, u \rangle_V) dt.$$

Es ist  $\langle z, u \rangle_V = \langle u, z \rangle_V$  und somit

$$0 \leq \int_0^T \langle u^*, u \rangle_V dt - \int_0^T \langle \varphi' u + \varphi u^*, z \rangle_V dt \quad \forall z \in V, \forall \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R}). \quad (3.9)$$

Die Ungleichung (3.9) gilt für alle  $z \in V$ , also auch für  $-z$  und für  $\pm \lambda z$ , wobei  $|\lambda|$  groß ist. Daher muss

$$\int_0^T \varphi \langle u^*, z \rangle_V + \varphi' \langle u, z \rangle_V dt = 0$$

sein. Dies ist aber die Definitionsgleichung für die verallgemeinerte Zeitableitung, d.h.  $u^* = \frac{du}{dt} \in L_q(I, V')$

Wir müssen noch zeigen, dass  $u(0) = 0$  ist und damit  $u \in D(B)$  ist. Es gilt

$$0 \leq \langle u^* - v^*, u - v \rangle = \int_0^T \left\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u-v \right\rangle_V dt = \frac{1}{2} \|u(T) - v(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(0) - v(0)\|_H^2. \quad (3.10)$$

Wir wählen eine Folge  $(a_n) \subset V$  mit  $a_n T \rightarrow u(T)$  in  $H$ . Wir betrachten die Folge  $(v_n(t) = a_n t)_n$  und setzen diese Funktionen in (3.10) ein. Wir erhalten

$$0 \leq \frac{1}{2} \|u(T) - v_n(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(0) - v_n(0)\|_H^2.$$

Beachten wir, dass  $v_n(0) = 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n T = u(T)$  ist, liefert uns der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$

$$0 \leq -\frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2,$$

d.h.  $u(0) = 0$ . ■

Wir betrachten jetzt folgendes Anfangswertproblem

$$\frac{du}{dt} + Au(t) = b(t) \quad \text{für } t \in I = [0, T] \quad (3.11)$$

$$u(0) = 0. \quad (3.12)$$

Hierbei sei der Operator  $A$  durch  $A : X = L_p(I, V) \rightarrow X' = L_q(I, V')$  definiert,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  $(V, H, V')$  sei ein Gelfand Tripel. Wir setzen

$$Bu = \frac{du}{dt}, \quad D(B) = \{u \in W_{p,q} : u(0) = 0\}$$

Das obige Anfangswertproblem lautet:

Finde ein  $u \in D(B)$ , so dass für  $b \in X'$  gilt

$$Bu + Au = b. \quad (3.13)$$

Die Lösungseigenschaften dieses Anfangswertproblems werden durch folgenden Satz beschrieben:

**Satz 44** Sei  $V$  ein reeller, reflexiver Banachraum und  $(V, H, V')$  ein Gelfand Tripel,  $X = L_p(I, V)$ ,  $A : X \rightarrow X'$  ein pseudomonotoner, koerziver, demistetiger, beschränkter Operator. Dann existiert für alle  $b \in X'$  eine Lösung  $u \in D(B)$  von (3.13) Falls  $A$  strikt monoton ist, dann ist diese eindeutig bestimmt.

### Beweis

Wir wenden Satz 39 (Satz von Browder) an.

(i) Wir zeigen, dass  $C = D(B) = \{u \in W_{p,q} : u(0) = 0\}$  ein nichtleerer, abgeschlossener, konvexer Teilraum von  $W_{p,q}$  ist.

- nichtleer:  $u = v(x)\varphi(t)$  ist aus  $C$ , falls  $v \in V, \varphi \in C_0^\infty(I, \mathbb{R})$ .
- konvex:  $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in C$ , falls  $u_1, u_2 \in C$ .
- abgeschlossen: Sei  $(u_n) \subset D(B)$ , so dass  $u_n \rightarrow u$  in  $W_{p,q}$ . Wir haben zu zeigen, dass  $u(0) = 0$  ist. Nach Lemma 19 ist  $W_{p,q} \overset{\text{stetig}}{\subset} C(I, H)$ , d.h.

$$\|u_n - u\|_{C(I,H)} = \max_{t \in I} \|u_n(t) - u(t)\|_H \leq c \|u_n - u\|_{W_{p,q}} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es folgt

$$\|u_n(0) - u(0)\|_H = \|u(0)\|_H = 0,$$

und damit ist  $u(0) = 0$ .

(ii) Die Voraussetzungen des Satzes von Browder sind erfüllt.

- $B : C \subset X \rightarrow X'$  ist maximal monoton.
- $A : C \subset X \rightarrow X'$  ist pseudomonoton, demistetig, koerziv und beschränkt. Die Koerzivität bedeutet

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty, u \in C} \frac{\langle Au, u - u_0 \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

und da  $u_0 = 0$  gewählt werden kann, gilt im klassischen Sinn

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty, u \in C} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|} = \infty.$$

(iii) Wir zeigen die Eindeutigkeit. Sei  $A$  strikt monoton. Wir betrachten zwei Lösungen  $u_1, u_2 \in D(B)$ , d.h.

$$Bu_1 + Au_1 = b,$$

$$Bu_2 + Au_2 = b.$$

Subtraktion dieser Gleichungen liefert

$$0 = B(u_1 - u_2) + Au_1 - Au_2.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle B(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \|u_1(T) - u_2(T)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u_1(0) - u_2(0)\|_H^2 + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle \\ &\geq \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2 \rangle. \end{aligned}$$

Hier haben wir Lemma 19 benutzt, sowie die Voraussetzung, dass  $u_1(0) = u_2(0) = 0$  gilt. Aus der strikten Monotonie von  $A$  folgt  $u_1 - u_2 = 0$ . ■

**Beispiel:** Wir sehen uns das Rand-Anfangswertproblem

$$u_t - \Delta u = b \quad \text{in } I \times \Omega \quad (3.14)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega \quad (3.15)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.16)$$

an. Wir wählen  $V = \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ ,  $H = L_2(\Omega)$ ,  $V' = H^{-1}(\Omega)$ . Diese Räume bilden ein Gelfand Tripel. Wir setzen  $X = L_2(I, V)$  und damit ist  $X' = L_2(I, V')$ . Das schwach formulierte Problem lautet: Finde ein  $u \in D(B) \subset X$ , so dass gilt

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + \langle Au, v \rangle = \langle b, v \rangle \quad \forall v \in X.$$

Der Operator  $A : X \rightarrow X'$

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \leq \|u\|_X \|v\|_X$$

ist stark monoton, d.h.

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) \, dx \, dt \geq c \int_0^T \|u - v\|_V^2 \, dt = c \|u - v\|_{L_2(I, V)}^2.$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 44 erfüllt und wir erhalten folgendes Ergebnis:

*Das Rand-Anfangswertproblem (3.14),(3.15),(3.16) besitzt für jedes  $b \in L_2(I, V')$  eine eindeutig bestimmte schwache Lösung  $u \in L_2(I, V)$  mit  $\frac{du}{dt} \in L_2(I, V')$ .*

### Ein quasilineares parabolisches Problem

Wir wollen nun den linearen Laplace-Operator durch den p-Laplace-Operator ersetzen und folgendes quasilineare Rand-Anfangswertproblem betrachten:

$$u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + g(u) = f \quad \text{in } I \times \Omega \quad (3.17)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega \quad (3.18)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.19)$$

Analog zum stationären Fall, siehe Abschnitt 2.4, nehmen wir an, dass  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, einer Wachstumsbedingung

$$|g(s)| \leq c(1 + |s|^{r-1}), \quad 1 \leq r < \infty,$$

genügt und dass gilt

$$\inf_{s \in \mathbb{R}} g(s)s > -\infty. \quad (3.20)$$

Sei  $V = \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$  und  $X = L^p(0, T; V)$ . Die Räume  $(V, H, V')$  bilden ein Gelfand Tripel für  $H = L_2(\Omega)$ , falls  $p \geq \frac{2n}{2+n}$  ist. Wir betrachten die Operatoren  $A_1 : X \rightarrow X'$ ,  $A_2 : X \rightarrow X'$ , die durch

$$\langle A_1 u, v \rangle := \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt$$

$$\langle A_2 u, v \rangle := \int_0^T \int_{\Omega} g(u)v \, dx \, dt$$

definiert sind. Hierbei ist  $X' = L_p(0, T; V)' = L_q(0, T; V')$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Wir wollen diskutieren, ob  $A_1$  und  $A_2$  ähnliche Eigenschaften wie im stationären Fall besitzen.

### Der Operator $A_1$

**Lemma 20** Sei  $1 < p < \infty$ .  $A_1$  bildet  $X$  in  $X'$  ab.

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \langle A_1 u, v \rangle &= \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \\
 &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \, dt \\
 &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u\|_{L^p([0, T] \times \Omega)}^{p-1} \|\nabla v\|_{L^p([0, T] \times \Omega)} \\
 &\leq c \left[ \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \, dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq c \left( \int_0^T \|v\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= c \|v\|_X.
 \end{aligned}$$

■

**Lemma 21** Sei  $1 < p < \infty$ . Der Operator  $A_1 : X \rightarrow X'$  ist strikt monoton, stetig, koerziv und beschränkt.

Der Beweis läuft analog zum Beweis von Lemma 8.

**Bemerkung:** Wir benötigen eigentlich nur, dass  $A_1$  auf dem Teilraum  $C = D(B) = \{u \in W_{p,q}, u(0) = 0\}$  strikt monoton, stetig und koerziv ist.

### Der Operator $A_2$

Im stationären Fall haben wir in Lemma 12 gezeigt, dass  $A_2$  (unter der Voraussetzung, falls  $1 < p < n$ , dann ist  $r < \frac{np}{n-p}$ ) wohl definiert, beschränkt und stark stetig ist. Dabei haben wir die kompakten Einbettungen

$$W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\subset} L^\alpha(\Omega)$$

benutzt.

Wir überlegen nun, ob im instationären Fall  $A_2 : D(B) \subset X \rightarrow X'$  wohl definiert ist. Wir werden sehen, dass es in diesem Fall wesentlich ist,  $A_2 : D(B) \subset W_{p,q} \rightarrow W'_{p,q}$  zu betrachten.

**Lemma 22** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , ein beschränktes Gebiet mit einem Rand  $\partial\Omega \in C^{0,1}$ . Sei  $p \geq \frac{2n}{n+2}$  und  $(\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega), L_2(\Omega), \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)')$  das entsprechende Gelfand-Tripel. Weiterhin sei  $W_{p,q} = \{u \in L_p(I, V) = X : \frac{du}{dt} \in L_q(I, V') = X'\}$ , versehen mit der Graphennorm. Die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genüge der Voraussetzung (3.20). Falls  $r \geq p \frac{n+2}{n}$  ist, dann bildet  $A_2$  den Raum  $W_{p,q}$  in seinen Dualraum  $W'_{p,q}$  ab und ist beschränkt. Für  $r < p \frac{n+2}{n}$  ist  $A_2 : W_{p,q} \rightarrow W'_{p,q}$  stark stetig.

## Beweis

Wir gliedern den Beweis in 3 Schritte.

### 1.Schritt Beweisidee für die Wohldefiniertheit und Beschränktheit

Für alle  $u, v \in W_{p,q}$  und  $s = p \frac{n+2}{n}$ ,  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$  gilt

$$\begin{aligned} |\langle A_2 u, v \rangle| &\leq c \int_I \int_{\Omega} (1 + |u|^{r-1}) |v| \, dx \, dt \\ &\leq c \int_I \int_{\Omega} |v| \, dx \, dt + c \left( \|u\|_{L_{(r-1)s'}(I \times \Omega)}^{r-1} \|v\|_{L_s(I \times \Omega)} \right) \\ &\leq \tilde{c} \left( 1 + \|u\|_{L_{(r-1)s'}(I \times \Omega)}^{r-1} \right) \|v\|_{L_s(I \times \Omega)}. \end{aligned}$$

In der 2. Abschätzung haben wir die Höldersche Ungleichung wie folgt angewandt.

$$\begin{aligned} \int_I \int_{\Omega} |u|^{(r-1)} |v| \, dx \, dt &\leq \|u^{(r-1)}\|_{L_{s'}(I \times \Omega)} \|v\|_{L_s(I \times \Omega)}, \\ \|u^{(r-1)}\|_{L_{s'}(I \times \Omega)} &= \left( \int_I \int_{\Omega} |u|^{(r-1)s'} \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{s'}} = \left( \int_I \|u\|_{L_{(r-1)s'}(\Omega)}^{(r-1)s'} \, dt \right)^{\frac{1}{s'}} = \|u\|_{L_{(r-1)s'}(I \times \Omega)}^{(r-1)}. \end{aligned}$$

Falls  $(r-1)s' \leq s$  ist, sehen wir sofort, dass  $\|u\|_{L_{(r-1)s'}(I \times \Omega)} \leq \|u\|_{L_s(I \times \Omega)}$  gilt. Falls wir zeigen können, dass in diesem Fall  $\|v\|_{L_s(I \times \Omega)} \leq \|v\|_{W_{p,q}}$  ist, folgt

$$\langle A_2 u, v \rangle \leq \tilde{c} \left( 1 + \|u\|_{W_{p,q}}^{r-1} \right) \|v\|_{W_{p,q}}.$$

Daher ist  $A_2 : W_{p,q} \rightarrow W'_{p,q}$  wohl definiert und beschränkt.

Man beachte, die Bedingung  $(r-1)s' \leq s$  bedeutet, dass  $r \leq s$  ist.

### 2.Schritt Beweis der Beschränktheit durch Fallunterscheidung

Wir zeigen die Abschätzung für  $s = p \frac{n+2}{n}$  :

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)} \leq \|v\|_{W_{p,q}}.$$

Es ist

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)} = \left( \int_I \int_{\Omega} |v|^s \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{s}} = \left( \int_I \|v\|_{L_s(\Omega)}^s \, dt \right)^{\frac{1}{s}} \quad (3.21)$$

Weiterhin gilt

$$\|v\|_{L_s(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |v|^{s\alpha} |v|^{s(1-\alpha)} \, dx \right)^{\frac{1}{s}} \quad \text{für } \alpha \in (0, 1).$$

Wir betrachten ein  $\delta$  mit  $1 < \delta < \infty$  und bezeichnen mit  $\delta'$ , den zu  $\delta$  konjugierten Exponenten. Dann ist unter Beachtung der Hölderschen Ungleichung

$$\|v\|_{L_s(\Omega)} \leq \|v\|_{L_{s\alpha\delta}(\Omega)}^{\alpha} \|v\|_{L_{s(1-\alpha)\delta'}(\Omega)}^{1-\alpha}$$

und

$$\|v\|_{L_s(\Omega)}^s \leq \|v\|_{L_{s\alpha\delta}^{\alpha s}(\Omega)}^{\alpha s} \|v\|_{L_{s(1-\alpha)\delta'}^{(1-\alpha)s}(\Omega)}^{(1-\alpha)s}. \quad (3.22)$$

Wir setzen (3.22) in (3.21) ein und erhalten:

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)}^s \leq \int_I \|v\|_{L_{s\alpha\delta}^{\alpha s}(\Omega)}^{\alpha s} \|v\|_{L_{s(1-\alpha)\delta'}^{(1-\alpha)s}(\Omega)}^{(1-\alpha)s} dt. \quad (3.23)$$

**1. Fall**  $p \geq n$

In diesem Fall ist  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \subset L_{s\alpha\delta}(\Omega)$ ,  $s\alpha\delta \geq 1$ . Jetzt bestimmen wir  $\alpha$  so, dass  $\alpha s = p$ , d.h.  $\alpha = \frac{n}{n+2} < 1$ . Es folgt, dass  $\alpha s\delta = p\delta \geq 1$  ist. Jetzt bestimmen wir  $\delta$  so, dass

$$s(1-\alpha)\delta' = 2, \quad \text{d.h. } (s-p)\delta' = 2, \quad \delta' = \frac{2}{s-p}.$$

Diese Forderung ist für  $s = p(\frac{n+2}{n})$  sinnvoll und es ist  $(1-\alpha)s = s-p = p(\frac{n+2}{n} - 1) = \frac{2}{n}p$ .

Wir schätzen (3.23) weiter ab.

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)}^s \leq c \int_I \|\nabla v\|_{L_p(\Omega)}^p \|v\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{n}p} dt \leq c \sup_{t \in I} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{2}{n}p} \|v\|_{W_{p,q}}^p.$$

Nun ist nach Lemma 19

$$\sup_{t \in I} \|v(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \tilde{c} \|v\|_{W_{p,q}}.$$

und damit

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)}^s \leq \hat{c} \|v\|_{W_{p,q}}^{(\frac{2}{n}+1)p} = \hat{c} \|v\|_{W_{p,q}}^s.$$

Es folgt

$$\|v\|_{L_s(I \times \Omega)} \leq \hat{c} \|v\|_{W_{p,q}}.$$

**2. Fall**  $p < n$

In diesem Fall müssen wir ebenfalls garantieren, dass  $\overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) \subset L_{s\alpha\delta}(\Omega)$ , was für  $s\alpha\delta = \frac{np}{n-p}$  erfüllt ist. Wir fordern  $s\alpha = p$ ,  $s(1-\alpha)\delta' = 2$ , woraus

$$\delta = \frac{n}{n-p}, \quad \delta' = \frac{n}{p}, \quad (s-p)\frac{n}{p} = p\left(\frac{n+2-n}{n}\right)\frac{n}{p} = 2$$

folgt. Das liefert wie im ersten Fall die Behauptung.

**3. Schritt** Beweis der starken Stetigkeit von  $A_2$

Wir haben zu zeigen, dass  $A_2$  schwach konvergente Folgen in stark konvergente Folgen abbildet.

Sei  $(u_n) \subset W_{p,q}$  eine schwach konvergente Folge. Es folgt, dass  $\|u_n\|_{W_{p,q}} < c$ . Aufgrund eines Lemmas von Aubin(1963) und Lions(1969), [6] S.121, gilt

$$W_{p,q} \stackrel{\text{comp}}{\subset} L_r(I \times \Omega), \quad \text{falls } r < p\frac{n+2}{n}.$$

Daher gibt es eine konvergente Teilfolge

$$u_{n_k} \rightarrow u \text{ in } L_r(I \times \Omega).$$

Wir erinnern jetzt an den Nemyckii-Operator:

$$F : L_r(I \times \Omega) \rightarrow L'_r(I \times \Omega), \quad F(u) := g(u).$$

$F$  ist stetig, falls

$$|g(u)| \leq 1 + |u|^{r-1} = 1 + |u|^{\frac{r}{r-1}}.$$

Damit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|A_2 u_{n_k} - A_2 u\|_{W_{p,q}} &= \sup_{w \in W_{p,q}, \|w\| \leq 1} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, w \rangle| \\ &= \sup_{w \in W_{p,q}, \|w\| \leq 1} \int_I \int_{\Omega} |g(u_{n_k}) - g(u)| |w| \, dx \, dt \\ &\leq \sup_{w \in W_{p,q}, \|w\| \leq 1} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L_{r'}(I \times \Omega)} \|w\|_{L_r(I \times \Omega)} \\ &\leq c \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L_{r'}(I \times \Omega)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

d.h.  $A_2 : W_{p,q} \rightarrow W'_{p,q}$  ist stark stetig. ■

Nun folgt mit Hilfe des Satzes von Browder folgendes Ergebnis:

**Satz 45** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand,  $I = [0, T]$  ein endliches Zeitintervall. Weiterhin sei  $p \geq \frac{2n}{n+2}$  und die stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle für  $r < \frac{p(n+2)}{n}$  folgende Bedingungen:

$$g(s) \leq 1 + |s|^{r-1}, \quad g(s)s > -\infty.$$

Dann gibt es für alle  $f \in L_q(I \times \Omega)$  eine schwache Lösung  $u \in D(B) = \{u \in W_{p,q}, u(0) = 0\}$ , d. h.  $u$  genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} &\int_I \left\langle \frac{du(t)}{dt}, v(t) \right\rangle dt + \int_I \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) \cdot \nabla v(t) \, dx \, dt \\ &+ \int_I \int_{\Omega} g(u(t)) v(t) \, dx \, dt = \int_I \int_{\Omega} f(t) v(t) \, dx \, dt \quad \forall v \in C_0^\infty(I \times \Omega). \end{aligned}$$

# Index

- $k$ -kontrahierend, 10
- $p$ -Laplace Gleichung, 53
- Abbildung
  - konvex, 68
  - maximal monoton, 68
- Aussage  $\hat{M}$ , 56
- Banachscher Fixpunktsatz, 10, 11, 14
- Bedingung  $M$ , 44
- Carathéodory-Bedingung (C), 51
- Cofaktor-Matrix, 22
- Dirichletproblem für nichtlineare Poissongleichung, 10
- Eigenschaften der Lösungsmenge, 49
- Einbettungssätze für Sobolevräume, 61
- Euler-Lagrange Gleichungen, 20
- expandierend
  - nicht, 10
- Fehlerabschätzung
  - a-posteriori, 11
  - a-priori, 11
- Fixpunkt, 9, 24, 30
- Fixpunktgleichung, 9
- Fixpunktsatz
  - Schäferscher, 34
- Fixpunktsatz von Brouwer, 20
- Fixpunktsatz von Schauder, 20
- Fréchetableitung, 71
- Fréchet-Ableitung, 21
- Funktion
  - konvex, 68
- Funktional
  - koerziv, 76
- Gâteauxableitung, 70
- Galerkin Approximation, 46
- Gelfand Tripel, 88
- Graph, 67
- Hauptsatz
  - von Browder und Minty, 46
- Hindernisproblem, 79
- homöomorphe Menge, 25
- Indikatorfunktion, 77
- Jacobi-Matrix, 21
- Kegelbedingung, 53
- Koerzivität, 81
- kompakt, 12
  - relativ, 12
- kontrahierend, 10
- Konvergenzgeschwindigkeit, 11
- konvexe Menge, 68
- Konvexitätskriterien
  - im  $\mathbb{R}^n$ , 68
  - in Banachräumen, 70
- Lagrange Funktionen, 20
- Lemma
  - von Minty, 44
- Lemma von Mazur, 31
- Lipschitz-stetig, 10
- Minimalfolge, 76
- Minimierer, 75
- Minimierungsproblem, 75
- Multiplikationssatz, 53
- Navier-Stokes Gleichungen
  - stationäre, 17
- Null-Lagrange-Funktion, 22, 23
- Operator
  - strikt monotoner, 39
  - beschränkter, 42
  - demistetiger, 41
  - Einbettungs-, 29
  - gleichmäßig monotoner, 39
  - hemistetiger, 41
  - Integral-, 29
  - koerziver, 39
  - kompakter, 28
  - lokal beschränkter, 42
  - maximal monoton, 66
  - maximal monotoner, 44

- monotoner, 39
  - Nemyckii-, 50
  - pseudomonotoner, 56, 57
  - Schauder-, 29
  - stark stetiger, 42
  - stetiger, 41
  - vollstetiger, 28
- Piola-Identität, 23
- Potenzmenge, 67
- Raum  $W^{\circ,1,2}(\Omega)$ , 18
- Raum  $W_{p,q}$ , 89
- Relaxation
  - lineare, 9
  - nichtlineare, 9
- Richtungsableitung, 70
- Satz
  - von Rockafellar, 79
  - von Browder, 81, 82
  - von Brézis, 56
  - von Browder und Minty, 44
- Satz von Peano, 33
- Schäferscher Fixpunktsatz, 34
- Schauderscher Fixpunktsatz, 27, 30
- Schwache Formulierung, 17
- Spektralradius, 14
- strikt konvex, 68
- Subdifferential, 72
- Subgradient, 72
- System der Euler-Lagrange Gleichungen, 21
- Tägerfunktional, 77
- unterhalbstetig, 76
- Variationsungleichungen, 79
- Wachstumsbedingung, 51, 52, 61
- Zeitableitung, 87
  - schwache, 89
  - verallgemeinerte, 89



# Literaturverzeichnis

- [1] Adams, R. A. *Sobolev Spaces*. Academic Press. INC, Boston, 1978.
- [2] Alt, H.W. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, 2006
- [3] Ciarlet, P. G. *Mathematical Elasticity, Vol. I: Three Dimensional Elasticity*. North Holland, S. 993.
- [4] Evans, L.C. *Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, **Volume 19**, 1998.
- [5] Gilbarg, D., Trudinger, N. *Elliptic Differential Equations of Second Order* Springer Verlag 1983.
- [6] Ružička, M. *Nichtlineare Funktionalanalysis* Springer-Verlag 2004.
- [7] Sändig, A.M. *Partielle Differentialgleichungen, Vorlesung im Wintersemester 2005/2006* Preprint 2006/004 des IANS, Universität Stuttgart 2006.
- [8] Valent, T. *Boundary Value Problems of Finite Elasticity* Springer Verlag 1988.
- [9] Wendland, W.L., Steinbach, O. *Analysis* Teubner Verlag 2005.
- [10] Zeidler, E. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part I, IIA/B und IV/V* Springer-Verlag 1994.

Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig

Pfaffenwaldring 57  
70569 Stuttgart  
Germany

**E-Mail:** [saendig@ians.uni-stuttgart.de](mailto:saendig@ians.uni-stuttgart.de)

**WWW:** <http://agsaendig.ians.uni-stuttgart.de/mitarbeiter/saendig.shtml>



## **Erschienene Preprints ab Nummer 2009/001**

Komplette Liste: <http://preprints.ians.uni-stuttgart.de>

2009/001 *Sändig, A.-M.*: Nichtlineare Funktionalanalysis mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen, Vorlesung im Wintersemester 2008/09